ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

ANNALES
DE
L'INSTITUT FOURIER

PUBLIÉES AVEC LE CONCOURS
DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

TOME XI

Année 1961

RÉDACTEURS

M. BRELOT, C. CHABAUTY et L. NÉEL

CHARTRES
IMPRIMERIE DURAND
9, RUE FULBERT, 9
—
1961

SOMMAIRE

(La reproduction des résumés ci-après, rédigés par les auteurs eux-mêmes est autorisée.)

Chapitre I. — Convolution des courants dans les variétés indéfiniment différentiables. Si X, Y, Z sont des variétés indéfiniment différentiables, et f une application indéfiniment différentiable de $X \times Y$ dans Z, deux notions naturelles de convolution sont introduites, faisant correspondre chacune, à un courant S dans X et à un courant T dans Y, un courant dans Z; la convolution de première espèce est parfaitement déterminée par les données ci-dessus; la convolution de seconde espèce dépend en outre du choix d'une certaine forme différentielle α dans $X \times Y$. Les propriétés de ces deux opérations, liées à celles du produit tensoriel, se complètent mutuellement.

Chapitre II. — Convolution des courants dans l'espace euclidien R^n. Les variétés X, Y, Z sont identiques à R^n, l'application f est définie par

$$f(x, y) = x + y;$$

si la forme α est convenablement choisie, les deux convolutions sont adjointes par rapport à la métrique naturelle de R^n. Cette situation est d'abord axiomatisée, puis la convolution des courants est rattachée à celle des distributions, et diverses propriétés sont établies, en particulier une formule intégrale qui relie la convolution à certaines notions topologiques.

Chapitre III. — Des conditions suffisantes, d'abord algébriques, puis analytiques, sont données pour que la proposition suivante soit vraie : si $\omega_1, \ldots, \omega_p$ sont des formes différentielles linéaires, et si α est une forme différentielle vérifiant la relation $\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_p \wedge \alpha = 0$, il existe des formes différentielles $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ telles que l'on ait

$$\alpha = \omega_1 \wedge \beta_1 + \cdots + \omega_p \wedge \beta_p.$$

Chapitre IV. — En utilisant la formule de Cauchy-Fantappiè considérée dans un travail récent par J. Leray, on établit une formule très générale qui permet de représenter une fonction holomorphe dans un domaine de C^n par une somme d'intégrales de formes différentielles extérieures sur des

On propose une extension des résultats classiques de Denjoy concernant les itérés d'un homéomorphisme direct du cercle T, aux trajectoires d'un groupe discret d'homéomorphismes de T. Il en résulte que certaines structures feuilletées de co-dimension un et de classe C_2 n'ont que des feuilles propres ou localement partout denses.

Dans ce travail la théorie des foncteurs dérivés (connue pour les foncteurs additifs) est généralisée aux foncteurs arbitraires (non additifs). Pour obtenir cette généralisation on remplace les complexes de la théorie usuelle par des complexes semi-simpliciaux. Soient $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$ deux catégories abéliennes, T un foncteur covariant de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{A}'$, A un objet de $\mathfrak{A}$ et n un entier $\geqslant 0$. Alors on appelle résolution (semi-simpliciale) de (A, n) un « objet semi-simplicial » X sur $\mathfrak{A}$ muni d'un isomorphisme $H_n(X) \cong A$ et tel que $X_q = 0$ pour $q < n$, $H_q(X) = 0$ pour $q > n$. Si de plus X_q est un objet projectif de $\mathfrak{A}$ pour tout q, on pose $L_qT(A, n) = H_qTX$. Supposant que tout objet de $\mathfrak{A}$ soit isomorphe à un quotient d'un objet projectif on prouve que $L_qT(\ , n)$ est un foncteur covariant de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{A}'$ (dérivé gauche de T). Si T est additif, le foncteur $L_qT(\ , n)$ ne dépend que de $q - n$ et coïncide avec $L_{q-n}T$, dérivé gauche de T au sens usuel. Si $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$ est la catégorie des groupes abéliens et T(A) est l'anneau de groupe ou l'algèbre symmétrique de A, $L_qT(A, n)$ est isomorphe au groupe $H_q(A, n, \mathbf{Z})$ d'Eilenberg-MacLane.

Soit alors $T(0) = 0$ (sans autres restrictions pour $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}'$ et T). Pour tout objet semi-simplicial X sur $\mathfrak{A}$ on peut définir la suspension SX et le morphisme suspension $\sigma\colon H_qTX \rightarrow H_{q+1}TSX$ qui donne en particulier

$$\sigma\colon L_qT(A, n) \rightarrow L_{q+1}T(A, n+1).$$

Le morphisme σ peut être considéré comme une généralisation de la suspension dans les groupes d'Einlenberg-MacLane et ses propriétés principales sont les mêmes que dans ce cas spécial. (Les « éléments décomposables » sont annulés, l'image est primitive, σ est un isomorphisme pour les « dimensions stables », etc.). Les plus profondes de ces propriétés sont prouvées par une construction qui ressemble à la « bar-construction » d'Eilenberg-MacLane. Utilisant la catégorie duale de $\mathfrak{A}$ resp. $\mathfrak{A}'$ on obtient immédiatement des définitions et résultats analogues pour un foncteur contravariant et pour les foncteurs dérivés droits.

Dans les applications nous considérons le foncteur produit tensoriel symétrique. Nous obtenons des résultats nouveaux pour les éléments décomposables resp. primitifs dans l'homologie des produits symétriques (d'un espace ou d'un complexe semi-simplicial) et des complexes d'Eilenberg-MacLane (§§ 10, 11) ainsi que d'autres résultats pour l'homologie et l'homotopie des produits symétriques (§ 12).

L'objet de cet article est l'étude de l'anneau $\mathfrak{L}(E)$ des A-endomorphismes d'un module de type fini E sur un anneau local A d'idéal maximal m, de corps des restes k. Si C est un sous-module caractéristique, on définit un homo-

morphisme naturel de $\mathfrak{L}(E)$ dans $\mathfrak{L}(E/C)$. En particulier, si $C = mE$, l'image de $\mathfrak{L}(E)$ dans $\mathfrak{L}(E/mE)$ par cet homomorphisme φ est une approximation de l'anneau $\mathfrak{L}(E)$ par une sous algèbre de la k-algèbre $\mathfrak{L}(E/mE)$. Réciproquement, si R est une algèbre de dimension finie sur un corps k, il existe un anneau local A de corps des restes k et un A-module de type fini E tels que $\varphi[\mathfrak{L}(E)]$ soit isomorphe à R. Si E est fidèle, la surjectivité de φ est équivalente au fait que E est libre. Un exemple simple montre que l'homomorphisme naturel de $\mathfrak{L}(E)$ dans $\mathfrak{L}(E/m^iE)$ peut ne pas être surjectif pour i grand. Si C est un sous module caractéristique maximal, l'idéal $\mathrm{Hom}_A(E, C)$ est bilatère maximal et, réciproquement, tout idéal bilatère maximal I tel que $\Sigma_{u\in I}u(E)$ soit distinct de E est de ce type. La recherche des A-modules E tels que l'anneau $\mathfrak{L}(E)$ soit commutatif se ramène, par extension d'anneau, à la recherche de modules dont les seuls endomorphismes sont les homothéties. Si l'anneau A est intègre, l'égalité $\mathfrak{L}(E) = A$ implique que E est isomorphe à un idéal convenable de A. Il n'en est plus de même dans le cas général. L'étude d'un endomorphisme particulier u se fait, si l'anneau A est hensélien, par une technique de relèvement de décompositions en somme directe. Si l'anneau A est factoriel, on obtient une condition suffisante portant sur le polynôme minimal de u.

Le présent mémoire est le second dans une série où la théorie des espaces fonctionnels et de la complétion fonctionnelle est développée en général et dans des cas particuliers en vue d'une application systématique aux problèmes différentiels. Dans cette première partie nous nous occupons des classes P^α des potentiels de Bessel d'ordre α dans un espace euclidien R^n entier. Nous considérons les classes P^α à deux points de vue : 1° comme les complétions parfaites des fonctions C_0^∞ relatives aux normes $\|u\|_\alpha \cdots$ ce qui les rattache aux problèmes différentiels d'ordre correspondant; 2° comme potentiels correspondant aux noyaux de Bessel $G_\alpha \cdots$ ce qui permet l'étude détaillée de leurs propriétés. Après une analyse approfondie des classes d'ensembles exceptionnels $\mathfrak{A}_{2\alpha}$ et des capacités $\gamma_{2\alpha}$ correspondant à P^α, nous caractérisons les fonctions de P^α par leurs propriétés de différentiabilité. Nous caractérisons aussi les restrictions de ces potentiels aux sous-espaces R^k, comme potentiels d'ordre $\alpha - (n - k)/2$ dans ces sous-espaces. Nous considérons encore les potentiels locaux P^α_{loc} dans un ouvert $D \subset R^n$. Ces dernières classes sont essentielles pour les développements des parties ultérieures du mémoire où sera présentée l'étude intrinsèque des classes P^α dans un ouvert de R^n ou sur une variété différentiable.

On donne une condition suffisante pour l'hypoellipticité d'une équation différentielle à coefficients variables. La démonstration utilise une paramétrix construite par transformation de Fourier.

Soit U_1 un ouvert dans $\mathbf{C}^m$. Soit $\pi_1 : \mathcal{G} \to U_1$ une famille holomorphe de structures complexes sur une surface de Riemann non-compacte M, avec

$\mathcal{V}_{t_0} = \pi_1^{-1}(t_0) = M$. ($\mathcal{V} = \mathcal{V}(M \times U_1)$ est une structure complexe sur le produit différentiable $M \times U_1$). Soit M_1 un domaine relativement compact dans M. On démontre : pour tout voisinage de Stein U de t_0, assez petit, la famille $\pi_1 : \mathcal{V}(M_1 \times U) \to U$ est isomorphe à la famille $\pi : \Omega \to \pi(\Omega)$, où Ω est un *ouvert de Stein* de la variété produit $M \times \mathbf{C}^m$, π étant la projection $M \times \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^m$. On donne aussi un résultat analogue pour le cas des variations différentiables.

Dans la première partie, on étudie les familles F localement bornées supérieurement de fonctions plurisousharmoniques dans un domaine Δ de l'espace C^p des variables complexes $X_1, \ldots, X_p$, $X_k = x_k + iy_k$; on suppose que le sous-espace réel R^p coupe Δ selon un domaine D de la topologie R^p. On sait que l'enveloppe supérieure w de F a pour plus petite majorante (régularisée) semi-continue supérieurement une fonction plurisousharmonique w^*. L'étude porte sur l'ensemble E où l'on a $w < w^*$: E est réunion de p ensembles de R^{2p}-capacité nulle, dont chacun est coupé par une des directions d'axe complexe selon des ensembles de R^2-capacité nulle. Sur R^p, E est de mesure nulle et w est localement sommable.

Ces propriétés permettent l'étude de classes particulières ($\mathcal{L}$, D) de fonctions analytiques f de variables réelles dont les domaines d'holomorphie ont une intersection $\Omega(D)$ non vide et pour lesquelles il existe une majoration de $|f|$ sur un compact Γ de $\Omega(D)$ en fonction linéaire de sup. $|f|$ sur un compact G de D, la correspondance $\Gamma \to G$ étant continue (eu égard aux topologies C^p et R^p respectivement) au voisinage de l'identité $G \to G$.

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
11 (1961), 1-82.

PROBLÈMES SUR LES FORMES DIFFÉRENTIELLES ET LES COURANTS

par François NORGUET (Strasbourg)

Les méthodes que j'ai utilisées, dans un travail précédent [8] sur la caractérisation des domaines d'holomorphie par une propriété locale, ont attiré mon attention sur les formules de représentation intégrale pour les fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes, puis, plus généralement, sur l'utilisation des formes différentielles extérieures et des courants dans la théorie des variétés analytiques complexes.

Dans ce domaine, deux résultats importants d'analyse ont été obtenus respectivement par P. Lelong [3] et L. Schwartz [18], à savoir : d'une part, la possibilité d'intégrer une forme différentielle extérieure sur un ensemble analytique complexe, ce qui permet d'associer de façon naturelle un courant positif fermé à cet ensemble analytique; d'autre part, la possibilité de prolonger canoniquement par un courant certaines formes différentielles méromorphes. En outre, P. Lelong [2] et G. de Rham [15] ont apporté une contribution à l'étude algébrique des espaces de formes différentielles et de courants, étudiant respectivement la division de courants positifs par des formes différentielles positives, et la division de formes différentielles et de courants par une forme différentielle homogène de degré un; la division de formes différentielles par une forme de degré deux avait été précédemment étudiée par T. Lepage [4] et G. Papy [14]. D'autres résultats importants d'analyse et de topologie algébrique ont été obtenus dans ce même domaine par E. Dolbeault, K. Kodaira et D. C. Spencer. Enfin, tout

récemment, J. Leray [5] a développé sa théorie des résidus pour les formes différentielles semi-méromorphes.

Toutefois, j'ai été bien vite conduit, dès 1954, vers des problèmes (liés à la convolution des courants et à la multiplication extérieure des formes différentielles) qui se posent naturellement dans le cas des variétés différentiables à structure réelle; dans ce cadre se situent les trois premiers chapitres de ce travail. Seul le chapitre IV, consacré à la représentation intégrale des fonctions holomorphes de plusieurs variables, fait usage de la structure analytique complexe.

D'abord, il me semblait nécessaire de généraliser aux formes différentielles et aux courants certaines théories, classiques pour les fonctions et les distributions; en particulier, la notion de convolution me paraissait importante pour permettre l'écriture d'équations de convolution entre formes différentielles et courants, pour établir un lien entre certaines opérations d'analyse et des opérations topologiques correspondantes, pour rendre possibles l'écriture et la démonstration algorithmique de certaines formules intégrales; je lui consacre les chapitres I et II de ce travail. Le chapitre I est ainsi consacré à l'étude de la convolution des courants dans les variétés indéfiniment différentiables; deux notions de convolution, toutes deux naturelles, sont introduites, sous les hypothèses les plus générales; on établit plusieurs propriétés dont certaines résultent des définitions elles-mêmes, et d'autres, d'hypothèses supplémentaires, exprimées formellement afin d'axiomatiser une généralisation de la situation obtenue dans l'espace euclidien. Le chapitre II est consacré à l'étude détaillée de la convolution dans l'espace euclidien; celle-ci généralise la convolution classique des mesures relativement à la loi de groupe additif de cet espace, ainsi que la convolution des distributions, définie par L. Schwartz [17].

L'utilisation des formes différentielles et des courants nécessitait encore la solution de certains problèmes d'algèbre extérieure. Le chapitre III est consacré à l'un d'eux. Il comprend tout d'abord une partie algébrique : l'étude d'un certain groupe d'homologie associé à un complexe de modules muni de plusieurs dérivations. Effectuer cette étude dans son cadre naturel : celui d'une catégorie abélienne, telle qu'elle est définie par A. Grothendieck [1], ne présente pas de difficulté

supplémentaire essentielle, mais alourdit considérablement le formalisme; aussi, après l'énoncé du problème général dans une catégorie abélienne, on se restreint au cas des modules. Le théorème obtenu, appliqué aux formes différentielles extérieures sur une variété indéfiniment différentiable, fournit des conditions pour qu'une telle forme soit combinaison linéaire de formes différentielles linéaires données.

Enfin, malgré les résultats obtenus par F. Sommer [20], une méthode unifiée de démonstration pour les formules de représentation intégrale des fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes restait à découvrir. Une telle méthode, généralisant l'idée de la démonstration donnée par J. Leray [5] pour la formule de Cauchy-Fantappiè, est exposée dans le chapitre IV, et appliquée au cas des formules intégrales de E. Martinelli [7] et de A. Weil [21].

La plupart des résultats exposés dans ce travail ont été annoncés dans [9], [10], [11], [13]. D'autres résultats, sur la théorie des résidus et sur les applications de la convolution, partiellement annoncés dans [10] et [12], n'ont pu trouver place dans ce mémoire et seront publiés ultérieurement.

Je tiens à exprimer ici ma profonde gratitude à M. P. Lelong, qui, ayant guidé mes premières recherches vers des problèmes fondamentaux relatifs aux domaines pseudoconvexes, n'a cessé, depuis lors, de s'intéresser à mes travaux et de les diriger. J'adresse mes remerciements à MM. M. Brelot et C. Ehresmann, qui ont accepté de se joindre à M. P. Lelong pour constituer le Jury de cette Thèse.

CHAPITRE PREMIER

GÉNÉRALITÉS SUR LA CONVOLUTION DES COURANTS

1. Généralités sur les courants.

Dans les chapitres I et II, toutes les variétés considérées seront indéfiniment différentiables et orientées; le produit topologique $X \times Y$ de deux variétés X et Y sera toujours muni de la structure indéfiniment différentiable et de l'orientation naturelles; $P_{X \times Y}$ (resp. $Q_{X \times Y}$) désignera la projection canonique de $X \times Y$ sur X (resp. Y); toute application d'une variété dans une autre sera supposée indéfiniment différentiable. Nous rappellerons d'abord, selon G. de Rham [16], quelques notions fondamentales relatives aux *courants*.

Soient X une variété de dimension m, $\mathcal{E}_X$ l'espace vectoriel des formes différentielles indéfiniment différentiables et à valeurs complexes dans X, $\mathfrak{D}_X$ le sous-espace de $\mathcal{E}_X$ constitué par les formes à support compact. Soit $1 = \sum_{i \in I} \psi_i$ une partition de l'unité dans X, localement finie et subordonnée à un recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ de X par des domaines de coordonnées; pour toute forme $\varphi \in \mathcal{E}_X$, soit $l_{i,p}(\varphi)$ la borne supérieure du module des dérivées d'ordre $\leqslant p$ des coefficients de la forme $\psi_i \varphi$ représentée à l'aide des coordonnées dans U_i; une partie B de $\mathcal{E}_X$ est dite *bornée à l'ordre p* si $l_{i,p}(\varphi)$ est borné, quel que soit i (la borne pouvant dépendre de i) lorsque φ varie dans B; une partie B de $\mathcal{E}_X$ est dite *bornée*, si elle est bornée à l'ordre p, quel que soit p; enfin, une partie B de $\mathfrak{D}_X$ est dite *bornée à l'ordre p* (resp. *bornée*) si elle l'est dans $\mathcal{E}_X$ et si les formes différentielles qu'elle contient ont toutes leurs supports dans un même compact. La définition des parties bornées dans $\mathcal{E}_X$ et dans $\mathfrak{D}_X$ munit ces espaces vectoriels de

topologies localement convexes; l'espace vectoriel $\mathcal{D}'_X$ des courants dans X est le dual topologique de $\mathcal{D}_X$; le sous-espace $\mathcal{E}'_X$ de $\mathcal{D}'_X$, constitué par les courants à support compact, est le dual topologique de $\mathcal{E}_X$; un courant est dit *continu d'ordre p* si sa valeur reste bornée sur toute partie bornée à l'ordre p dans $\mathcal{D}_X$; enfin $\mathcal{D}'_X$ et $\mathcal{E}'_X$ sont munis de *topologies* telles que: pour qu'une suite $(T_i)_{1 \leqslant i < +\infty}$ de courants converge vers zéro dans $\mathcal{D}'_X$ (resp. $\mathcal{E}'_X$), il faut et il suffit que $\langle \varphi, T_i \rangle$ (valeur prise par le courant T_i sur la forme différentielle φ) converge vers zéro, uniformément sur tout ensemble borné dans $\mathcal{D}_X$ (resp. $\mathcal{E}_X$).

La notion de courant généralise à la fois celles de forme différentielle extérieure et de chaîne singulière, grâce aux applications i_X et j_X définies comme suit: si α est une forme différentielle, localement sommable, dans X, et σ une chaîne singulière, localement finie, on notera

$$\langle \varphi, i_X(\alpha) \rangle = \int_X \alpha \wedge \varphi \qquad \text{et} \qquad \langle \varphi, j_X(\sigma) \rangle = \int_\sigma \varphi$$

pour toute forme φ appartenant à $\mathcal{D}_X$; de façon générale, on posera

$$\int_X T \wedge \varphi = \langle \varphi, T \rangle$$

pour tout courant T appartenant à $\mathcal{D}'_X$ (resp. $\mathcal{E}'_X$) et toute forme différentielle φ appartenant à $\mathcal{D}_X$ (resp. $\mathcal{E}_X$); comme les espaces de formes différentielles et de chaînes singulières, les espaces de courants sont *gradués* de façon naturelle: $\mathcal{D}_{X,p}$ désignant le sous-espace de $\mathcal{D}_X$ constitué par les formes homogènes de degré p, le dual $\mathcal{D}'_{X,p}$ de $\mathcal{D}_{X,p}$ est constitué par les courants homogènes de *dimension* p, de *degré* $m - p$; si α est une forme différentielle, localement sommable, homogène de degré p, et σ une chaîne localement finie de dimension q, $i_X(\alpha)$ et $j_X(\sigma)$ sont des courants homogènes, le premier de degré p, le second de dimension q.

Le *produit extérieur* d'un courant T et d'une forme α appartenant à $\mathcal{E}_X$ est défini par la relation

$$\langle \varphi, T \wedge \alpha \rangle = \langle \alpha \wedge \varphi, T \rangle$$

pour toute forme $\varphi \in \mathcal{D}_X$ et par la relation

$$\alpha \wedge T = (-1)^{pq} T \wedge \alpha$$

lorsque α et T sont homogènes de degrés p et q respectivement; on a donc

$$i_X(\beta) \wedge \alpha = i_X(\beta \wedge \alpha) \quad \text{et} \quad \alpha \wedge i_X(\beta) = i_X(\alpha \wedge \beta).$$

Le *bord* et la *différentielle* d'un courant T sont définis respectivement par les relations

$$\langle \varphi, b\mathrm{T} \rangle = \langle d\varphi, \mathrm{T} \rangle, \quad d\mathrm{T} = \varpi b\mathrm{T}$$

pour toute forme $\varphi \in \mathfrak{D}_X$, l'opérateur linéaire ϖ associant à un courant T, homogène de degré p, le courant $(-1)^p\mathrm{T}$; on a donc

$$di_X(\alpha) = i_X(d\alpha) \quad \text{et} \quad bj_X(\sigma) = j_X(b\sigma)$$

pour toute forme différentielle α et pour toute chaîne σ, et

$$d(\mathrm{T} \wedge \alpha) = d\mathrm{T} \wedge \alpha + \varpi\mathrm{T} \wedge d\alpha, \qquad b(\mathrm{T} \wedge \alpha) = b\mathrm{T} \wedge \varpi\alpha + \mathrm{T} \wedge b\alpha$$

pour tout courant T et toute forme $\alpha \in \mathcal{E}_X$. Enfin, si g est une application de X dans une variété Y, et si T est un courant dans X, de support $\sigma(\mathrm{T})$, tel que $\sigma(\mathrm{T}) \cap g^{-1}(\mathrm{K})$ soit compact pour tout compact K de Y, on définit le courant *image* $g(\mathrm{T})$ par la relation

$$\langle \varphi, g(\mathrm{T}) \rangle = \langle g^*(\varphi), \mathrm{T} \rangle$$

pour toute forme $\varphi \in \mathfrak{D}_Y$, $g^*(\varphi)$ désignant l'image réciproque de φ par g.

Les formes différentielles considérées jusqu'à présent étaient supposées à coefficients complexes; plus généralement, on peut considérer des formes différentielles à coefficients dans un espace vectoriel sur le corps des nombres complexes; ceci est utile pour introduire les *formes et courants doubles*, qui interviennent sur le produit de deux variétés, à côté des formes et courants ordinaires (cf. [16]).

Soient X et Y deux variétés, de dimensions respectives m et n; l'espace vectoriel (sur le corps des nombres complexes) des formes différentielles dans X dont les coefficients sont des formes différentielles (à coefficients complexes) dans Y, canoniquement isomorphe à l'espace vectoriel des formes différentielles dans Y dont les coefficients sont des formes différentielles (à coefficients complexes) dans X, est l'espace des formes doubles dans $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$. On désignera par $\mathcal{E}_{X,Y}$ (resp. $\mathfrak{D}_{X,Y}$) l'espace vectoriel des formes doubles indéfiniment diffé-

rentiables (resp. indéfiniment différentiables et à support compact) dans X × Y; ces espaces sont munis de topologies analogues à celles définies ci-dessus; leurs duaux topologiques sont l'espace $\mathcal{E}'_{X,Y}$ des courants doubles à supports compacts et l'espace $\mathcal{D}'_{X,Y}$ des courants doubles dans X × Y; tous ces espaces sont bigradués, une forme (resp. un courant) double homogène possédant un degré (resp. un degré et une dimension) relativement à X et relativement à Y. Les opérations définies pour les formes et les courants se définissent de manière analogue pour les formes et les courants doubles; toutefois il faut distinguer si le bord et la différentielle sont relatifs à X ou à Y; en utilisant pour cela des indices, on obtient les opérateurs b_X, d_X, ϖ_X, b_Y, d_Y, ϖ_Y.

A toute forme différentielle φ dans X × Y est canoniquement associée une forme double $\mathcal{A}^*(\varphi)$; si φ est représentée, dans le produit U × V d'un domaine de coordonnées de X et d'un domaine de coordonnées de Y, par une expression

$$\sum \varphi_{i_1 \ldots i_p j_1 \ldots j_q}\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \wedge dy^{j_1} \wedge \ldots \wedge dy^{j_q},$$

$\mathcal{A}^*(\varphi)$ est représentée, dans U × V, par l'expression

$$\sum \varphi_{i_1 \ldots i_p j_1 \ldots j_q}\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} . dy^{j_1} \wedge \ldots dy^{j_q},$$

c'est-à-dire que le produit extérieur d'un quelconque dx^i par un dy^j est remplacé par un produit commutatif. L'opérateur $\mathcal{A}$, transposé de $\mathcal{A}^*$ par la dualité entre formes différentielles et courants, associe un courant à tout courant double; les opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^*$ admettent des inverses $\mathcal{A}^{-1}$ et $\mathcal{A}^{*-1}$; les relations suivantes sont vérifiées :

(i) $$\mathcal{A}^*(\varphi \wedge \varphi') = (-1)^{p'q} \mathcal{A}^*(\varphi) \wedge \mathcal{A}^*(\varphi')$$

si φ (resp. φ') est de degré q (resp. p') relativement à X (resp. Y);

(ii) $$\mathcal{A}(T \wedge \alpha) = (-1)^{(m-p)q} \mathcal{A}(T) \wedge \mathcal{A}^{*-1}(\alpha)$$

si α est de degré p (resp. q) relativement à X (resp. Y);

(iii) $$\mathcal{A}^*(\varphi) = (-1)^{(m-p)q} \mathcal{A}^{-1} i_{X \times Y}(\varphi)$$

si $\mathcal{A}^*(\varphi)$ est de degré p (resp. q) relativement à X (resp. Y);

(iv) $$\mathcal{A}^* d = (d_X + \varpi_X d_Y)\mathcal{A}^*;$$

(v) $$b\mathcal{A} = \mathcal{A}(b_X + \varpi_X^* b_Y),$$

l'opérateur ϖ^*, transposé de ϖ par la dualité entre formes

différentielles et courants, associant, à un courant T de dimension p, le courant $(-1)^p\,T$.

2. **Produits tensoriels de formes différentielles extérieures et de courants.**

Rappelons d'abord la définition du *produit tensoriel* selon G. de Rham [16]. Soient X et Y deux variétés, de dimensions respectives m et n; si α et β sont des formes différentielles extérieures dans X et Y respectivement, leur produit tensoriel $\alpha \otimes \beta$ est une forme double dans $X \times Y$, dont l'expression dans le produit $U \times V$ de deux domaines de coordonnées est le produit commutatif des expressions de α et de β dans U et V respectivement. Tout courant simple S dans X définit une application linéaire continue de $\mathfrak{D}_{X,Y}$ dans $\mathfrak{D}_Y$, faisant correspondre à toute forme double φ la forme différentielle $\langle \varphi, S \rangle$; si φ reste dans une partie bornée de $\mathfrak{D}_{X,Y}$, $\langle \varphi, S \rangle$ reste dans une partie bornée de $\mathfrak{D}_Y$; alors, si T est un courant dans Y, le produit tensoriel $S \otimes T$ est le courant double dans $X \times Y$, défini par les relations

$$\langle \varphi, S \otimes T \rangle = \langle \langle \varphi, S \rangle, T \rangle = \langle \langle \varphi, T \rangle, S \rangle;$$

les produits tensoriels ainsi définis vérifient la relation

$$i_X(\alpha) \otimes i_Y(\beta) = i_{X,Y}(\alpha \otimes \beta).$$

Nous les utiliserons pour définir les applications

$$\overline{\otimes} : \quad \mathcal{E}_X \times \mathcal{E}_Y \to \mathcal{E}_{X \times Y}, \qquad \overline{\otimes} : \mathfrak{D}'_X \times \mathfrak{D}'_Y \to \mathfrak{D}'_{X \times Y}$$

à l'aide des relations

$$\alpha \,\overline{\otimes}\, \beta = \mathcal{A}^{*-1}(\alpha \otimes \beta), \qquad S \,\overline{\otimes}\, T = (-1)^{p(n-q)} \mathcal{A}(S \otimes T)$$

lorsque S et T sont des courants homogènes de dimensions respectives p et q. La relation

$$i_X(\alpha) \,\overline{\otimes}\, i_Y(\beta) = i_{X \times Y}(\alpha \,\overline{\otimes}\, \beta)$$

nous permet d'énoncer et de démontrer les propriétés de l'opération $\overline{\otimes}$ seulement pour les courants (et non pour les formes différentielles) [1].

PROPRIÉTÉ 2. 1. — $b(S \,\overline{\otimes}\, T) = bS \,\overline{\otimes}\, \varpi T + S \,\overline{\otimes}\, bT$
et $d(S \,\overline{\otimes}\, T) = dS \,\overline{\otimes}\, T + \varpi S \,\overline{\otimes}\, dT.$

[1] C'est le courant $S \,\overline{\otimes}\, T$ que nous avions appelé « produit tensoriel » des courants S et T, dans [9], en 1954; en 1955 est paru le livre de G. de Rham [16], dont nous adoptons maintenant les notations.

En effet, compte-tenu de la définition de l'opération $\overline{\otimes}$ et de la relation (v) de 1, on a

$$\begin{aligned} b(\mathrm{S}\,\overline{\otimes}\,\mathrm{T}) &= (-1)^{p(n-q)} b\mathcal{A}(\mathrm{S} \otimes \mathrm{T}) \\ &= (-1)^{p(n-q)} \mathcal{A}(b_{\mathrm{X}} + \varpi^*_{\mathrm{X}} b_{\mathrm{Y}})(\mathrm{S} \otimes \mathrm{T}) \\ &= (-1)^{p(n-q)} \mathcal{A}(b\mathrm{S} \otimes \mathrm{T} + \varpi^* \mathrm{S} \otimes b\mathrm{T}) \\ &= b\mathrm{S}\,\overline{\otimes}\,\varpi\mathrm{T} + \mathrm{S}\,\overline{\otimes}\, b\mathrm{T} \end{aligned}$$

lorsque S et T ont les dimensions respectives p et q. La seconde relation se déduit de la première à l'aide de la relation $d = \varpi b$.

Propriété 2. 2. — *Si* α *et* T *sont homogènes de degrés respectifs* p *et* q, *on a*

$$(\mathrm{S} \wedge \alpha)\,\overline{\otimes}\,(\mathrm{T} \wedge \beta) = (-1)^{pq} (\mathrm{S}\,\overline{\otimes}\,\mathrm{T}) \wedge (\alpha\,\overline{\otimes}\,\beta).$$

En effet, si S et β sont homogènes de degrés respectifs p' et q', on obtient, compte-tenu des définitions de $\otimes$ et $\overline{\otimes}$, et de la relation (ii) de 1,

$$\begin{aligned} (\mathrm{S} \wedge \alpha)\,\overline{\otimes}\,(\mathrm{T} \wedge \beta) &= (-1)^{(m-p-p')(q+q')} \mathcal{A}((\mathrm{S} \wedge \alpha) \otimes (\mathrm{T} \wedge \beta)) \\ &= (-1)^{(m-p-p')(q+q')} \mathcal{A}((\mathrm{S} \otimes \mathrm{T}) \wedge (\alpha \otimes \beta)) \\ &= (-1)^{(m-p-p')q} \mathcal{A}(\mathrm{S} \otimes \mathrm{T}) \wedge \mathcal{A}^{*-1}(\alpha \otimes \beta) \\ &= (-1)^{pq} (\mathrm{S}\,\overline{\otimes}\,\mathrm{T}) \wedge (\alpha\,\overline{\otimes}\,\beta). \end{aligned}$$

Propriété 2. 3. — *En désignant par* $\mathrm{P}_{\mathrm{X}\times\mathrm{Y}}$ (*resp.* $\mathrm{Q}_{\mathrm{X}\times\mathrm{Y}}$) *la projection canonique du produit* $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ *sur* X (*resp.* Y), *on a la relation*

$$\alpha\,\overline{\otimes}\,\beta = \mathrm{P}^*_{\mathrm{X}\times\mathrm{Y}}(\alpha) \wedge \mathrm{Q}^*_{\mathrm{X}\times\mathrm{Y}}(\beta);$$

en particulier, en désignant par 1_{X} (*resp.* 1_{Y}) *la fonction égale à* 1 *dans* X (*resp.* Y), *on a*

$$1_{\mathrm{X}}\,\overline{\otimes}\,\beta = \mathrm{Q}^*_{\mathrm{X}\times\mathrm{Y}}(\beta), \qquad \alpha\,\overline{\otimes}\,1_{\mathrm{Y}} = \mathrm{P}^*_{\mathrm{X}\times\mathrm{Y}}(\alpha).$$

Le premier cas particulier est démontré par G. de Rham ([16], p. 62) sous la forme

$$\mathcal{A}^*\mathrm{Q}^*_{\mathrm{X}\times\mathrm{Y}}(\beta) = 1_{\mathrm{X}} \otimes \beta;$$

le second est analogue; enfin, la formule générale résulte de ces cas particuliers et de la propriété 2. 2; en effet on a

$$\begin{aligned} \alpha\,\overline{\otimes}\,\beta = (\alpha \wedge 1_{\mathrm{X}})\,\overline{\otimes}\,(1_{\mathrm{Y}} \wedge \beta) &= (\alpha\,\overline{\otimes}\,1_{\mathrm{Y}}) \wedge (1_{\mathrm{X}}\,\overline{\otimes}\,\beta) \\ &= \mathrm{P}^*_{\mathrm{X}\times\mathrm{Y}}(\alpha) \wedge \mathrm{Q}^*_{\mathrm{X}\times\mathrm{Y}}(\beta), \end{aligned}$$

Q.E.D.

Si φ est une forme différentielle, appartenant à $\mathcal{E}_{X,Y}$, dont le support $\sigma(\varphi)$ coupe le support $\sigma(S \otimes T)$ de $S \otimes T$ suivant un compact, nous définissons le symbole $\langle\varphi, S \otimes T\rangle$ par la relation

$$\langle\varphi, S \otimes T\rangle = \langle\mathcal{A}^{*-1}(\varphi), \mathcal{A}(S \otimes T)\rangle;$$

cette définition est cohérente, se ramenant à celle donnée par G. de Rham lorsque φ appartient à $\mathcal{D}_{X,Y}$; en effet, on a alors

$$\langle\mathcal{A}^{*-1}(\varphi), \mathcal{A}(S \otimes T)\rangle = \langle\mathcal{A}^*\mathcal{A}^{*-1}(\varphi), S \otimes T\rangle = \langle\varphi, S \otimes T\rangle$$

en vertu de propriétés rappelées en 1; indiquons deux propriétés de $\langle\varphi, S \otimes T\rangle$.

Propriété 2. 4. — *Si le support* $\sigma(S \otimes T)$ *possède un voisinage fermé* E *tel que* $E \cap \sigma(\varphi)$ *soit compact, alors on a*

$$\langle\varphi, S \otimes T\rangle = \langle\langle\varphi, S\rangle, T\rangle = \langle\langle\varphi, T\rangle, S\rangle.$$

Soit λ une fonction indéfiniment différentiable dans $X \times Y$, égale à 1 au voisinage de $\sigma(S \otimes T)$, nulle à l'extérieur de E; alors on a

$$\langle\varphi, S \otimes T\rangle = \langle\lambda\varphi, S \otimes T\rangle;$$

$\langle\varphi, S\rangle$ et $\langle\lambda\varphi, S\rangle$ sont égaux au voisinage de $\sigma(T)$, donc on a

$$\langle\langle\varphi, S\rangle, T\rangle = \langle\langle\lambda\varphi, S\rangle, T\rangle$$

et de même

$$\langle\langle\varphi, T\rangle, S\rangle = \langle\langle\lambda\varphi, T\rangle, S\rangle;$$

comme $\lambda\varphi$ est à support compact, on a

$$\langle\lambda\varphi, S \otimes T\rangle = \langle\langle\lambda\varphi, S\rangle, T\rangle = \langle\langle\lambda\varphi, T\rangle, S\rangle$$

et on obtient la relation annoncée.

Propriété 2. 5. — *Si* φ *est une forme différentielle, appartenant à* $\mathcal{E}_{X,Y}$, *telle que* $\sigma(\varphi) \cap \sigma(S \otimes T)$ *soit compact, on a*

$$\langle d_X\varphi, S \otimes T\rangle = \langle\varphi, bS \otimes T\rangle$$

et

$$\langle d_Y\varphi, S \otimes T\rangle = \langle\varphi, S \otimes bT\rangle.$$

En effet, soit λ une fonction, égale à 1 au voisinage de $\sigma(\varphi) \cap \sigma(S \otimes T)$, et appartenant à $\mathcal{D}_{X,Y}$; on a alors

$$\begin{aligned}\langle d_X\varphi, S \otimes T\rangle &= \langle \lambda d_X\varphi, S \otimes T\rangle = \langle d_X(\lambda\varphi), S \otimes T\rangle \\ &= \langle\langle d_X(\lambda\varphi), S\rangle, T\rangle = \langle\langle \lambda\varphi, bS\rangle, T\rangle \\ &= \langle \lambda\varphi, bS \otimes T\rangle = \langle \varphi, bS \otimes T\rangle;\end{aligned}$$

la seconde relation se démontre de manière analogue.

Introduisons maintenant quelques intégrales qui seront utilisées dans la suite de ce chapitre.

Définition. — *Si* T *est un courant dans* $X \times Y$, *tel que* $\sigma(T) \cap (X \times K)$ *soit compact pour tout compact* K *de* Y, *nous définissons l'intégrale*

$$\int_X T$$

par la relation

$$\int_X T = \int_X \mathcal{A}^{-1}(T).$$

Propriété 2. 6. — *Sous les hypothèses que l'on vient d'indiquer, on a la relation*

$$\int T = Q_{X \times Y}(T).$$

En effet, cette relation équivaut à l'égalité, établie par G. de Rham ([16], p. 62) :

$$\int_X \mathcal{A}^{-1}(T) = Q_{X \times Y}(T).$$

Si T est un courant appartenant à $\mathcal{D}'_{X \times Y}$, et γ une forme différentielle appartenant à $\mathcal{E}_{X \times Y}$, tels que

$$\sigma(T) \cap \sigma(\gamma) \cap (X \times K)$$

soit compact pour tout compact K de Y, alors l'intégrale

$$\int_X T \wedge \gamma$$

est définie par ce qui précède. Plus généralement, soient U et V deux courants dans $X \times Y$, tels que $\mathcal{A}^{-1}(U)$ (resp. $\mathcal{A}^{-1}(V)$) soit une forme différentielle dans Y (resp. X), à coefficients dans $\mathcal{D}'_X$ (resp. $\mathcal{D}'_Y$), et que $\sigma(U) \cap \sigma(V) \cap (X \times K)$ soit compact

pour tout compact K de Y; alors le produit $U \wedge V$ est défini, et l'intégrale

$$\int_X U \wedge V$$

est définie par ce qui précède; considérons le cas où $U = S \overline{\otimes} 1_Y$ S appartenant à $\mathcal{D}'_X$.

Propriété 2. 7. — *Soient* S *un courant homogène de degré* p *dans* X, *et* V *un courant homogène de degré* q *dans* X × Y, *tels que* $\mathcal{A}^{-1}(V)$ *soit une forme différentielle dans* X, *à coefficients dans* $\mathcal{D}'_Y$, *et que* $(\sigma(S) \times K) \cap \sigma(V)$ *soit compact pour tout compact* K *de* Y. *Alors on a la relation*

$$\left\langle \varphi, \int_X (S \overline{\otimes} 1_Y) \wedge V \right\rangle = (-1)^{pq} \langle S \overline{\otimes} \varphi, V \rangle$$

pour toute forme différentielle $\varphi \in \mathcal{D}_Y$.

La définition de l'intégrale résulte de ce qui précède; alors on a

$$\begin{aligned}\left\langle \varphi, \int_X (S \overline{\otimes} 1_Y) \wedge V \right\rangle &= \left\langle \varphi, \int_X \mathcal{A}^{-1}((S \overline{\otimes} 1_Y) \wedge V) \right\rangle \\ &= \langle 1_X \otimes \varphi, \mathcal{A}^{-1}((S \overline{\otimes} 1_Y) \wedge V) \rangle \\ &= \langle 1_X \otimes \varphi, (-1)^{pq} \mathcal{A}^{-1}(V \wedge (S \overline{\otimes} 1_Y)) \rangle.\end{aligned}$$

Compte-tenu des relations (i) et (iii) de 1, on obtient alors pour cette expression :

$$\begin{aligned}&(-1)^{pq} \langle 1_X \otimes \varphi, \mathcal{A}^{-1}(V) \wedge \mathcal{A}^{-1}(S \overline{\otimes} 1_Y) \rangle \\ &\qquad = (-1)^{pq} \langle 1_X \otimes \varphi, \mathcal{A}^{-1}(V) \wedge (S \otimes 1_Y) \rangle \\ &\qquad = (-1)^{pq} \langle (1_X \otimes \varphi) \wedge (S \otimes 1_Y), \mathcal{A}^{-1}(V) \rangle \\ &\qquad = (-1)^{pq} \langle S \otimes \varphi, \mathcal{A}^{-1}(V) \rangle \\ &\qquad = (-1)^{pq} \langle \mathcal{A}^{*-1}(S \otimes \varphi), V \rangle \\ &\qquad = (-1)^{pq} \langle S \overline{\otimes} \varphi, V \rangle.\end{aligned}$$

Convention. — Sous les hypothèses de la propriété 2. 7, nous définirons le symbole $\langle V, S \rangle$ par la relation

$$\langle V, S \rangle = \int_X (S \overline{\otimes} 1_Y) \wedge V.$$

3. Généralités sur la convolution de première espèce.

Nous définirons une première notion de convolution pour les courants, généralisant une expression, indiquée par L. Schwartz ([17], tome II, p. 12), du produit de convolution des distributions. Dans l'énoncé des propriétés de la convolu-

tion, interviendront des courants particuliers que nous allons définir. Soit X une variété, de dimension m; pour tout point $x \in X$, la relation

$$\langle \varphi, \delta_x \rangle = \varphi(x)$$

pour toute fonction continue φ dans X, définit un courant δ_x, homogène de degré m, ayant le point x pour support. Plus généralement, si v est un élément de l'algèbre extérieure de l'espace des vecteurs tangents à X en x, la relation

$$\langle \varphi, \delta_v \rangle = \langle v, \varphi(x) \rangle$$

pour toute forme différentielle $\varphi \in \mathcal{E}_X$ définit un courant δ_v; dans cette relation, $\varphi(x)$ désigne la valeur au point x de la forme différentielle φ, i.e. un élément de l'algèbre extérieure duale de la précédente, et la dualité exprimée au second membre est celle qui existe entre ces deux algèbres; si v est un p-vecteur, δ_v est un courant homogène de dimension p, ayant pour support le point x. Enfin, si v est un vecteur tangent à X en x, la relation

$$\langle \varphi, \delta^{(v)} \rangle = \langle \varphi, v \rangle$$

pour toute fonction différentiable φ dans X, définit un courant $\delta^{(v)}$, homogène de degré m, ayant le point x pour support; dans cette relation, $\langle \varphi, v \rangle$ désigne la valeur prise, sur le germe de fonction déterminé en x par φ, par la forme linéaire que définit le vecteur v [2].

Jusqu'à la fin du chapitre I, X, Y, Z seront des variétés, de dimensions respectives m, n, l; f, une application (indéfiniment différentiable, conformément à la convention faite au début du chapitre) de $X \times Y$ dans Z; pour tout $x \in X$ (resp. $y \in Y$), f_x (resp. f_y) l'application de Y (resp. X) dans Z définie par $f_x(y) = f(x, y)$ (resp. $f_y(x) = f(x, y)$); g, l'application de $X \times Y$ dans $X \times Z$, définie par $g(x, y) = (x, f(x, y))$; on a donc

$$P_{X \times Z} \circ g = P_{X \times Y} \qquad \text{et} \qquad Q_{X \times Z} \circ g = f.$$

On désignera par $\mathcal{D}'_X \times_f \mathcal{D}'_Y$ la partie de $\mathcal{D}'_X \times \mathcal{D}'_Y$ constituée par les couples (S, T) tels que $\sigma(S \otimes T) \cap f^{-1}(K)$ soit compact pour tout compact K de Z.

[2] $\delta^{(v)}$ est donc la dérivée de δ_x relativement au vecteur v.

Définition. — *On appellera convolution de première espèce associée à f, l'application de* $\mathcal{D}'_X \times_f \mathcal{D}'_Y$ *dans* $\mathcal{D}'_Z$, *définie par*

$$(S, T) \to S \ast_f T = f(S \,\overline{\otimes}\, T).$$

L'indice f sera supprimé lorsqu'aucune confusion ne sera à craindre.

Propriété 3. 1. — *Si* S *et* T *sont homogènes de dimensions respectives p et q,* $S \ast_f T$ *est un courant homogène de dimension* $p + q$.

Propriété 3. 2. — *Si x est un point de* X, *et si* $\sigma(T) \cap f_x^{-1}(K)$ *est compact pour tout compact* K *de* Z, *alors on a*

$$\delta_x \ast_f T = f_x(T).$$

En vertu de la définition de la convolution, on a en effet

$$\delta_x \ast T = f(\delta_x \,\overline{\otimes}\, T) = f(\mathcal{A}(\delta_x \otimes T));$$

il en résulte, pour toute forme différentielle $\varphi \in \mathcal{D}_Z$,

$$\begin{aligned}\langle \varphi, \delta_x \ast T \rangle &= \langle \mathcal{A}^* f^*(\varphi), \delta_x \otimes T\rangle = \langle\langle \mathcal{A}^* f^*(\varphi), \delta_x\rangle, T\rangle \\ &= \langle f_x^*(\varphi), T\rangle = \langle \varphi, f_x(T)\rangle.\end{aligned}$$

Propriété 3. 3. — *Si* v *est un vecteur tangent au point* x_0 *de* X, *et si* $\sigma(T) \cap f_{x_0}^{-1}(K)$ *est compact pour tout compact* K *de* Z, *alors on a*

$$\delta^{(v)} \ast_f T = \langle f_x(T), v\rangle$$

où le second membre désigne la valeur prise par la forme linéaire que définit le vecteur v, *sur la fonction* $f_x(T)$, *définie dans* X *au voisinage de* x_0, *et à valeurs dans* $\mathcal{D}'_Z$.

Tout crochet dans lequel v opère conservant la signification qui vient d'être indiquée, et tout autre crochet exprimant la dualité entre formes différentielles et courants, on a, pour toute forme $\varphi \in \mathcal{D}_Z$,

$$\begin{aligned}\langle \varphi, \delta^{(v)} \ast T\rangle &= \langle\langle \mathcal{A}^* f^*(\varphi), T\rangle, v\rangle = \langle\langle f_x^*(\varphi), T\rangle, v\rangle \\ &= \langle\langle \varphi, f_x(T)\rangle, v\rangle = \langle \varphi, \langle f_x(T), v\rangle\rangle, \quad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

Propriété 3. 4. — *Si* $\sigma(S \otimes T) \cap f^{-1}(K)$ *est compact pour tout compact* K *de* Z, *on a*

$$b(S \ast T) = bS \ast \varpi T + S \ast bT$$

et

$$d(S \ast T) = (-1)^{m+n+l}(dS \ast T + \varpi S \ast dT);$$

si, en particulier, S *et* T *sont des courants homogènes de dimensions respectives* p *et* q *vérifiant* $p + q = l + 1$, *on a*

$$bS \ast wT = - S \ast bT \qquad \textit{et} \qquad dS \ast T = - wS \ast dT.$$

En effet, compte-tenu de la relation $bf = fb$ et de la première relation de la propriété 2. 1, on a

$$\begin{aligned} b(S \ast T) &= bf(S \,\overline{\otimes}\, T) = fb(S \,\overline{\otimes}\, T) \\ &= f(bS \,\overline{\otimes}\, wT + S \,\overline{\otimes}\, bT) = bS \ast wT + S \ast bT; \end{aligned}$$

la seconde relation se déduit de la première à l'aide de la relation $d = wb$; la fin de la proposition résulte de ce que, si $p + q = l + 1$, $S \ast T$ est nul, ayant une dimension plus grande que l.

Remarque. — Sous la forme

$$b(S \ast T) - S \ast bT = bS \ast wT,$$

la première relation ci-dessus généralise la formule d'homotopie pour les courants ([16], relation (3), p. 68).

Propriété 3. 5. — *La convolution de première espèce est une opération bilinéaire; si* S, S′ *sont des courants dans* X *et* T *un courant dans* Y, *tels que* $\sigma(S \otimes T) \cap f^{-1}(K)$ *et* $\sigma(S' \otimes T) \cap f^{-1}(K)$ *soient compacts pour tout compact* K *de* Z, *alors, pour tous nombres complexes* λ *et* λ', *on a*

$$(\lambda S + \lambda' S') \ast T = \lambda(S \ast T) + \lambda'(S' \ast T).$$

Les hypothèses entraînent l'existence de $S \ast T$ et de $S' \ast T$; de plus on a

$$\sigma((\lambda S + \lambda' S') \otimes T) \subset (\sigma(S) \cup \sigma(S')) \times \sigma(T) = \sigma(S \otimes T) \cup \sigma(S' \otimes T);$$

il en résulte que $\sigma((\lambda S + \lambda' S') \otimes T) \cap f^{-1}(K)$ est compact pour tout compact K de Z, et que $(\lambda S + \lambda' S') \ast T$ est défini; la propriété est alors immédiate.

Propriété 3. 6. — *La convolution de première espèce est continue au sens suivant : si* S_i (*resp.* T_i) *tend vers* S (*resp.* T) *dans* $\mathfrak{D}'_X$ (*resp.* $\mathfrak{D}'_Y$), *les supports de* S_i (*resp.* T_i) *et de* S (*resp.* T) *étant contenus dans un ensemble fermé* A (*resp.* B) *de* X (*resp.* Y), *de telle sorte que* $(A \times B) \cap f^{-1}(K)$ *soit compact pour tout compact* K *de* Z, *alors* $S_i \ast T_i$ *tend vers* $S \ast T$ *dans* $\mathfrak{D}'_Z$.

Cette propriété résulte immédiatement du lemme suivant :

Lemme 3. 1. — *Soit h une application d'une variété* X *dans une variété* Y; *si des courants* T_i *convergent vers* T *dans* $\mathfrak{D}'_X$, *les supports de* T_i *et de* T *étant contenus dans un ensemble fermé* E *tel que* $E \cap h^{-1}(K)$ *soit compact pour tout compact* K *de* Y, *alors* $h(T_i)$ *converge vers* $h(T)$ *dans* $\mathfrak{D}'_Y$.

Pour démontrer ce lemme, considérons une partie bornée B de $\mathfrak{D}_Y$; c'est un ensemble de formes différentielles dont les supports sont contenus dans un compact K; soit V un voisinage compact, dans X, du compact $E \cap h^{-1}(K)$; soit λ une fonction indéfiniment différentiable dans X, égale à 1 au voisinage de $E \cap h^{-1}(K)$, nulle à l'extérieur de V; soit $\tilde{h}(B)$ l'ensemble des formes $\tilde{h}(\varphi) = \lambda . h^*(\varphi)$ lorsque φ décrit B; $\tilde{h}(B)$ est borné dans $\mathfrak{D}_X$; les hypothèses entraînent l'existence des images $h(T_i)$, et l'on a

$$\langle \varphi, h(T_i) \rangle = \langle h^*(\varphi), T_i \rangle = \langle \tilde{h}(\varphi), T_i \rangle$$

pour $\varphi \in B$; si T_i converge vers T dans $\mathfrak{D}'_X$, $\langle \tilde{h}(\varphi), T_i \rangle$ tend vers $\langle \tilde{h}(\varphi), T \rangle$ uniformément sur $\tilde{h}(B)$; donc $\langle \varphi, h(T_i) \rangle$ tend vers $\langle \varphi, h(T) \rangle$ uniformément sur B, et $h(T_i)$ converge vers $h(T)$ dans $\mathfrak{D}'_Y$, q.e.d.

Les énoncés suivants fourniront des *expressions intégrales de la convolution de première espèce*, utilisant les intégrales utilisées à la fin de 2.

Proposition 3. 1. — *Si* $\sigma(S \otimes T) \cap f^{-1}(K)$ *est compact pour tout compact* K *de* Z, $S \divideontimes_f T$ *et* $S \divideontimes_g T$ *sont définis; si, de plus, l'ensemble*

$$\bigcup_{x \in \sigma(S)} \{x\} \times (K \cap f_x(\sigma(T)))$$

est compact dans $X \times Z$ *pour tout compact* K *de* Z (*ce qui est réalisé en particulier si* $\sigma(S)$ *est compact*), *alors on a*

$$S \divideontimes_f T = \int_X S \divideontimes_g T.$$

On sait que la première hypothèse de compacité assure la définition de $S \divideontimes_f T$; pour que $S \divideontimes_g T$ soit défini, il suffit que $\sigma(S \otimes T) \cap g^{-1}(K)$ soit compact pour tout compact K de $X \times Z$; or, si A et B désignent les projections de ce compact

K dans X et Z respectivement, A et B sont compacts et vérifient $K \subset A \times B$; donc a on $g^{-1}(K) \subset (A \times Y) \cap f^{-1}(B)$ et

$$\sigma(S \otimes T) \cap g^{-1}(K) \subset (\sigma(S) \times \sigma(T)) \cap (A \times Y) \cap f^{-1}(B) = ((A \cap \sigma(S)) \times \sigma(T)) \cap f^{-1}(B);$$

l'hypothèse faite assure la compacité de cet ensemble quels que soient A et B compacts dans X et Z respectivement, donc aussi la définition de $S \ast_g T$.

Alors on a

$$\sigma(S \ast_g T) = \sigma(g(S \overline{\otimes} T)) \subset g(\sigma(S) \times \sigma(T)) = \bigcup_{x \in \sigma(S)} \{x\} \times f_x(\sigma(T))$$

et, pour tout compact K de Z,

$$\sigma(S \ast_g T) \cap (X \times K) \subset \bigcup_{x \in \sigma(S)} \{x\} \times (K \cap f_x(\sigma(T))) \subset \sigma(S) \times K;$$

en vertu de la seconde hypothèse de compacité, l'image $Q_{X \times Z}(S \ast_g T)$ de $S \ast_g T$ par la projection $Q_{X \times Z}$ de $X \times Z$ sur Z est définie, et, compte-tenu de la définition d'intégrales à la fin de 2, on a

$$S \ast_f T = f(S \overline{\otimes} T) = Q_{X \times Z}(g(S \overline{\otimes} T)) = Q_{X \times Z}(S \ast_g T) = \int_X S \ast_g T.$$

Théorème 3. 1. — *Si* $(A \times \sigma(T)) \cap f^{-1}(B)$ *est compact pour tous compacts* A *et* B *de* X *et* Z *respectivement,* $1_X \ast_g T$ *et* $S \ast_g T$ *sont définis, et l'on a*

$$S \ast_g T = (w^{n+l} S \overline{\otimes} 1_Z) \wedge (1_X \ast_g T).$$

Si, de plus, $(\sigma(S) \times \sigma(T)) \cap f^{-1}(B)$ *et* $\bigcup_{x \in \sigma(S)} \{x\} \times (B \cap f_x(\sigma(T)))$ *sont compacts pour tout compact* B *de* Z *(ce qui est réalisé, en particulier, si* $\sigma(S)$ *est compact), alors* $S \ast_f T$ *est défini, et l'on a*

$$S \ast_f T = \int_X (w^{n+l} S \overline{\otimes} 1_Z) \wedge (1_X \ast_g T) = \langle 1_X \ast_g T, w^{n+l} S \rangle.$$

On a vu, au cours de la démonstration de la proposition 3. 1, que $S \ast_g T$ est défini si $((A \cap \sigma(S)) \times \sigma(T)) \cap f^{-1}(B)$ est compact pour tous compacts A et B de X et Z respectivement; donc la première hypothèse de compacité assure la définition de $1_X \ast_g T$ et de $S \ast_g T$. Supposons d'abord $S = i_X(\alpha)$, α étant une forme différentielle qui appartient à $\mathcal{E}_X$; alors nous avons

$$i_X(\alpha) \overline{\otimes} T = (\alpha \wedge 1_X) \overline{\otimes} (1_Y \wedge T) = (\alpha \overline{\otimes} 1_Y) \wedge (1_X \overline{\otimes} T)$$

d'après la propriété 2. 2; or la propriété 2. 3 entraîne

$$\alpha \overline{\otimes} 1_Y = P^*_{X\times Y}(\alpha) = g^*(P^*_{X\times Z}(\alpha)) = g^*(\alpha \overline{\otimes} 1_Z);$$

nous avons donc

$$i_X(\alpha) \overline{\otimes} T = g^*(\alpha \overline{\otimes} 1_Z) \wedge (1_X \overline{\otimes} T)$$

et, en vertu du lemme 3. 2 qui sera établi ci-dessous,

$$g(i_X(\alpha) \overline{\otimes} T) = (\wp^{n+l}(\alpha \overline{\otimes} 1_Z)) \wedge g(1_X \overline{\otimes} T).$$

Soit maintenant α_i une suite de formes différentielles, appartenant à $\mathcal{E}_X$, telles que $i_X(\alpha_i)$ converge vers S dans $\mathcal{D}'_X$; les supports des courants $S \overline{\otimes} T$ et $i_X(\alpha_i) \overline{\otimes} T$ sont contenus dans $X \times \sigma(T)$ et la première hypothèse de compacité entraîne que $(X \times \sigma(T)) \cap g^{-1}(K)$ est compact pour tout compact K de $X \times Z$; alors $(\wp^{n+l}(\alpha_i \overline{\otimes} 1_Z)) \wedge g(1_X \overline{\otimes} T)$ converge vers $(\wp^{n+l}(S \overline{\otimes} 1_Z)) \wedge g(1_X \overline{\otimes} T)$ dans $\mathcal{D}'_Z$, et, en vertu du lemme 3. 1, $g(i_X(\alpha_i) \overline{\otimes} T)$ converge vers $g(S \overline{\otimes} T)$ dans $\mathcal{D}'_Z$. On a donc

$$g(S \overline{\otimes} T) = (\wp^{n+l}(S \overline{\otimes} 1_Z)) \wedge g(1_X \overline{\otimes} T)$$

soit

$$S \ast_g T = (\wp^{n+l} S \overline{\otimes} 1_Z) \wedge (1_X \ast_g T).$$

La seconde hypothèse de compacité entraîne la définition de $S \ast_f T$, et la seconde relation à démontrer résulte immédiatement de la première relation (qui vient d'être établie), de la proposition 3. 1 et de la propriété 2. 7, compte-tenu de la seconde hypothèse de compacité.

Lemme 3. 2. — *Soit h une application d'une variété X dans une variété Y; si α est une forme différentielle appartenant à $\mathcal{E}_Y$, et si T est un courant dans X tel que $\sigma(T) \cap h^{-1}(K)$ soit compact pour tout compact K de Y, on a*

$$g(T \wedge g^*(\alpha)) = g(T) \wedge \alpha,$$

ou encore

$$g(g^*(\alpha) \wedge T) = (\wp^{m+n}\alpha) \wedge g(T),$$

m et n étant les dimensions respectives de X et de Y.

En effet, pour toute forme $\varphi \in \mathcal{D}_Y$, on a

$$\begin{aligned}\langle \varphi, g(T \wedge g^*(\alpha))\rangle &= \langle g^*(\varphi), T \wedge g^*(\alpha)\rangle = \langle g^*(\alpha) \wedge g^*(\varphi), T\rangle \\ &= \langle g^*(\alpha \wedge \varphi), T\rangle = \langle \alpha \wedge \varphi, g(T)\rangle \\ &= \langle \varphi, g(T) \wedge \alpha\rangle;\end{aligned}$$

la seconde relation se déduit immédiatement de la première.

Corollaire 3. 1. — *Sous les hypothèses de la seconde partie du théorème* 3. 1, *si* S *et* T *sont des courants homogènes, de dimensions respectives p et q, on a, pour toute forme différentielle* $\varphi \in \mathfrak{D}_Z$,

$$\langle \varphi, S \ast_f T\rangle = (-1)^{(m-p)(n-q)}\langle S \,\overline{\otimes}\, \varphi, 1_X \ast_g T\rangle.$$

En effet, on déduit immédiatement, des propriétés 3. 8 et 2. 7,

$$\begin{aligned}\langle \varphi, S \ast_f T\rangle &= \Big\langle \varphi, \int_X (-1)^{(n+l)(m-p)}(S \,\overline{\otimes}\, 1_Z) \wedge (1_X \ast_g T)\Big\rangle \\ &= (-1)^{(m-p)(n-q)}\langle S \,\overline{\otimes}\, \varphi, 1_X \ast_g T\rangle.\end{aligned}$$

4. Généralités sur la convolution de seconde espèce.

Un certain nombre de propriétés du produit de convolution des distributions n'ont pas été rencontrées au cours de l'étude de la convolution de première espèce des courants; en particulier, la forme linéaire définie par le courant $S \ast_f T$ n'a pu être explicitée de façon simple par le corollaire 3. 1; il est donc nécessaire de définir une *convolution de seconde espèce*, qui vérifiera les propriétés du produit de convolution des distributions, non satisfaites par la convolution de première espèce; notre définition sera posée formellement, à seule fin de permettre la démonstration de ces propriétés. Dans le chapitre II, nous montrerons que les conditions, permettant de poser cette définition, se réalisent de manière naturelle dans l'espace euclidien où l'on obtient alors une notion de convolution liée à la structure de groupe additif de cet espace; cette convolution sera étudiée en détails dans le chapitre II, où nous verrons qu'elle jouit de propriétés tout à fait naturelles.

Convention. — Si φ est une forme différentielle dans Z, l'image réciproque $f_x^*(\varphi)$ (resp. $f_y^*(\varphi)$) de φ par l'application f_x (resp. f_y) de Y (resp. X) dans Z, sera considérée comme une forme double dans X × Y, à savoir une fonction dans X (resp. Y) à valeurs dans l'espace des formes différentielles dans Y (resp. X).

Hypothèse. — *On suppose donnée sur* X × Y *une forme double, de degré* $m + n + l$, $\alpha = \sum_s \overset{s}{\alpha}$, *où* $\overset{s}{\alpha}$ *est homogène de degré s en* X, *telle que:*

i. $d_X\alpha = d_Y\alpha = 0$,

ii. *Si* φ *est une forme quelconque, de degré* p, *dans* Z, *on a la relation*

$$f_y^*(\varphi) \wedge \overset{s}{\alpha} = (-1)^{p(s+p)} f_x^*(\varphi) \wedge \overset{s+p}{\alpha}.$$

Définition. — *Alors, pour tout couple d'entiers* (r, s) *vérifiant la relation*

$$p + r + s = m + n + l,$$

on définit la forme double $\overset{r,s}{\varphi}$ *dans* $X \times Y$, *par la relation*

$$\overset{r,s}{\varphi} = f_y^*(\varphi) \wedge \overset{s}{\alpha} = (-1)^{p(s+p)} f_x^*(\varphi) \wedge \overset{s+p}{\alpha}.$$

Propriété 4. 1. — *On a alors :*

$$\overset{r-1,s}{d\varphi} = d_X \overset{r,s}{\varphi} = (-1)^{s+p+1} d_Y \overset{r-1,s+1}{\varphi}.$$

En effet, on a

$$\overset{r-1,s}{d\varphi} = f_y^*(d\varphi) \wedge \overset{s}{\alpha} = d_X f_y^*(\varphi) \wedge \overset{s}{\alpha} = d_X\big(f_y^*(\varphi) \wedge \overset{s}{\alpha}\big) = d_X \overset{r,s}{\varphi}$$

et

$$\begin{aligned}\overset{r-1,s}{d\varphi} &= (-1)^{(p+1)(s+p+1)} f_x^*(d\varphi) \wedge \overset{s+p+1}{\alpha} \\ &= (-1)^{(p+1)(s+p+1)} d_Y f_x^*(\varphi) \wedge \overset{s+p+1}{\alpha} \\ &= (-1)^{(p+1)(s+p+1)} d_Y \big(f_x^*(\varphi) \wedge \overset{s+p+1}{\alpha}\big) \\ &= (-1)^{s+p+1} d_Y \overset{r-1,s+1}{\varphi}.\end{aligned}$$

Définition. — *On appellera convolution de seconde espèce, associée au couple* (f, α), *l'application de* $\mathfrak{D}'_X \times_f \mathfrak{D}'_Y$ *dans* $\mathfrak{D}'_Z$,

$$(S, T) \to S \,\hat{\divideontimes}_{f,\alpha}\, T,$$

définie par la relation

$$\langle \varphi, S \,\hat{\divideontimes}_{f,\alpha}\, T\rangle = (-1)^{(m-p)q} \Big\langle \overset{n-l+p,\,m-l+q}{\varphi}, S \otimes T \Big\rangle$$

lorsque φ *est une forme différentielle appartenant à* $\mathfrak{D}_Z$, S *et* T *des courants homogènes de degrés respectifs* p *et* q.

Les indices f et α seront supprimés lorsqu'aucune confusion ne sera à craindre.

Propriété 4. 2. — *Si* S *et* T *sont homogènes de degrés respectifs* p *et* q, $S \,\hat{\divideontimes}\, T$ *est homogène de degré* $p + q$.

Propriété 4. 3. — *Si* $\sigma(S \otimes T) \cap f^{-1}(K)$ *est compact pour tout compact* K *de* Z, *on a*

$$b(S \mathbin{\widehat{\divideontimes}} T) = bS \mathbin{\widehat{\divideontimes}} \varpi T = S \mathbin{\widehat{\divideontimes}} bT$$

et

$$d(S \mathbin{\widehat{\divideontimes}} T) = dS \mathbin{\widehat{\divideontimes}} T = \varpi S \mathbin{\widehat{\divideontimes}} dT.$$

En effet, si S et T sont des courants homogènes de degrés respectifs p et q, on a, compte-tenu de la définition de $S \mathbin{\widehat{\divideontimes}} T$, de celle de l'opérateur b, de la propriété 4. 1 et de la propriété 2. 5,

$$\begin{aligned}\langle \varphi, b(S \mathbin{\widehat{\divideontimes}} T)\rangle &= (-1)^{(m-p)q} \langle d\varphi, S \mathbin{\widehat{\divideontimes}} T\rangle \\ &= (-1)^{(m-p)q}\Big\langle \overset{n-l+p,\, m-l+q}{d\varphi}, S \otimes T\Big\rangle \\ &= (-1)^{(m-p)q}\Big\langle d_X \overset{n-l+p+1,\, m-l+q}{\varphi}, S \otimes T\Big\rangle \\ &= (-1)^{(m-p)q}\Big\langle \overset{n-l+p+1,\, m-l+q}{\varphi}, bS \otimes T\Big\rangle \\ &= (-1)^{q}\langle \varphi, bS \mathbin{\widehat{\divideontimes}} T\rangle\end{aligned}$$

pour toute forme $\varphi \in \mathfrak{D}_Z$. De même on a

$$\begin{aligned}\langle \varphi, b(S \mathbin{\widehat{\divideontimes}} T) &= (-1)^{q(m-p)}\Big\langle \overset{n-l+p,\, m-l+q}{d\varphi}, S \otimes T\Big\rangle \\ &= (-1)^{(m-p)(q+1)}\Big\langle d_Y \overset{n-l+p,\, m-l+q+1}{\varphi}, S \otimes T\Big\rangle \\ &= (-1)^{(m-p)(q+1)}\Big\langle \overset{n-l+p,\, m-l+q+1}{\varphi}, S \otimes bT\Big\rangle \\ &= \langle \varphi, S \mathbin{\widehat{\divideontimes}} bT\rangle.\end{aligned}$$

pour toute forme $\varphi \in \mathfrak{D}_Z$. Des relations obtenues, les deux autres se déduisent à l'aide de l'égalité $d = \varpi b$.

Théorème 4. 1. — *Si* S *et* T *sont des courants homogènes de degrés respectifs* p *et* q, *et si* $\sigma(S \otimes T)$ *possède un voisinage fermé* E *tel que* $E \cap f^{-1}(K)$ *soit compact pour tout compact* K *de* Z, *on a*

$$\begin{aligned}\langle \varphi, S \mathbin{\widehat{\divideontimes}} T\rangle &= (-1)^{(l-p)(m+l)+q}\Big\langle\Big\langle \varphi, f_y\Big(S \wedge \overset{m-l+q}{\alpha}\Big)\Big\rangle, T\Big\rangle \\ &= (-1)^{(l-p)(m+n-l)}\Big\langle\Big\langle \varphi, f_x\Big(\overset{m-p}{\alpha} \wedge T\Big)\Big\rangle, S\Big\rangle\end{aligned}$$

pour toute forme différentielle $\varphi \in \mathfrak{D}_Z$. *Si, de plus, l'ensemble*

$$\bigcup_{y \in \sigma(T)} \{y\} \times (K \cap f_y(\sigma(S)) \qquad \Big(\text{resp.} \bigcup_{x \in \sigma(S)} \{x\} \times (K \cap f_x(\sigma(T)))\Big)$$

est compact pour tout compact K *de* Z, *on a*

$$S \mathbin{\widehat{\divideontimes}} T = (-1)^{(l-p)(m+l)+q}\Big\langle f_y\Big(S \wedge \overset{m-l+q}{\alpha}\Big), T\Big\rangle$$

$$\Big(\textit{resp.}\ S \mathbin{\widehat{\divideontimes}} T = (-1)^{(l-p)(m+n-l)}\Big\langle f_x\Big(\overset{m-p}{\alpha} \wedge T\Big), S\Big\rangle\Big).$$

Remarque. — Avant d'aborder la démonstration de ces formules, précisons la signification des termes qu'elles contiennent; par exemple, celle du terme

$$\left\langle f_y\left(S \wedge \overset{m-l+q}{\alpha}\right),\ T\right\rangle;$$

S étant un courant dans X, $S \wedge \overset{m-l+q}{\alpha}$ désigne le courant double $(S \otimes 1_Y) \wedge \overset{m-l+q}{\alpha}$ dans $X \times Y$; c'est donc une forme différentielle dans Y, à coefficients dans $\mathfrak{D}'_X$; par suite $f_y\left(S \wedge \overset{m-l+q}{\alpha}\right)$ est une forme différentielle dans Y, à coefficients dans $\mathfrak{D}'_Z$, définie au voisinage de $\sigma(T)$, et $\left\langle f_y\left(S \wedge \overset{m-l+q}{\alpha}\right),\ T\right\rangle$ est un courant dans Z, compte tenu de la propriété 2. 7 et de la convention qui lui fait suite; le terme $\left\langle f_x\left(\overset{m-p}{\alpha} \wedge T\right),\ S\right\rangle$ s'explicite de manière analogue.

Démonstration. — Pour toute forme différentielle $\varphi \in \mathfrak{D}_Z$, on a, compte-tenu des définitions de $S \mathbin{\hat{\divideontimes}} T$ et de $S \otimes T$,

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, S \mathbin{\hat{\divideontimes}} T\rangle &= (-1)^{q(m-p)}\left\langle \overset{n-l+p,\ m-l+q}{\varphi}, S \otimes T\right\rangle \\
&= (-1)^{q(m-p)}\left\langle f_y^*(\varphi) \wedge \overset{m-l+q}{\alpha}, S \otimes T\right\rangle \\
&= (-1)^{q(m-p)+(l-p-q)(m-l+q)}\left\langle \overset{m-l+q}{\alpha} \wedge f_y^*(\varphi), S \otimes T\right\rangle \\
&= (-1)^{(l-p)(m+l)+q}\left\langle\left\langle \overset{m-l+q}{\alpha} \wedge f_y^*(\varphi), S\right\rangle, T\right\rangle.
\end{aligned}$$

Or la définition de l'image d'un courant permet d'écrire

$$\left\langle \overset{m-l+q}{\alpha} \wedge f_y^*(\varphi), S\right\rangle = \left\langle f_y^*(\varphi), S \wedge \overset{m-l+q}{\alpha}\right\rangle = \left\langle \varphi, f_y\left(S \wedge \overset{m-l+q}{\alpha}\right)\right\rangle$$

quand y se trouve au voisinage de $\sigma(T)$; on en déduit

$$\langle \varphi, S \mathbin{\hat{\divideontimes}} T\rangle = (-1)^{(l-p)(m+l)+q}\left\langle\left\langle \varphi, f_y\left(S \wedge \overset{m-l+q}{\alpha}\right)\right\rangle, T\right\rangle.$$

Si

$$\bigcup_{y \in \sigma(T)} \{y\} \times \left(K \cap f_y(\sigma(S))\right)$$

est compact pour tout compact K de Z, alors

$$\left\langle f_y\left(S \wedge \overset{m-l+q}{\alpha}\right), T\right\rangle$$

est défini par la convention qui suit la propriété 2. 7, et l'on a

$$\langle \varphi, S \mathbin{\hat{\divideontimes}} T\rangle = (-1)^{(l-p)(m+l)+q}\left\langle \varphi, \left\langle f_y\left(S \wedge \overset{m-l+q}{\alpha}\right), T\right\rangle\right\rangle$$

soit

$$S \hat{\ast} T = \left\langle f_y\left(S \wedge \overset{m-l+q}{\alpha}\right), T\right\rangle.$$

De la même manière on a,

$$\begin{aligned}\langle \varphi, S \hat{\ast} T\rangle &= (-1)^{q(m-p)+(l-p-q)(m-p)}\left\langle f_x^*(\varphi) \wedge \overset{m-p}{\alpha}, S \otimes T\right\rangle \\ &= (-1)^{q(m-p)+(l-p-q)(m+n-l)}\left\langle \overset{m-p}{\alpha} \wedge f_x^*(\varphi), S \otimes T\right\rangle \\ &= (-1)^{q(m-p)+(l-p-q)(m+n-l)}\left\langle\left\langle \overset{m-p}{\alpha} \wedge f_x^*(\varphi), T\right\rangle, S\right\rangle,\end{aligned}$$

avec

$$\left\langle \overset{m-p}{\alpha} \wedge f_x^*(\varphi), T\right\rangle = \left\langle f_x^*(\varphi), T \wedge \overset{m-p}{\alpha}\right\rangle = \left\langle \varphi, f_x\left(T \wedge \overset{m-p}{\alpha}\right)\right\rangle$$

quand x est voisin de $\sigma(S)$. On en déduit

$$\begin{aligned}\langle \varphi, S \hat{\ast} T\rangle &= (-1)^{q(m-p)+(l-p-q)(m+n-l)}\left\langle\left\langle \varphi, f_x\left(T \wedge \overset{m-p}{\alpha}\right)\right\rangle, S\right\rangle \\ &= (-1)^{(l-p)(m+n-l)}\left\langle\left\langle \varphi, f_x\left(\overset{m-p}{\alpha} \wedge T\right)\right\rangle, S\right\rangle.\end{aligned}$$

Si

$$\bigcup_{x \in \sigma(S)} \{x\} \times (K \cap f_x(\sigma(T)))$$

est compact pour tout compact K de Z, on a

$$\langle \varphi, S \hat{\ast} T\rangle = (-1)^{(l-p)(m+n-l)}\left\langle \varphi, \left\langle f_x\left(\overset{m-p}{\alpha} \wedge T\right), S\right\rangle\right\rangle$$

soit

$$S \hat{\ast} T = (-1)^{(l-p)(m+n-l)}\left\langle f_x\left(\overset{m-p}{\alpha} \wedge T\right), S\right\rangle.$$

Ceci achève la démonstration du théorème 4. 1

CHAPITRE II

CONVOLUTION DES COURANTS DANS L'ESPACE EUCLIDIEN

5. Convolution et convolution adjointe pour les variétés riemaniennes.

Lorsque les convolutions de première et de seconde espèce sont définies de telle sorte que certaines relations existent entre elles, chacune d'elles s'enrichit de propriétés nouvelles. Nous introduirons maintenant, par hypothèse, de telles relations dans le cas où les variétés considérées sont munies de métriques riemaniennes, et nous démontrerons les propriétés qui en résultent; dans les paragraphes suivants, nous montrerons que les hypothèses de ce paragraphe se réalisent de façon naturelle dans le cas de l'espace euclidien, et nous étudierons spécialement la convolution dans l'espace euclidien. Rappelons d'abord quelques notions relatives aux *variétés riemaniennes*.

Une variété X, de dimension m, est dite *riemanienne* si elle est munie d'un tenseur covariant symétrique indéfiniment différentiable g_{ij} tel que la forme quadratique

$$ds^2 = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}} g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

soit partout définie positive; on adoptera toujours (sauf indication du contraire) la convention habituelle de sommation par rapport aux indices répétés, ainsi que les conventions relatives à la montée ou à la descente des indices; par exemple

$$g^{ik} g_{kj} = g^i_j, \quad a_{i_1 \ldots i_p} = g_{i_1 k_1} \ldots g_{i_p k_p} a^{k_1 \ldots k_p}, \quad a^{i_1 \ldots i_p} = g^{i_1 k_1} \ldots g^{i_p k_p} a_{k_1 \ldots k_p},$$
$$g_{i_1 \ldots i_p, j_1 \ldots j_p} = \det (g_{i_\mu j_\nu})_{\substack{1 \leq \mu \leq p, \\ 1 \leq \nu \leq p}} \quad g^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_p} = g^{i_1 k_1} \ldots g^{i_p k_p} g_{i_1 \ldots i_p, \; k_1 \ldots k_p},$$
$$e_{1 \ldots m} = \sqrt{g_{1 \ldots m, 1 \ldots m}}, \quad e_{i_1 \ldots i_m} = g^{1 \ldots m}_{i_1 \ldots i_m} \cdot e_{1 \ldots m}.$$

A la forme différentielle extérieure

$$\alpha = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \alpha_{i_1 \ldots i_p} \, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$$

on associe la *forme adjointe*

$$*\alpha = \sum_{j_1 < \cdots < j_{m-p}} (*\alpha)_{j_1 \ldots j_{m-p}} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{m-p}}$$

où $$(*\alpha)_{j_1 \ldots j_{m-p}} = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} e_{i_1 \ldots i_p j_1 \ldots j_{m-p}} \alpha^{i_1 \ldots i_p};$$

l'*adjoint* $*T$ d'un courant T est alors défini par la relation

$$\langle \varphi, *T \rangle = \langle \overline{w}(*\varphi), T \rangle \qquad \text{avec} \qquad \overline{w} = w^{m+1},$$

pour toute forme différentielle $\varphi \in \mathcal{D}_X$, de sorte que l'on a

$$*i_X(\alpha) = i_X(*\alpha)$$

pour toute forme différentielle localement sommable α; l'opération ainsi définie vérifie les *propriétés* suivantes :

(i) $** = \overline{w}$, $*\overline{w} = \overline{w}*$;

(ii) $w^* = *w*^{-1} = *^{-1}w*$, $w^** = *w$, $*w^* = w*$,

(iii) si α et β sont deux formes différentielles dans X, $\alpha \wedge *\beta$ et $\beta \wedge *\alpha$ ont la même composante homogène de degré m.

La notion d'adjoint permet de définir l'opérateur différentiel

$$\delta = *^{-1} d * w = \overline{w} * d * w$$

qui vérifie les relations

$$*\delta d = d\delta *, \qquad \delta d * = * d\delta.$$

Nous introduirons maintenant les hypothèses supplémentaires annoncées, relativement à la définition des convolutions de première et de seconde espèce.

Hypothèses. — *Nous supposerons que* X, Y, Z *sont des variétés riemannienes, et que les données f et* α, *qui permettent la définition des convolutions de première et de seconde espèce, sont telles que l'on ait les relations équivalentes :*

(iv) $$*(S \ast T) = (-1)^{p(n-q)} * S \,\overline{\ast}\, * T,$$

(v) $$*(S \,\overline{\ast}\, T) = (-1)^{q(m-p)} * S \ast * T$$

pour tous les courants S, T, *homogènes de dimensions respectives p et q, vérifiant* $(S, T) \in \mathcal{D}'_X \times_f \mathcal{D}'_Y$.

Ces hypothèses étant supposées réalisées, les convolutions de première et de seconde espèce seront appelées respectivement *convolution* et *convolution adjointe*. Nous démontrerons maintenant les propriétés suivantes, qui résultent des hypothèses ci-dessus.

a) *Propriétés de la convolution.*

Propriété 5. 1. — *Si* $\sigma(S \otimes T) \cap f^{-1}(K)$ *est compact pour tout compact* K *de* Z, *on a*

$$\partial(S \divideontimes T) = (-1)^{m+n+l}\partial S \divideontimes T = (-1)^{m+n+l}\varpi S \divideontimes \partial T$$

En effet, la relation (iv) inscrite dans les hypothèses ci-dessus s'écrit, si S et T sont homogènes de dimensions respectives p et q:

$$*\varpi(S \divideontimes T) = (-1)^{m+n+l+p(n-q)}(*\varpi S)\,\widehat{\divideontimes}\,(*\varpi T);$$

calculons la différentielle extérieure de chaque membre, en utilisant la seconde relation de la propriété 4. 2 :

$$\begin{aligned} d*\varpi(S \divideontimes T) &= (-1)^{m+n+l+p(n-q)}(d*\varpi S)\,\widehat{\divideontimes}\,(*\varpi T) \\ &= (-1)^{m+n+l+p(n-q)}(\varpi*\varpi S)\,\widehat{\divideontimes}\,(d*\varpi T); \end{aligned}$$

prenons alors l'inverse de l'adjoint de chaque membre, en tenant compte des définitions et propriétés précédemment rappelées; nous obtenons :

$$\begin{aligned} *^{-1}d*\varpi(S \divideontimes T) &= (-1)^{m+n+l+p(n-q)}*^{-1}((**^{-1}d*\varpi S)\,\widehat{\divideontimes}\,(*\varpi T)) \\ &= (-1)^{m+n+l+p(n-q)}*^{-1}((*\varpi^{*}\varpi S)\,\widehat{\divideontimes}\,(**^{-1}d*\varpi T)) \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \partial(S \divideontimes T) &= (-1)^{m+n+l+(p-1)(n-q)}*^{-1}((*\partial S)\,\widehat{\divideontimes}\,(*T)) \\ &= (-1)^{m+n+l+p(n-q+1)}*^{-1}((*\varpi S)\,\widehat{\divideontimes}\,(*\partial T)) \end{aligned}$$

soit enfin

$$\partial(S \divideontimes T) = (-1)^{m+n+l}\partial S \divideontimes T = (-1)^{m+n+l}\varpi S \divideontimes \partial T.$$

Propriété 5. 2. — *Si* x *est un point de* X, *et si* $\sigma(T) \cap f_x^{-1}(K)$ *est compact pour tout compact* K *de* Z, *on a*

$$\partial\delta_x \divideontimes T = (-1)^{m+n+l}\,\partial(\delta_x \divideontimes T) = (-1)^{m}\delta_x \divideontimes \partial T.$$

En effet, de la propriété 5. 1 résulte la relation

$$\partial\delta_x \divideontimes T = (-1)^{m+n+l}\,\partial(\delta_x \divideontimes T) = (-1)^{m}\delta_x \divideontimes \partial T;$$

la propriété 5. 2 résulte alors de la propriété 3. 2.

THÉORÈME 5. 1. — *Soient* S *et* T *des courants homogènes de dimensions respectives* p *et* q, $\sigma(S \otimes T)$ *possèdant un voisinage fermé* E *tel que* $E \cap f^{-1}(K)$ *soit compact pour tout compact* K *de* Z; *si*

$$\bigcup_{y \in \sigma(T)} \{y\} \times (K \cap f_y(\sigma(S)))$$

est compact pour tout compact K *de* Z, *on a*

$$*(S \ast T) = (-1)^{(l-p)(m+l)+q+p(n-q)} \left\langle f_y\left(*S \wedge \overset{m-l+q}{\alpha}\right), *T \right\rangle;$$

si

$$\bigcup_{x \in \sigma(S)} \{x\} \times (K \cap f_x(\sigma(T)))$$

est compact pour tout compact K *de* Z, *on a*

$$*(S \ast T) = (-1)^{(l-p)(m+n+l)+p(n-q)} \left\langle f_x\left(\overset{m-p}{\alpha} \wedge *T\right), *S \right\rangle.$$

Cette propriété résulte de la relation (iv) figurant dans les hypothèses, et du théorème 4. 1.

b) *Propriétés de la convolution adjointe.*

PROPRIÉTÉ 5. 3. — *Si* x *est un point de* X, *et si* $\sigma(T) \cap f_x^{-1}(K)$ *est compact pour tout compact* K *de* Z, *on a*

$$*\,\delta_x \hat{\ast} T = *^{-1} f_x(*T).$$

En effet, la relation (v) figurant dans les hypothèses et la propriété 3. 2 entraînent

$$*\,\delta_x \hat{\ast} T = *^{-1}(**\,\delta_x \ast *T) = *^{-1}(\delta_x \ast *T) = *^{-1} f_x(*T).$$

PROPRIÉTÉ 5. 4. — *Si* $\sigma(S \otimes T) \cap f^{-1}(K)$ *est compact pour tout compact* K *de* Z, *on a*

$$\partial(S \hat{\ast} T) = (-1)^{m+l}\, \partial S \hat{\ast} T + (-1)^{n+l}\, \varpi S \hat{\ast} \partial T;$$

si, en particulier, S *et* T *sont des courants homogènes, de degrés respectifs* p *et* q, *vérifiant* $p + q = l + 1$, *on a*

$$\partial S \hat{\ast} T = (-1)^{m+n+1}\, \varpi S \hat{\ast} \partial T.$$

En effet, si S et T sont homogènes de dimensions respectives p et q, la relation (v) s'écrit

$$*\,\varpi(S \hat{\ast} T) = (-1)^{q(m-p)}(*\,\varpi S) \ast (*\,\varpi T).$$

Calculons la différentielle extérieure de chaque membre, en utilisant la seconde relation de la propriété 3. 4 :

$$
\begin{aligned}
d * \varpi(\mathrm{S} \mathbin{\hat{\divideontimes}} \mathrm{T}) = (-1)^{m+n+l+q(m-p)}((d * \varpi\mathrm{S}) \divideontimes (* \varpi\mathrm{T})) \\
+ ((\varpi * \varpi\mathrm{S}) \divideontimes (d * \varpi\mathrm{T}));
\end{aligned}
$$

prenant alors l'inverse de l'adjoint de chaque membre, nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
*^{-1} d * \varpi(\mathrm{S} \mathbin{\hat{\divideontimes}} \mathrm{T}) = (-1)^{m+n+l+q(m-p)} (*^{-1}((**^{-1}\, d * \varpi\mathrm{S}) \divideontimes (* \varpi\mathrm{T})) \\
+ *^{-1}((* \varpi^{*}\varpi\mathrm{S}) \divideontimes (**^{-1}\, d * \varpi\mathrm{T})))
\end{aligned}
$$

soit

$$
\begin{aligned}
\partial(\mathrm{S} \mathbin{\hat{\divideontimes}} \mathrm{T}) = (-1)^{m+l+q(m-p-1)} *^{-1}((* \partial\mathrm{S}) \mathbin{\hat{\divideontimes}} \mathrm{T}) \\
+ (-1)^{n+l+(m-p)(q+1)} *^{-1}((* \varpi\mathrm{S}) \divideontimes (* \partial\mathrm{T}))
\end{aligned}
$$

soit enfin

$$\partial(\mathrm{S} \mathbin{\hat{\divideontimes}} \mathrm{T}) = (-1)^{m+l} \partial\mathrm{S} \mathbin{\hat{\divideontimes}} \mathrm{T} + (-1)^{n+l} \varpi\mathrm{S} \mathbin{\hat{\divideontimes}} \partial\mathrm{T}.$$

La seconde partie de la proposition se déduit de cette relation, car, sous les hypothèses indiquées, $\mathrm{S} \mathbin{\hat{\divideontimes}} \mathrm{T}$ est nul, ayant le degré $l + 1$.

PROPRIÉTÉ 5. 5. — *Si* $\sigma(\mathrm{T}) \cap f_x^{-1}(\mathrm{K})$ *est compact pour tout compact* K *de* Z, *on a*

$$(d * \delta_x) \mathbin{\hat{\divideontimes}} \mathrm{T} = d *^{-1} f_x(* \mathrm{T}) = *^{-1} f_x(* d\mathrm{T}).$$

En effet, la seconde relation de la propriété 4. 2 entraîne

$$(d * \delta_x) \mathbin{\hat{\divideontimes}} \mathrm{T} = d(* \delta_x \mathbin{\hat{\divideontimes}} \mathrm{T}) = * \delta_x \mathbin{\hat{\divideontimes}} d\mathrm{T};$$

la propriété 5. 5 résulte alors de la propriété 5. 3.

La suite du chapitre II sera consacrée à l'étude de la *convolution et* de la *convolution adjointe dans l'espace euclidien.*

6. Réalisation des hypothèses du paragraphe 5.

X, Y, Z seront désormais identiques à l'espace euclidien à m dimensions réelles R^m muni de la métrique euclidienne habituelle; l'application f, définie par

$$f(x, y) = x + y, \quad x \in \mathrm{X}, \quad y \in \mathrm{Y},$$

donne naissance à une convolution de première espèce; X, Y, Z seront munis de coordonnées cartésiennes

$$(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}, \quad (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}, \quad (z_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$$

bien déterminées, de telle sorte que l'expression

$$\overset{s}{\alpha}(x, y) = \varpi_X \mathcal{A}^*((m\,!)^{-1}\delta^{1\,\ldots\,m}_{i_1\,\ldots\,i_m}\, dx^{i_1} \ldots dx^{i_s}\, dy^{i_{s+1}} \ldots dy^{i_m})$$

définit une forme double sur X × Y; dans cette expression comme ultérieurement, δ muni d'indices désigne le symbole de Kronecker habituel, la convention de sommation sur les indices répétés est respectée sauf indication du contraire, et le signe du produit extérieur est omis dans les produits de différentielles; enfin, ultérieurement, les factorielles figurant multiplicativement dans les calculs seront omises; la forme α définie ci-dessus et l'application f déterminent une convolution de seconde espèce, en vertu de la proposition 6. 1 ci-dessous; de plus, en vertu du thèorème 6. 3, les hypothèses du paragraphe 5 sont réalisées; les convolutions $\ast_f$ et $\hat{\ast}_{f,\alpha}$ seront appelées respectivement (conformément aux conventions introduites au paragraphe 5) *convolution* et *convolution adjointe.* Au cours des calculs qui suivent, on manipulera explicitement des formes simples et des formes doubles sur le produit de deux variétés; on ne précisera pas toujours explicitement si une expression donnée représente une forme simple ou une forme double, la confusion étant rarement à craindre; toutefois, il faut toujours prendre garde aux différences entre les règles de calcul relatives à ces différentes espèces de formes. Le rôle essentiel des énoncés ci-dessous est évidemment de prouver que les hypothèses du paragraphe 5 sont réalisées; toutefois, le théorème 6. 1 constitue une propriété importante de la convolution dans l'espace euclidien.

Proposition 6. 1. — *Si φ est une forme différentielle, homogène de degré p, dans Z, on a*

$$f^*_y(\varphi) \wedge \overset{s}{\alpha} = (-1)^{s(s+p)} f^*_x(\varphi) \wedge \overset{s+p}{\alpha}.$$

Démonstration. — En posant

$$\varphi = \varphi_{i_1 \ldots i_p}(z)\, dz^{i_1} \ldots dz^{i_p},$$

on a

$$f^*_x(\varphi) = \varphi_{i_1 \ldots i_p}(x + y)\, dy^{i_1} \ldots dy^{i_p},$$
$$f^*_y(\varphi) = \varphi_{i_1 \ldots i_p}(x + y)\, dx^{i_1} \ldots dx^{i_p}$$

et

$$f^*_y(\varphi) \wedge \overset{s}{\alpha} = (-1)^s \varphi_{i_1 \ldots i_p}(x + y)\, dx^{i_1} \ldots dx^{i_p} \delta^{1\,\ldots\,m}_{j_1\,\ldots\,j_m}\, dx^{j_1} \ldots dx^{j_s} dy^{j_{s+1}} \ldots dy^{j_m}$$

soit, en explicitant les sommations :

$$(-1)^s \sum_{i_1\cdots i_p}\Big(\varphi_{i_1\ldots i_p}(x+y)\,dx^{i_1}\ldots dx^{i_p}\sum_{j_1\cdots j_m}\delta^{1\ldots m}_{j_1\ldots j_m}dx^{j_1}\ldots dx^{j_s}dy^{j_{s+1}}\ldots dy^{j_m}\Big).$$

Si les indices $i_1, \ldots, i_p$ sont fixés, tout terme non nul de la parenthèse provient d'un terme de la seconde somme, pour lequel les $i_1, \ldots, i_p$ figurent parmi les $j_{s+1}, \ldots, j_m$; en effectuant au besoin une permutation sur ces derniers indices, on peut supposer $i_1 = j_{s+1}, \ldots, i_p = j_{s+p}$; alors le terme considéré dans la parenthèse s'écrit

$$\varphi_{i_1\ldots i_p}(x+y)\,dx^{i_1}\ldots dx^{i_p}\sum_{j_1\cdots j_s j_{s+p+1}\cdots j_m}\delta^{1\ldots\ldots\ldots m}_{j_1\ldots j_s i_1\ldots i_p j_{s+p+1}\ldots j_m}$$

ou encore

$$dx^{j_1}\ldots dx^{j_s}dy^{i_1}\ldots dy^{i_p}dy^{j_{s+p+1}}\ldots dy^{j_m},$$

$$(-1)^{ps}\varphi_{i_1\ldots i_p}(x+y)\,dx^{i_1}\ldots dx^{i_p}dy^{i_1}\ldots dy^{i_p}$$
$$\wedge\sum_{i_{p+1}\cdots i_m}\delta^{1\ldots m}_{i_1\ldots i_m}dx^{i_{p+1}}\ldots dx^{i_{p+s}}dy^{i_{p+s+1}}\ldots dy^{i_m}.$$

On a donc

$$f_y^*(\varphi)\wedge\overset{s}{\alpha} = (-1)^{s(p+1)}\sum_{i_1\ldots i_p}\Big(\varphi_{i_1\ldots i_p}(x+y)\,dx^{i_1}\ldots dx^{i_p}dy^{i_1}\ldots dy^{i_p}$$
$$\wedge\sum_{i_{p+1}\ldots i_m}\delta^{1\ldots m}_{i_1\ldots i_m}dx^{i_{p+1}}\ldots dx^{i_{p+s}}dy^{i_{p+s+1}}\ldots dy^{i_m}\Big)$$

et, de même,

$$f_x^*(\varphi)\wedge\overset{s+p}{\alpha} = (-1)^{s+p}\varphi_{i_1\ldots i_p}(x+y)dy^{i_1}\ldots dy^{i_p}\delta^{1\ldots m}_{j_1\ldots j_m}dx^{j_1}\ldots dx^{j_{s+p}}dy^{j_{s+p+1}}\ldots dy^{j_m}$$
$$= (-1)^{s+p}\sum_{i_1\ldots i_p}\Big(\varphi_{i_1\ldots i_p}(x+y)\,dy^{i_1}\ldots dy^{i_p}$$
$$\wedge\sum_{j_1\ldots j_m}\delta^{1\ldots m}_{j_1\ldots j_m}dx^{j_1}\ldots dx^{j_{s+p}}dy^{j_{s+p+1}}\ldots dy^{j_m}\Big)$$
$$= (-1)^{s+p}\sum_{i_1\ldots i_p}\Big(\varphi_{i_1\ldots i_p}(x+y)\,dy^{i_1}\ldots dy^{i_p}\sum_{j_{p+1}\ldots j_m}\delta^{1\ldots\ldots\ldots m}_{i_1\ldots i_p j_{p+1}\ldots j_m}$$
$$dx^{i_1}\ldots dx^{i_p}\,dx^{j_{p+1}}\ldots dx^{j_{p+s}}\,dy^{j_{p+s+1}}\ldots dy^{j_m}\Big)$$
$$= (-1)^{s+p}\sum_{i_1\ldots i_p}\Big(\varphi_{i_1\ldots i_p}(x+y)\,dx^{i_1}\ldots dx^{i_p}\,dy^{i_1}\ldots dy^{i_p}$$
$$\wedge\sum_{i_{p+1}\ldots i_m}\delta^{1\ldots m}_{i_1\ldots i_m}dx^{i_{p+1}}\ldots dx^{i_{p+s}}\,dy^{i_{p+s+1}}\ldots dy^{i_m}\Big).$$

On en déduit la relation annoncée.

Proposition 6. 2. — *Si* T *est un courant dans* Y, *le courant* $1_X \ast_g T = g(1_X \otimes T)$ *est défini dans* $X \times Z$; *si* T *est homogène de dimension* q, soit

$$T = T_{j_1\ldots j_{m-q}}dy^{j_1}\ldots dy^{j_{m-q}},$$

alors la composante, de degré p en X, *de* $\mathcal{A}^{-1}g(1_X \overline{\otimes}\, T)$, *est égale à*

$$(-1)^{m+q(m-p)}(f_x(T_{j_1 \dots j_{m-q}}))\, dx^{j_1} \dots dx^{j_p}\, dz^{j_{p+1}} \dots dz^{j_{m-q}},$$

considérée comme forme différentielle dans X, *à valeurs dans* $\mathcal{D}'_Z$.

Démonstration. — Pour tous compacts A et B de X et Z respectivement, $(A \times Y) \cap f^{-1}(B)$ est compact, donc *a fortiori* $(A \times \sigma(T)) \cap f^{-1}(B)$ est compact, et $1_X \divideontimes_g T$ est défini en vertu du théorème 3. 1; si T est homogène de dimension q, soit φ une forme double appartenant à $\mathcal{D}_{X,Z}$, homogène, de degré total $m + q$, de degré $m - p$ en X :

$$\varphi = \varphi_{i_1 \dots i_{m-p} j_1 \dots j_{p+q}}(x, z)\, dx^{i_1} \dots dx^{i_{m-p}}\, dz^{j_1} \dots dz^{j_{p+q}}.$$

Compte-tenu de propriétés élémentaires des formes différentielles extérieures, et de la définition du produit tensoriel, on obtient

$$\begin{aligned}
&\langle \varphi, \mathcal{A}^{-1}g(1_X \overline{\otimes}\, T)\rangle = \langle g^*(\mathcal{A}^{*-1}\varphi), 1_X \overline{\otimes}\, T\rangle \\
&= \langle \varphi_{i_1 \dots i_{m-p} j_1 \dots j_{p+q}}(x, x+y)\, dx^{i_1} \dots dx^{i_{m-p}} \\
&\qquad\qquad \wedge (dx^{j_1} + dy^{j_1}) \dots (dx^{j_{p+q}} + dy^{j_{p+q}}),\ 1_X \overline{\otimes}\, T\rangle \\
&= \langle \varphi_{i_1 \dots i_{m-p} j_1 \dots j_{p+q}}(x, x+y)\, dx^{i_1} \dots dx^{i_{m-p}} \delta^{j_1 \dots\dots\dots j_{p+q}}_{r_1 \dots r_p s_1 \dots s_q}\, dx^{r_1} \dots dx^{r_p} \\
&\qquad\qquad \wedge dy^{s_1} \dots dy^{s_q},\ 1_X \overline{\otimes}\, T\rangle \\
&= (-1)^{m(m-q)}\langle\langle \varphi_{i_1 \dots i_{m-p} r_1 \dots r_p s_1 \dots s_q}(x, x+y)\, dy^{s_1} \dots dy^{s_q}, T\rangle, \\
&\qquad\qquad dx^{i_1} \dots dx^{i_{m-p}}\, dx^{r_1} \dots dx^{r_p}\rangle \\
&= (-1)^{m(m-q)}\langle\langle \varphi_{i_1 \dots i_{m-p} r_1 \dots r_p s_1 \dots s_q}(x, x+y)\, dy^{s_1} \dots dy^{s_q}, \\
&\qquad\qquad T_{k_1 \dots k_{m-q}}\, dy^{k_1} \dots dy^{k_{m-q}}\rangle,\ dx^{i_1} \dots dx^{i_{m-p}}\, dx^{r_1} \dots dx^{r_p}\rangle \\
&= (-1)^{m(m-q)}\langle\langle \varphi_{i_1 \dots i_{m-p} r_1 \dots r_p s_1 \dots s_q}(x, z)\, dz^{k_1} \dots dz^{k_{m-q}}\, dz^{s_1} \dots dz^{s_q}, \\
&\qquad\qquad f_x(T_{k_1 \dots k_{m-q}})\rangle,\ dx^{i_1} \dots dx^{i_{m-p}}\, dx^{r_1} \dots dx^{r_p}\rangle \\
&= (-1)^{m(m-q)}\langle \varphi_{i_1 \dots i_{m-p} r_1 \dots r_p s_1 \dots s_q}(x, z)\, dx^{i_1} \dots dx^{i_{m-p}}\, dx^{r_1} \dots dx^{r_p} \\
&\qquad\qquad \wedge dz^{k_1} \dots dz^{k_{m-q}}\, dz^{s_1} \dots dz^{s_q},\ f_x(T_{k_1 \dots k_{m-q}})\rangle.
\end{aligned}$$

Dans un terme non nul de la somme, aucun des indices $r_1, \dots, r_p$ ne figure parmi les $s_1, \dots, s_q$, donc tous figurent parmi les $k_1, \dots, k_{m-q}$, et, en effectuant au besoin une permutation de ces derniers, on peut supposer $k_1 = r_1, \dots, k_p = r_p$; alors on obtient la somme :

$$\begin{aligned}
&(-1)^{m(m-q)}\langle \varphi_{i_1 \dots i_{m-p} k_1 \dots k_p s_1 \dots s_q}(x, z)\, dx^{i_1} \dots dx^{i_{m-p}}\, dx^{r_1} \dots dx^{r_p} \\
&\qquad\qquad \wedge dz^{k_1} \dots dz^{k_{m-q}}\, dz^{s_1} \dots dz^{s_q},\ f_x(T_{r_1 \dots r_p k_{p+1} \dots k_{m-q}})\rangle \\
&= (-1)^{m+q(m-p)}\langle \varphi_{i_1 \dots i_{m-p} k_1 \dots k_p s_1 \dots s_q}(x, z)\, dx^{i_1} \dots dx^{i_{m-p}}\, dz^{k_1} \dots dz^{k_p} \\
&\quad \wedge dz^{s_1} \dots dz^{s_q},\ (f_x(T_{r_1 \dots r_p k_{p+1} \dots k_{m-q}}))\, dx^{r_1} \dots dx^{r_p}\, dz^{k_{p+1}} \dots dz^{k_{m-q}}\rangle \\
&= (-1)^{m+q(m-p)}\langle \varphi, (f_x(T_{j_1 \dots j_{m-q}}))\, dx^{j_1} \dots dx^{j_p}\, dz^{j_{p+1}} \dots dz^{j_{m-q}}\rangle.
\end{aligned}$$

La proposition est ainsi démontrée.

Théorème 6. 1. — *Si* S *et* T *sont des courants* (*dans* X *et* Y *respectivement*) *tels que* $(\sigma(S) \times \sigma(T)) \cap f^{-1}(K)$ *soit compact pour tout compact* K *de* Z, *alors* $S \ast_f T$ *est défini*; *si* T *est homogène de dimension* q, *soit*

$$T = T_{j_1 \dots j_{m-q}} dy^{j_1} \dots dy^{j_{m-q}},$$

et si S *est homogène de dimension* p, *on a*

$$S \ast_f T = (-1)^p \langle (f_x(T_{j_1 \dots j_{m-q}}))\, dx^{j_1} \dots dx^{j_p}\, dz^{j_{p+1}} \dots dz^{j_{m-q}}, S\rangle$$

Démonstration. — L'hypothèse relative aux supports assure la définition de $S \ast_f T$. Cette hypothèse exprime que l'ensemble $\bigcup_{x \in \sigma(S)} \{x\} \times (\sigma(T) \cap (K - x))$ est compact dans $X \times Y$ pour tout compact K de Y; elle entraîne la compacité de l'ensemble $\bigcup_{x \in \sigma(S)} \{x\} \times (K \cap (\sigma(T) + x))$ dans $X \times Y$ pour tout compact K de Y, et ceci équivaut à la seconde hypothèse du théorème 3. 1; en vertu de ce théorème, on a donc

$$\begin{aligned} S \ast_f T &= \int_X (S \bar{\otimes} 1_Z) \wedge g(1_X \bar{\otimes} T) = \int_X \mathcal{A}^{-1}((S \bar{\otimes} 1_Z) \wedge g(1_Z \bar{\otimes} T)) \\ &= (-1)^{(m-p)(m-p-q)} \int_X (S \otimes 1_Z) \wedge \mathcal{A}^{-1} g(1_X \bar{\otimes} T) \\ &= (-1)^{(m-p)(m-p-q)} \langle \mathcal{A}^{-1} g(1_X \bar{\otimes} T), S\rangle. \end{aligned}$$

Il suffit alors de tenir compte de la proposition 6. 2 pour démontrer le théorème.

Proposition 6. 3. — *Si* T *est un courant homogène de dimension* q *dans* Y, *soit*

$$T = T_{j_1 \dots j_{m-q}} dy^{j_1} \dots dy^{j_{m-q}},$$

alors l'adjointe, relativement à Z, *de la composante de* $\mathcal{A}^{-1} g(1_X \bar{\otimes} T)$ *de degré* p *en* X, *est égale à*

$$(-1)^{m-p+m(p+q)} \sum_{j_1 \dots j_p} dx^{j_1} \dots dx^{j_p}\, dz^{j_1} \dots dz^{j_p} f_x(* T).$$

Démonstration. — Compte-tenu de la proposition 6. 2, nous devons déterminer l'adjoint, relativement à Z, du courant double dans $X \times Z$

$$\omega = (-1)^{m+q(m-p)} (f_x(T_{j_1 \dots j_{m-q}}))\, dx^{j_1} \dots dx^{j_p}\, dz^{j_{p+1}} \dots dz^{j_{m-q}},$$

qui est une forme différentielle dans X, à coefficients dans $\mathfrak{D}'_Z$; posons

$$\omega = (-1)^{m+q(m-p)}\, dx^{j_1} \dots dx^{j_p} \omega_{j_1 \dots j_p}$$

avec $$\omega_{j_1 \dots j_p} = (f_x(\mathrm{T}_{j_1 \dots j_{m-q}}))\, dz^{j_{p+1}} \dots dz^{j_{m-q}}.$$

Dans la suite de cette démonstration, toutes les sommations seront explicitement indiquées. En vertu de la définition de l'adjoint, nous avons

$$\begin{aligned} * \omega_{j_1 \dots j_p} &= \sum_{j_{p+1} \cdots j_{m-q} k_1 \cdots k_{p+q}} \delta^{1 \dots\dots\dots\dots m}_{j_{p+1} \cdots j_{m-q} k_1 \dots k_{p+q}} (f_x \mathrm{T}_{j_1 \dots j_{m-q}})\, dz^{k_1} \dots dz^{k_{p+q}} \\ &= \sum_{j_{p+1} \cdots j_{m-q} k_1 \cdots k_{p+q}} \delta^{1 \dots\dots\dots\dots m}_{j_{p+1} \cdots j_{m-q} k_1 \dots k_{p+q}} (f_x(\delta^{1 \dots m}_{j_1 \cdots j_m}(* \mathrm{T})_{j_{m-q+1} \cdots j_m})) \\ &\qquad dz^{k_1} \dots dz^{k_{p+q}}. \end{aligned}$$

Tenant compte des relations

$$\delta^{1 \dots\dots\dots\dots m}_{j_{p+1} \cdots j_{m-q} k_1 \dots k_{p+q}} \delta^{1 \dots m}_{j_1 \cdots j_m} = \delta^{j_1 \dots\dots\dots\dots j_m}_{j_{p+1} \cdots j_{m-q} k_1 \dots k_{p+q}} = (-1)^{p(m-p-q)} \delta^{j_1 \cdots j_p j_{m-q+1} \cdots j_m}_{k_1 \dots\dots\dots\dots k_{p+q}},$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} * \omega_{j_1 \dots j_p} &= (-1)^{p(m-p-q)} \sum_{j_{p+1} \cdots j_{m-q}} f_x((* \mathrm{T})_{j_{m-q+1} \cdots j_m})\, dz^{j_1} \dots dz^{j_p} \\ &\qquad \wedge dz^{j_{m-q+1}} \dots dz^{j_m} \\ &= (-1)^{p(m-p-q)}\, dz^{j_1} \dots dz^{j_p} f_x(* \mathrm{T}) \end{aligned}$$

et $$*_z \omega = (-1)^{m-p+m(p+q)} \sum_{j_1 \cdots j_p} dx^{j_1} \dots dx^{j_p} dz^{j_1} \dots dz^{j_p} f_x(* \mathrm{T}).$$

THÉORÈME 6. 2. — *Si* S *et* T *sont des courants homogènes de dimensions respectives* p *et* q *dans* X *et* Y, *et si*

$$(\sigma(\mathrm{S}) \times \sigma(\mathrm{T})) \cap f^{-1}(\mathrm{K})$$

est compact pour tout compact K *de* Z, *on a*

$$* (\mathrm{S} \divideontimes \mathrm{T}) = (-1)^{pq+m} \left\langle \overset{m-p}{\alpha}(x, z) \wedge f_x(* \mathrm{T}),\ * \mathrm{S} \right\rangle.$$

Démonstration. — Selon le théorème 6. 1, on a

$$\mathrm{S} \divideontimes_f \mathrm{T} = (-1)^p \langle (f_x(\mathrm{T}_{j_1 \cdots j_{m-q}}))\, dx^{j_1} \dots dx^{j_p} dz^{j_{p+1}} \dots dz^{j_{m-q}}, \mathrm{S} \rangle$$

et, en vertu de la proposition 6. 3,

$$\begin{aligned} * (\mathrm{S} \divideontimes \mathrm{T}) &= (-1)^{p(m-q)} \left\langle \sum_{j_1 \dots j_p} dx^{j_1} \dots dx^{j_p} dz^{j_1} \dots dz^{j_p} f_x(* \mathrm{T}),\ \mathrm{S} \right\rangle \\ &= (-1)^{p(m-q)} \left\langle \sum_{j_1 \dots j_p} dx^{j_1} \dots dx^{j_p}\, dz^{j_1} \dots dz^{j_p} f_x(* \mathrm{T}), \right. \\ &\qquad \left. \sum_{i_1 \dots i_m} \delta^{1 \dots m}_{i_1 \cdots i_m} (* \mathrm{S})_{i_{m-p+1} \cdots i_m}\, dx^{i_1} \dots dx^{i_{m-p}} \right\rangle. \end{aligned}$$

Dans un terme non nul de cette expression, l'ensemble des indices $j_1, \ldots, j_p$ est identique à celui des indices $i_{m-p+1}, \ldots, i_m$; donc on obtient

$$*(S \ast_f T) = (-1)^{p(m-q)} \sum_{i_1 \ldots i_m} \langle \delta^{1 \ldots m}_{i_1 \ldots i_m} dx^{i_{m-p+1}} \ldots dx^{i_m} dz^{i_{m-p+1}} \ldots dz^{i_m} \wedge f_x(*T), \; (*S)_{i_{m-p+1} \ldots i_m} dx^{i_1} \ldots dx^{i_{m-p}} \rangle$$

$$= (-1)^{p(p+q)} \left\langle \sum_{i_1 \ldots i_m} \delta^{1 \ldots m}_{i_1 \ldots i_m} dx^{i_1} \ldots dx^{i_{m-p}} dz^{i_{m-p+1}} \ldots dz^{i_m} f_x(*T), *S \right\rangle$$

$$= (-1)^{pq+m} \langle \overset{m-p}{\alpha}(x, z) \wedge f_x(*T), *S \rangle.$$

THÉORÈME 6. 3. — *Si* S *et* T *sont des courants homogènes de dimensions respectives* p *et* q *dans* X *et* Y, *et si*

$$(\sigma(S) \times \sigma(T)) \cap f^{-1}(K)$$

est compact pour tout compact K *de* Z, *on a*

$$*(S \ast_f T) = (-1)^{p(m-q)} *S \,\hat{\ast}_{f,\alpha} *T.$$

Démonstration. — Selon le théorème 4. 1, on a

$$*S \,\hat{\ast}_{f,\alpha} *T = (-1)^{m(m-p)} \langle f_x(\overset{m-p}{\alpha}(x, y) \wedge *T), *S \rangle$$
$$= (-1)^{m(m-p)} \langle \overset{m-p}{\alpha}(x, z) \wedge f_x(*T), *S \rangle.$$

Compte-tenu du théorème 6. 2, on obtient la relation ci-dessus.

7. Expression de la convolution et de la convolution adjointe à l'aide des différentielles des coordonnées de l'espace euclidien.

THÉORÈME 7. 1. — *Soient* S *et* T *des courants homogènes de dimensions respectives* p *et* q *dans* X *et* Y, *tels que*

$$\sigma(S \otimes T) \cap f^{-1}(K)$$

soit compact pour tout compact K *de* Z :

$$S = S_{i_1 \ldots i_{m-p}} dx^{i_1} \ldots dx^{i_{m-q}}, \qquad T = T_{j_1 \ldots j_{m-q}} dy^{j_1} \ldots dy^{j_{m-q}};$$

alors on a

$$S \,\hat{\ast}\, T = (S_{i_1 \ldots i_{m-p}} \,\hat{\ast}\, T_{j_1 \ldots j_{m-q}}) \, dz^{i_1} \ldots dz^{i_{m-p}} dz^{j_1} \ldots dz^{j_{m-q}}$$

et

$$S \ast T = (-1)^{p(m-q)} \delta^{j_1 \ldots j_m}_{1 \ldots m} (S_{j_1 \ldots j_q k_{p+q+1} \ldots k_m} \,\hat{\ast}\, T_{j_{q+1} \ldots j_m}) \, dz^{k_{p+q+1}} \ldots dz^{k_m}.$$

Démonstration de la première relation. — En vertu de la définition de $S \bar{\ast} T$ dans le paragraphe 4, on a, pour toute forme φ appartenant à $\mathfrak{D}_Z$,

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, S \bar{\ast} T \rangle &= (-1)^{p(m-q)} \langle \overset{m-p,\, m-q}{\varphi}, S \otimes T \rangle \\
&= (-1)^{p(m-q)} \langle \overset{m-p,\, m-q}{\varphi}, (S_{i_1 \dots i_{m-p}} \otimes T_{j_1 \dots j_{m-q}})\, dx^{i_1} \dots dx^{i_{m-p}} \\
&\qquad \wedge dy^{j_1} \dots dy^{j_{m-q}} \rangle \\
&= (-1)^{p(m-q)} \langle dx^{i_1} \dots dx^{i_{m-p}}\, dy^{j_1} \dots dy^{j_{m-q}} \overset{m-p,\, m-q}{\varphi}, \\
&\qquad S_{i_1 \dots i_{m-p}} \otimes T_{j_1 \dots j_{m-q}} \rangle .
\end{aligned}$$

Or, compte-tenu de la définition de $\overset{m-p,\, m-q}{\varphi}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
& dx^{i_1} \dots dx^{i_{m-p}} dy^{j_1} \dots dy^{j_{m-q}} \overset{m-p,\, m-q}{\varphi} \\
&= (-1)^{m-q} dx^{i_1} \dots dx^{i_{m-p}}\, dy^{j_1} \dots dy^{j_{m-q}} \\
&\qquad \wedge f_y^*(\varphi)\, \delta^{1 \dots m}_{k_1 \dots k_m}\, dx^{k_1} \dots dx^{k_{m-q}} dy^{k_{m-q+1}} \dots dy^{k_m} \\
&= (-1)^{m-q} dx^{i_1} \dots dx^{i_{m-p}}\, dy^{j_1} \dots dy^{j_{m-q}} \\
&\qquad \wedge f_y^*(\varphi)\, \delta^{1 \dots m}_{j_1 \dots j_m}\, dx^{j_1} \dots dx^{j_{m-q}} dy^{j_{m-q+1}} \dots dy^{j_m} \\
&= (-1)^{p(m-q)} dx^{i_1} \dots dx^{i_{m-p}} dx^{j_1} \dots dx^{j_{m-q}} f_y^*(\varphi)\, dy^1 \dots dy^m \\
&= (-1)^{p(m-q)} f_y^*(dz^{i_1} \dots dz^{i_{m-p}} dz^{j_1} \dots dz^{j_{m-q}} \varphi)\, dy^1 \dots dy^m \\
&= (-1)^{p(m-q)} \overset{0,0}{\widehat{(dz^{i_1} \dots dz^{i_{m-p}} dz^{j_1} \dots dz^{j_{m-q}} \varphi)}} .
\end{aligned}$$

En substituant l'expression ainsi obtenue à

$$dx^{i_1} \dots dx^{i_{m-p}} dy^{j_1} \dots dy^{j_{m-q}} \overset{m-p,\, m-q}{\varphi}$$

dans l'expression de $\langle \varphi, S \bar{\ast} T \rangle$ au début de la démonstration, on obtient

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, S \bar{\ast} T \rangle &= \langle dz^{i_1} \dots dz^{i_{m-p}} dz^{j_1} \dots dz^{j_{m-q}} \varphi, S_{i_1 \dots i_{m-p}} \bar{\ast}\, T_{j_1 \dots j_{m-q}} \rangle \\
&= \langle \varphi, (S_{i_1 \dots i_{m-p}} \bar{\ast}\, T_{j_1 \dots j_{m-q}})\, dz^{i_1} \dots dz^{i_{m-p}} dz^{j_1} \dots dz^{j_{m-q}} \rangle .
\end{aligned}$$

Démonstration de la seconde relation. — On déduira la seconde relation de la précédente grâce à la relation (iv) de l'hypothèse du paragraphe 5; d'abord on a

$$*S = \sum_{i_1 \dots i_m} \delta^{1 \dots m}_{i_1 \dots i_m} S_{i_1 \dots i_{m-p}}\, dx^{i_{m-p+1}} \dots dx^{i_m}$$

et

$$*T = \sum_{j_1 \dots j_m} \delta^{1 \dots m}_{j_1 \dots j_m} T_{j_1 \dots j_{m-q}}\, dy^{j_{m-q+1}} \dots dy^{j_m} ;$$

donc, en vertu de la relation précédemment démontrée, on obtient

$$\ast S \hat{\ast} \ast T = \sum_{i_1 \ldots i_m j_1 \ldots j_m} \delta^{1 \ldots m}_{i_1 \ldots i_m} \delta^{1 \ldots m}_{j_1 \ldots j_m} (S_{i_1 \ldots i_{m-p}} \hat{\ast} T_{j_1 \ldots j_{m-q}}) \, dz^{i_{m-p+1}} \ldots dz^{i_m} \, dz^{j_{m-q+1}} \ldots dz^{j_m}$$

et

$$\begin{aligned} \ast(\ast S \hat{\ast} \ast T) &= \sum_{i_1 \ldots i_m j_1 \ldots j_m k_{p+q+1} \ldots k_m} \delta^{1 \ldots \ldots \ldots m}_{i_{m-p+1} \ldots i_m j_{m-q+1} \ldots j_m k_{p+q+1} \ldots k_m} \\ &\quad \times \delta^{1 \ldots m}_{i_1 \ldots i_m} \delta^{1 \ldots m}_{j_1 \ldots j_m} (S_{i_1 \ldots i_{m-p}} \hat{\ast} T_{j_1 \ldots j_{m-q}}) \, dz^{k_{p+q+1}} \ldots dz^{k_m} \\ &= (-1)^{p(m-p)} \sum_{j_1 \ldots j_m k_{p+q+1} \ldots k_m} \delta^{1 \ldots m}_{j_1 \ldots j_m} (S_{j_{m-q+1} \ldots j_m k_{p+q+1} \ldots k_m} \\ &\qquad \hat{\ast} T_{j_1 \ldots j_{m-q}}) \, dz^{k_{p+q+1}} \ldots dz^{k_m} \\ &= (-1)^{(m+1)(p+q)} \delta^{j_1 \ldots j_m}_{1 \ldots m} (S_{j_1 \ldots j_q k_{p+q+1} \ldots k_m} \hat{\ast} T_{j_{q+1} \ldots j_m}) \\ &\qquad dz^{k_{p+q+1}} \ldots dz^{k_m}. \end{aligned}$$

On obtient alors la relation annoncée en utilisant la relation (iv) de l'hypothèse du paragraphe 5.

8. L'algèbre de convolution et l'algèbre de convolution adjointe. Les hypothèses du paragraphe 6 déterminent en particulier des isomorphismes entre X, Y et Z, grâce auxquels la convolution et la convolution adjointe définissent, dans l'espace des courants dans R^m, deux lois de composition (non partout définies). La loi de composition, définie par

$$(S, T) \to (-1)^{p(m-q)} S \ast T = S \bar{\ast} T$$

lorsque S et T sont des courants homogènes de dimensions respectives p et q, sera appelée *produit de convolution*, et la loi de composition

$$(S, T) \to S \hat{\ast} T$$

produit de convolution adjoint; alors, compte-tenu des relations (iv) et (v) dans les hypothèses du paragraphe 5, on a

$$\text{(i)} \qquad \ast(S \hat{\ast} T) = \ast S \bar{\ast} \ast T$$

et

$$\text{(ii)} \qquad \ast(S \bar{\ast} T) = \ast S \hat{\ast} \ast T;$$

si S et T sont des courants homogènes et si la somme de leurs degrés diffère de m, l'un des deux produits de convolution

$S \mathbin{\overline{\ast}} T$ et $S \mathbin{\widehat{\ast}} T$ est nul; si S et T sont des courants homogènes et si la somme de leurs degrés égale m, on a la relation

$$\text{(iii)} \qquad (-1)^p S \ast T = S \mathbin{\overline{\ast}} T = \ast\, (S \mathbin{\widehat{\ast}} T),$$

p désignant le degré de S; en effet, cette relation résulte du théorème 7. 1. On appellera espace des distributions, l'espace des courants homogènes de degré zéro; cet espace est naturellement isomorphe à celui défini par L. Schwartz [17]; il est stable relativement au produit de convolution adjoint, qui correspond au produit de convolution des distributions, défini et étudié par L. Schwartz [17]. Pour simplifier les énoncés, on indiquera les propriétés du produit de convolution et du produit de convolution adjoint en les considérant comme définis sur l'espace des courants à supports compacts (car ils sont alors partout définis); sans adopter ces conventions, on obtiendrait des énoncés analogues à ceux de L. Schwartz ([17], chapitre VI, § 5).

a. Propriétés du produit de convolution adjoint.

Propriété 8. 1. — *Le produit de convolution adjoint est anticommutatif: si* S *et* T *sont des courants à supports compacts, homogènes de degrés respectifs* p *et* q*, on a*

$$S \mathbin{\widehat{\ast}} T = (-1)^{pq} T \mathbin{\widehat{\ast}} S.$$

Propriété 8. 2. — *Le produit de convolution adjoint est associatif: pour des courants à supports compacts, on a*

$$(S \mathbin{\widehat{\ast}} T) \mathbin{\widehat{\ast}} U = S \mathbin{\widehat{\ast}} (T \mathbin{\widehat{\ast}} U).$$

Ces deux propriétés se déduisent de la première relation du théorème 7. 1 et des propriétés analogues du produit de convolution des distributions, démontrées par L. Schwartz.

Propriété 8. 3. — *La translation est une opération de convolution adjointe: on a*

$$\ast\, \delta_x \mathbin{\widehat{\ast}} T = f_x(T)$$

et, en particulier

$$\ast\, \delta_0 \mathbin{\widehat{\ast}} T = T.$$

Cette propriété se déduit de la propriété 5. 3. Résumons les propriétés ci-dessus dans un théorème.

THÉORÈME 8. 1. — *L'addition et le produit de convolution adjoint des courants munissent l'espace des courants à support compact dans* R^m *d'une structure d'algèbre associative, graduée par le degré des courants, anticommutative, pour laquelle* $*\delta_0$ *est une unité.*

PRORPIÉTÉ 8. 4. — *La différentielle extérieure est une opération de convolution adjointe : on a*

$$(d*\delta_x)\mathbin{\hat{\bar{\ast}}}T = df_x(T) = f_x(dT)$$

et, en particulier,

$$(d*\delta_0)\mathbin{\hat{\bar{\ast}}}T \doteq dT.$$

Ceci résulte de la propriété 5. 5.

PROPRIÉTÉ 8. 5. — *Toute dérivation partielle est une opération de convolution adjointe : on a*

$$\frac{\partial * \delta_0}{\partial x^k}\mathbin{\hat{\bar{\ast}}}T = \frac{\partial T}{\partial x^k}.$$

Cette propriété résulte aisément de la première relation du théorème 7. 1 et de la propriété analogue pour les distributions.

b) *Propriétés du produit de convolution.*

PROPRIÉTÉ 8. 6. — *Le produit de convolution est anticommutatif : si* S *et* T *sont des courants à supports compacts, homogènes de dimensions respectives p et q, on a*

$$S\mathbin{\bar{\ast}}T = (-1)^{pq}T\mathbin{\bar{\ast}}S.$$

PROPRIÉTÉ 8. 7. — *Le produit de convolution est associatif : pour des courants à supports compacts, on a*

$$(S\mathbin{\bar{\ast}}T)\mathbin{\bar{\ast}}U \doteq S\mathbin{\bar{\ast}}(T\mathbin{\bar{\ast}}U).$$

Ces deux propriétés résultent des propriétés 8. 1 et 8. 2 et de la relation (ii) entre les deux produits.

PROPRIÉTÉ 8. 8. — *La translation est une opération de convolution : on a*

$$\delta_x\mathbin{\bar{\ast}}T \doteq f_x(T)$$

et en particulier

$$\delta_0\mathbin{\bar{\ast}}T = T.$$

Cela résulte de la propriété 3. 2.

THÉORÈME 8. 2. — *L'addition et le produit de convolution des courants munissent l'espace des courants à support compact dans* R^m *d'une structure d'algèbre associative, graduée par la dimension des courants, anticommutative, pour laquelle* δ_0 *est une unité.*

PROPRIÉTÉ 8. 9. — *La codifférentielle extérieure est une opération de convolution : si* T *est un courant homogène de dimension* q, *on a*

$$\partial\delta_x \,\overline{\ast}\, T = (-1)^q \partial f_x(T) = (-1)^q f_x(\partial T)$$

et, en particulier,

$$\partial\delta_0 \,\overline{\ast}\, T = (-1)^q \partial T.$$

Cela résulte des propriétés 5. 2 et 8. 8.

9. Expression intégrale du produit de convolution adjoint dans un cas particulier.

Devant utiliser des notions introduites par G. de Rham [16], nous les rappellerons d'abord. G. de Rham a montré que, dans toute variété X, on peut construire des opérateurs linéaires R et A, dépendant de paramètres positifs ε_1, ε_2, ... en nombre fini ou infini selon que X est compacte ou non, qui jouissent des propriétés suivantes :

(i) si T est un courant homogène de dimension p dans X, RT et AT sont des courants homogènes de dimensions p et $p+1$ respectivement, vérifiant

$$RT - T = b(AT) + A(bT);$$

(ii) les supports de RT et de AT sont contenus dans un voisinage quelconque donné du support de T pourvu que les paramètres ε_i soient assez petits;

(iii) pour tout courant T, il existe une forme différentielle ψ appartenant à $\mathcal{E}_X$, vérifiant $RT = i_X(\psi)$; si φ est une forme r fois différentiable, il existe une forme θ, r fois différentiable, telle que l'on ait $A(i_X(\varphi)) = i_X(\theta)$;

(iv) si φ varie dans un ensemble borné jusqu'à l'ordre q et si chaque ε_i varie en restant borné supérieurement, $R(i_X(\varphi))$ et $A(i_X(\varphi))$ restent dans un ensemble borné jusqu'à l'ordre q;

(v) si chaque paramètre ε_i tend vers zéro, $\langle\varphi, RT\rangle$ tend vers

$\langle \varphi, \mathrm{T} \rangle$ et $\langle \varphi, \mathrm{AT} \rangle$ tend vers zéro, uniformément sur tout ensemble borné de formes φ dans $\mathfrak{D}_{\mathrm{X}}$; si T est continu d'ordre q, la convergence est uniforme sur tout ensemble de formes qui est borné jusqu'à l'ordre $q+1$.

On appelle *régularisateur* tout opérateur R dépendant de paramètres positifs ε_i, auquel est associé un opérateur A, jouissant des propriétés (i) à (v) ci-dessus. Soient alors S et T deux courants dans X; si, quels que soient les régularisateurs R et R′, l'intégrale

$$\int \mathrm{RS} \wedge \mathrm{R'T}$$

tend vers une limite lorsque les paramètres de R et de R′ tendent vers zéro, on désigne cette limite par le symbole

$$\int_{\mathrm{X}} \mathrm{S} \wedge \mathrm{T}.$$

Les propriétés suivantes sont vérifiées :

(vi) si l'un des courants S et T a son support compact, et si l'on a de plus $\mathrm{T} = i_{\mathrm{X}}(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{E}_{\mathrm{X}}$, alors l'égalité

$$\int_{\mathrm{X}} \mathrm{S} \wedge i_{\mathrm{X}}(\varphi) = \int_{\mathrm{X}} \mathrm{S} < \varphi$$

a lieu, le premier membre ayant la signification indiquée ci-dessus, et le second membre la signification qui lui a été donnée au paragraphe 1.

(vii) si σ et τ sont deux chaînes, dont l'une au moins est finie, et dont aucune ne rencontre le bord de l'autre, l'intégrale

$$\int_{\mathrm{X}} j_{\mathrm{X}}(\sigma) \wedge j_{\mathrm{X}}(\tau)$$

est définie, et égale au nombre algébrique d'intersections de ces deux chaînes.

Nous utiliserons ces notions pour obtenir une expression intégrale du produit de convolution adjoint; pour tout point z de Z, nous désignerons par $\mathcal{C}_z$ l'application de X dans Y, telle que l'on ait $f(x, \mathcal{C}_z(x)) = z$, soit $\mathcal{C}_z(x) = z - x$; nous établirons le théorème suivant :

Théorème 9. 1. — *Si* S *et* T *sont des courants homogènes de degrés respectifs* p *et* q *dans* X *et* Y, *tels que* $\sigma(\mathrm{S} \otimes \mathrm{T}) \cap f^{-1}(\mathrm{K})$ *soit compact pour tout compact* K *de* Z, *on a la relation*

$$\mathrm{S} \,\bar{\ast}\, \mathrm{T} = (-1)^q \int_{\mathrm{Y}} \overset{m-p-q}{\alpha}(y, z) \wedge \mathcal{C}_z(\mathrm{S}) \wedge \mathrm{T}$$

chaque fois que l'intégrale possède un sens; en particulier, si l'on a $p+q=m$, la relation devient

$$S \ast T = \int \mathcal{C}_z(S) \wedge T.$$

Démonstration. — En vertu du théorème 4. 1, on a

$$S \,\hat{\ast}\, T = (-1)^{m(m-p)} \left\langle \overset{m-p}{\alpha}(x, z) \wedge f_x(T), S \right\rangle.$$

Transformons d'abord cette expression en supposant $T = i_Y(\psi)$, $\psi \in \mathcal{E}_Y$,

$$\psi = \psi_{j_1 \ldots j_q}(y)\, dy^{j_1} \ldots dy^{j_q};$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} S \,\hat{\ast}\, T &= (-1)^{(m+1)(m-p)} \langle \delta^{1 \ldots m}_{i_1 \ldots i_m} dx^{i_1} \ldots dx^{i_{m-p}} dz^{i_{m-p+1}} \ldots dz^{i_m} \\ &\qquad \wedge \psi_{j_1 \ldots j_q}(z-x)\, dz^{j_1} \ldots dz^{j_q}, S \rangle \\ &= (-1)^{(m+1)(m-p)} \delta^{1 \ldots m}_{i_1 \ldots i_m} \langle dx^{i_1} \ldots dx^{i_{m-p}} \psi_{j_1 \ldots j_q}(z-x), S \rangle \\ &\qquad dz^{i_{m-p+1}} \ldots dz^{i_m}\, dz^{j_1} \ldots dz^{j_q} \\ &= (-1)^{m(m-p)} \delta^{1 \ldots m}_{i_1 \ldots i_m} \langle \psi_{j_1 \ldots j_q}(y)\, dy^{i_1} \ldots dy^{i_{m-p}}, \mathcal{C}_z(S) \rangle \\ &\qquad dz^{i_{m-p+1}} \ldots dz^{i_m}\, dz^{j_1} \ldots dz^{j_q}. \end{aligned}$$

Or, pour un terme non nul de la somme, les indices $j_1, \ldots, j_q$ ne figurent pas parmi les indices $i_{m-p+1}, \ldots, i_m$, mais figurent parmi les $i_1, \ldots, i_{m-p}$, et on peut supposer $j_1 = i_1, \ldots, j_q = i_q$; alors on obtient :

$$\begin{aligned} S \,\hat{\ast}\, T &= (-1)^{m(m-p)} \delta^{1 \ldots m}_{i_1 \ldots i_m} \langle \psi_{j_1 \ldots j_q}(y)\, dy^{j_1} \ldots dy^{j_q} dy^{i_{q+1}} \ldots dy^{i_{m-p}}, \mathcal{C}_z(S) \rangle \\ &\qquad dz^{i_{m-p+1}} \ldots dz^{i_m}\, dz^{i_1} \ldots dz^{i_q} \\ &= (-1)^{p(m-q)+p+q} \left\langle \overset{m-p-q}{\alpha}(y, z) \wedge T, \mathcal{C}_z(S) \right\rangle \\ &= (-1)^{p(m-q)+p+q} \int_Y \mathcal{C}_z(S) \wedge \overset{m-p-q}{\alpha}(y, z) \wedge T \\ &= (-1)^q \int_Y \overset{m-p-q}{\alpha}(y, z) \wedge \mathcal{C}_z(S) \wedge T. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que T est un courant tel que cette intégrale possède un sens; soit α_i une suite de formes différentielles appartenant à $\mathcal{E}_Y$, telle que $i_Y(\alpha_i)$ converge vers T dans $\mathcal{D}'_Y$, et que $i_Y(\alpha_i)$ soit obtenu à partir de T à l'aide d'un régularisateur; nous avons alors

$$S \,\hat{\ast}\, i_Y(\alpha_i) = (-1)^q \int_Y \overset{m-p-q}{\alpha}(y, z) \wedge \mathcal{C}_z(S) \wedge i_Y(\alpha_i);$$

lorsque i tend vers $+\infty$, l'intégrale tend vers

$$\int_Y \overset{m-p-q}{\alpha}(y, z) \wedge \mathcal{C}_z(S) \wedge T,$$

et $S \hat{\ast} i_Y(\alpha_i)$ converge vers $S \hat{\ast} T$ dans $\mathcal{D}'_Z$ en vertu de la propriété 3. 6; la relation annoncée est donc démontrée.

Si l'on a $p + q = m$, cette relation s'écrit

$$S \hat{\ast} T = (-1)^q \left(\int_Y \mathcal{C}_z(S) \wedge T\right) dz^1 \dots dz^m;$$

compte-tenu de la relation (iii) du paragraphe 8, on obtient la relation :

$$S \ast T = \int_Y \mathcal{C}_z(S) \wedge T.$$

COROLLAIRE 9. 1. — *Si φ est une forme différentielle localement sommable, homogène de degré p dans* X, *et μ une chaîne localement finie, de dimension q dans* Y, *telles que $(\sigma(\varphi) \times \sigma(\mu)) \cap f^{-1}(K)$ soit compact pour tout compact* K *de* Z, *alors on a*

$$i_X(\varphi) \hat{\ast} j_Y(\mu) = (-1)^{(q+1)(m-q)} \int_\mu \overset{q-p}{\alpha}(y, z) \wedge \mathcal{C}_z(\varphi)$$

chaque fois que l'intégrale possède un sens; en particulier, si l'on a p = q, on obtient la relation

$$i_X(\varphi) \ast j_Y(\mu) = (-1)^{p(m-p)} \int_\mu \mathcal{C}_z(\varphi).$$

COROLLAIRE 9. 2. — *Si μ et ν sont des chaînes localement finies, dans* X *et* Y *respectivement, dont la somme des dimensions est égale à m, et telles que $\sigma(u \times \nu) \cap f^{-1}(K)$ soit compact pour tout compact* K *de* Z, *alors il existe une fonction φ, localement sommable, définie presque partout dans* Z, *telle que l'on ait*

$$i_X(\mu) \ast i_Y(\nu) = i_Z(\varphi);$$

en tout point z où φ est définie, $\varphi(z)$ est égal au nombre algébrique d'intersections des chaînes $\mathcal{C}_z(\mu)$ et ν.

Ceci résulte du théorème 9. 1, compte-tenu de la propriété (vii) rappelée au début de ce paragraphe.

Une généralisation du corollaire 9. 2 a été annoncée dans [10]; elle sera établie dans un travail ultérieur, où seront étudiées les relations entre la convolution des courants et certaines notions topologiques.

CHAPITRE III

HOMOLOGIE ASSOCIÉE A UNE FAMILLE DE DÉRIVATIONS. APPLICATION A L'ALGÈBRE DES FORMES DIFFÉRENTIELLES EXTÉRIEURES SUR UNE VARIÉTÉ

10. Énoncé du théorème fondamental (³).

Dans une *catégorie abélienne*, soit $(d_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une famille de morphismes tels que le produit $d_i.d_j$, défini quels que soient i et j, vérifie $d_i.d_i = 0$ pour tout i, et $d_i.d_j + d_j.d_i = 0$ pour $i \neq j$; soit $d = d_1.d_2 \ldots d_p$. Soient F l'unité commune, à gauche et à droite, des d_i; F^p le produit direct (naturellement isomorphe à la somme directe) de p objets identiques à F; p_i les projections canoniques de F^p sur F; $\delta = \sum_{1\leqslant i\leqslant p} d_i.p_i$ ($\sum$ désignant l'addition, dans le groupe abélien des morphismes de F^p dans F). Le couple (δ, d) constitue un complexe dont l'homologie sera appelée homologie de la famille $(d_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$; pour $p = 1$, on retrouve la définition habituelle de l'homologie d'un endomorphisme de carré nul. Notre but est d'indiquer une *condition suffisante* pour la *nullité de cette homologie*, en supposant F muni d'une graduation telle que (F, d_i) constitue un complexe (pour tout indice i), et d'une seconde graduation, liée à une décomposition de chaque d_i en une somme de morphismes; toutefois, comme nous l'avons indiqué dans l'introduction, nous n'énoncerons cette condition que pour une *réalisation particulière* de cette structure.

(³) Bien que le problème qui fait l'objet de ce chapitre soit d'abord posé dans le cadre d'une catégorie abélienne (définie par A. Grothendieck [1]), la connaissance des notions relatives aux catégories abéliennes n'est nullement indispensable pour la compréhension de ce chapitre.

Soient A un anneau commutatif avec élément unité; M, un A-module unitaire; n, un nombre entier positif; $A^n = \overset{n}{\oplus} A$, la somme directe de n exemplaires du A-module A; E, l'algèbre extérieure du A-module A^n, graduée par les sous-modules ${}^qE = \overset{q}{\wedge} E$ de q-vecteurs, $0 \leqslant q \leqslant n$; F, le produit tensoriel $M \otimes_A E$ de A-modules, gradué par les sous-modules ${}^qF = M \otimes {}^qE$. L'ensemble F, muni naturellement d'une structure de E-module à gauche (si $m \in M$ et $e \in E$, on a $m \otimes e \in F$; si $e' \in E$, on pose $e' \wedge (m \otimes e) = m \otimes (e' \wedge e)$), est un module gradué sur l'anneau gradué E.

Soit $(\omega_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une famille d'éléments de ${}^1E$; on lui associe la famille $(d_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ des applications de F en lui-même définies par

$$d_i(\alpha) = \omega_i \wedge \alpha;$$

d est alors l'application de F en lui-même, vérifiant

$$d(\alpha) = \omega \wedge \alpha, \qquad \omega = \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant p} \omega_i,$$

et applique en particulier ${}^qF$ dans ${}^{p+q}F$; δ est l'application de $\overset{p}{\oplus} F$ dans F vérifiant

$$\delta((\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} \omega_i \wedge \alpha,$$

et applique en particulier $\overset{p}{\oplus} {}^qF$ dans ${}^{q+1}F$; on a $d.\delta = 0$.

Pour tout nombre entier k vérifiant $0 \leqslant k \leqslant n$, définissons l'application φ_k de A^k dans A^n par la relation

$$\varphi_k(a_1, a_2, \ldots, a_k) = (a_1, \ldots, a_k, 0, \ldots, 0)$$

et posons $A^n_{(k)} = \varphi_k(A^k)$; l'algèbre extérieure $E_{(k)}$ de $A^n_{(k)}$ est alors un facteur direct de E. Soient $\omega_{i(k)}$ la projection de ω_i dans $E_{(k)}$; $d_{(k)}$ l'application de F en lui-même, vérifiant

$$d_{(k)}(\alpha) = \Big(\bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant p} \omega_{i(k)}\Big) \wedge \alpha;$$

$\delta_{(k)}$ l'application de $\overset{p}{\oplus} F$ dans F, vérifiant

$$\delta_{(k)}((\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} \omega_{i(k-1)} \wedge \alpha_i.$$

Définissons de même l'application φ^k de A^{n-k} dans A^n par la relation

$$\varphi^k(a_1, a_2, \ldots, a_{n-k}) = (0, \ldots, 0, a_1, \ldots, a_{n-k})$$

et posons

$$A^{n(k)} = \varphi^k(A^{n-k}), \quad E^{[k]} = E_{(k-1)} \wedge \left(\overset{n-k}{\wedge} A^{n(k)}\right), \quad E^{(k)} = \bigoplus_{1 \leqslant h \leqslant k} E^{[h]};$$

en particulier, nous aurons $E^{(n)} = E$; posons enfin

$$F^{[k]} = M \otimes E^{[k]}, \quad F^{(k)} = M \otimes E^{(k)}, \quad {}^qF^{[k]} = {}^qF \cap F^{[k]}, \quad {}^qF^{(k)} = {}^qF \cap F^{(k)}.$$

Alors $d_{(k)}$ applique en particulier ${}^{n-p}F^{(k)}$ dans ${}^nF$, et $\delta_{(k)}$ applique $\overset{p}{\oplus}{}^{n-p-1}F^{[k]}$ dans ${}^{n-p}F^{[k]}$. Avec ces notations, nous pouvons énoncer le théorème fondamental :

Théorème 10. 1. — *Pour que la suite*

$$\overset{p}{\oplus} F \xrightarrow[\delta]{} F \xrightarrow[d]{} F$$

soit exacte, il suffit que la suite

$$\overset{p}{\oplus}{}^{n-p-1}F^{[k]} \xrightarrow[\delta_{(k)}]{} {}^{n-p}F^{(k)} \xrightarrow[d_{(k)}]{} {}^nF$$

vérifie, pour tout entier k tel que $p \leqslant k \leqslant n$, la condition suivante: la projection, sur ${}^{n-p}F^{[k]}$, du noyau de $d_{(k)}$, est l'image de $\delta_{(k)}$.

Dans le cas $p = 1$, désignons par $(y_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ les composantes de ω; le théorème 10. 1 s'écrit alors sous la forme équivalente :

Si, pour tout nombre entier k vérifiant $0 \leqslant k < n$, et tout élément a de M, le fait que y_{k+1} a soit une combinaison linéaire de $y_1, \ldots, y_k$ à coefficients dans M entraîne que a est lui-même une telle combinaison, alors la relation $\omega \wedge \alpha = 0$, où $\alpha \in {}^qF$, $q < n$, entraîne la divisibilité de α par ω.

Ce cas particulier du théorème 10. 1 a été établi par G. de Rham [15].

La *démonstration* du théorème 10. 1 résultera de récurrences effectuées à partir de trois lemmes principaux, et utilisera des notations auxiliaires que nous introduirons tout d'abord. Si A et B sont deux propriétés, $A \cap B$ désignera le réalisation simultanée de ces propriétés; $A \Longrightarrow B$ signifiera : A entraîne B; enfin, nous définirons les propriétés suivantes :

Pour $p \leqslant k \leqslant n$, $P'(k)$ exprime que, dans la suite

$$\overset{p}{\oplus}\, {}^{n-p-1}F^{[k]} \xrightarrow[\delta_{(k)}]{} {}^{n-p}F^{(k)} \xrightarrow[d_{(k)}]{} {}^{n}F,$$

la projection, sur ${}^{n-p}F^{[k]}$, du noyau de $d_{(k)}$, est contenue dans l'image de $\delta_{(k)}$; on pose $P' = \bigcap_{p \leqslant k \leqslant n} P'(k)$.

Pour $p-1 \leqslant k \leqslant n$ et $0 < q \leqslant n-p$, ${}^{q}P^{(k)}$ et ${}^{q}P_{(k)}$ expriment respectivement que les suites

$$\overset{p}{\oplus}\, {}^{q-1}F^{(k)} \xrightarrow[\delta_{(k+1)}]{} {}^{q}F^{(k)} \xrightarrow[d_{(k)}]{} {}^{p+q}F$$

et

$$\overset{p}{\oplus}\, {}^{q-1}F_{(k)} \xrightarrow[\delta_{(k+1)}]{} {}^{q}F_{(k)} \xrightarrow[d_{(k)}]{} {}^{p+q}F$$

sont exactes; on pose

$${}^{q}P = {}^{q}P^{(n)} = {}^{q}P_{(n)} \qquad \text{et} \qquad P = \bigcap_{0<q\leqslant n-p} {}^{q}P.$$

Avec ces notations, le théorème 10. 1 s'écrit : $P' \Longrightarrow P$.

De la nullité de ${}^{n-p-1}F^{[p]}$, ${}^{n-p}F^{(p-1)}$ et ${}^{n-p-1}F^{(p)}$ résulte immédiatement :

LEMME 10. 1. — $P'(p) = {}^{n-p}P^{(p)}$.

11. Démonstration du théorème fondamental.

a) *Énoncé et démonstration des trois lemmes principaux.*

LEMME 11. 1. — *Pour $p \leqslant k < n$,*

$$P'(k+1) \cap {}^{n-p}P^{(k)} \Longrightarrow {}^{n-p}P^{(k+1)}.$$

LEMME 11. 2. — *Pour $p \leqslant k < n$ et $1 < q \leqslant n-p$,*

$${}^{q}P_{(k)} \cap {}^{q-1}P_{(k)} \Longrightarrow {}^{q}P_{(k+1)}.$$

LEMME 11. 3. — *Pour $p \leqslant k < n$,*

$$P'(p) \cap {}^{1}P_{(k)} \Longrightarrow {}^{1}P_{(k+1)}.$$

Avant de démontrer ces lemmes, notons que, définissant $\omega_{i[k+1]}$ par la relation

$$\omega_{i(k+1)} = \omega_{i(k)} + \omega_{i[k+1]},$$

nous aurons

$$\omega_{(k+1)} = \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant p} \omega_{i(k+1)} = \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant p} (\omega_{i(k)} + \omega_{i[k+1]}),$$

soit

$$(1)\qquad \omega_{(k+1)} = \omega_{(k)} + (p\,!)^{-1} \sum_{\substack{1 \leq r_1 \leq p \\ \cdots\cdots \\ 1 \leq r_p \leq p}} \delta^{r_1 \ldots r_p}_{1 \ldots p} \Big(\bigwedge_{1 \leq i < p} \omega_{r_i(k)} \Big) \wedge \omega_{r_p[k+1]}.$$

Démonstration du lemme 11. 1.

Soit $\alpha \in {}^{n-p}\mathrm{F}$, vérifiant $\omega_{(k+1)} \wedge \alpha^{(k+1)} = 0$. En vertu de la relation (1), on a :

$$\omega_{(k+1)} \wedge \alpha^{(k+1)} = \omega_{(k)} \wedge \alpha^{(k+1)} + (p\,!)^{-1} \sum_{\substack{1 \leq r_1 \leq p \\ \cdots\cdots \\ 1 \leq r_p \leq p}} \delta^{r_1 \ldots r_p}_{1 \ldots p} \Big(\bigwedge_{1 \leq i < p} \omega_{r_i(k)} \Big) \wedge \omega_{r_p[k+1]} \wedge \alpha^{(k+1)}.$$

Or, en vertu de l'hypothèse $\mathrm{P}'(k+1)$, il existe une famille

$$(\beta_i)_{1 \leq i \leq p} \subset {}^{n-p-1}\mathrm{F}$$

telle que l'on ait

$$\alpha^{(k+1)} = \alpha^{(k)} + \sum_{1 \leq i \leq p} \omega_{i(k)} \wedge \beta_i^{[k+1]}.$$

Comme $\omega_{r_p[k+1]} \wedge \alpha^{(k)} = 0$ en vertu de la définition des degrés, on a

$$\omega_{r_p[k+1]} \wedge \alpha^{(k+1)} = \sum_{1 \leq i \leq p} \omega_{r_p[k+1]} \wedge \omega_{i(k)} \wedge \beta_i^{[k+1]}$$

et

$$\omega_{(k+1)} \wedge \alpha^{(k+1)} = \omega_{(k)} \wedge \alpha^{(k)} - \omega_{(k)} \wedge \Big(\sum_{1 \leq i \leq p} \omega_{i[k+1]} \wedge \beta_i^{[k+1]} \Big)$$
$$= \omega_{(k)} \wedge \Big(\alpha^{(k)} - \sum_{1 \leq i \leq p} \omega_{i[k+1]} \wedge \beta_i^{[k+1]} \Big) = 0.$$

Comme l'expression entre parenthèses désigne un élément appartenant à ${}^{n-p}\mathrm{F}^{(k)}$, il existe, en vertu de l'hypothèse ${}^{n-p}\mathrm{P}^{(k)}$, une famille

$$(\gamma_i)_{1 \leq i \leq p} \subset {}^{n-p-1}\mathrm{F}^{(k)}$$

telle que l'on ait

$$\alpha^{(k)} - \sum_{1 \leq i \leq p} \omega_{i[k+1]} \wedge \beta_i^{[k+1]} = \sum_{1 \leq i \leq p} \omega_{i(k)} \wedge \beta_i^{(k)};$$

on en déduit

$$\alpha^{(k+1)} = \sum_{1 \leq i \leq p} \omega_{i[k+1]} \wedge \beta_i^{[k+1]} + \omega_{i(k)} \wedge \beta_i^{(k)} + \omega_{i(k)} \wedge \beta_i^{[k+1]}$$
$$= \sum_{1 \leq i \leq p} \omega_{i(k+1)} \wedge \beta_i^{[k+1]} + \omega_{i(k)} \wedge \gamma_i^{(k)}.$$

Comme $\omega_{i[k+1]} \wedge \gamma_i^{(k)} = 0$ en vertu de la définition des degrés, on a

$$\alpha^{(k+1)} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} \omega_{i(k+1)} \wedge (\beta_i^{[k+1]} + \gamma_i^{(k)}).$$

Comme l'expression entre parenthèses représente un élément appartenant à ${}^{n-p-1}F^{(k+1)}$, la propriété ${}^{n-p}P^{(k+1)}$ est vérifiée.

Partie commune à la démonstration des lemmes 11. 2 *et* 11. 3. Si on pose

$$\alpha_{(k+1)} = \alpha_{(k)} + \alpha_{[k+1]},$$

on obtient, compte-tenu de (1) et de $\omega_{r_p[k+1]} \wedge \alpha_{[k+1]} = 0$, la relation

$$\omega_{(k+1)} \wedge \alpha_{(k+1)} = \omega_{(k)} \wedge \alpha_{(k)} + \omega_{(k)} \wedge \alpha_{[k+1]} + (p\,!)^{-1} \sum_{\substack{1 \leqslant r_1 \leqslant p \\ \cdots\cdots\cdots \\ 1 \leqslant r_p \leqslant p}} \delta^{r_1 \ldots r_p}_{1 \ldots p} \Big(\bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant p} \omega_{r_i(k)} \Big) \wedge \omega_{r_p[k+1]} \wedge \alpha_{(k)}.$$

Si $\alpha \in {}^qF$, le terme $\omega_{(k)} \wedge \alpha_{(k)}$ appartient à ${}^{p+q}F_{(k)}$, et tous les termes qui suivent appartiennent à ${}^{p+q}F_{[k+1]}$; donc la relation

$$\omega_{(k+1)} \wedge \alpha_{(k+1)} = 0$$

entraîne

$$(2) \qquad \omega_{(k)} \wedge \alpha_{(k)} = 0$$

et

(3)

$$\omega_{(k)} \wedge \alpha_{[k+1]} + (p\,!)^{-1} \sum_{\substack{1 \leqslant r_1 \leqslant p \\ \cdots\cdots\cdots \\ 1 \leqslant r_p \leqslant p}} \delta^{r_1 \ldots r_p}_{1 \ldots p} \Big(\bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant p} \omega_{r_i(k)} \Big) \wedge \omega_{r_p[k+1]} \wedge \alpha_{(k)} = 0.$$

En vertu de l'hypothèse ${}^qP_{(k)}$ (pour le lemme 11. 3, $q = 1$), la relation (2) entraîne l'existence d'une famille

$$(\beta_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \subset {}^{q-1}F$$

telle que l'on ait

$$(4) \qquad \alpha_{(k)} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} \omega_{i(k)} \wedge \beta_{i(k)}.$$

Alors, compte-tenu de la relation (3), on obtient

$$\omega_{(k)} \wedge \alpha_{[k+1]} - \Big(\bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant p} \omega_{i(k)} \Big) \wedge \Big(\sum_{1 \leqslant i \leqslant p} \omega_{i[k+1]} \wedge \beta_{i(k)} \Big) = 0,$$

soit

$$(5) \qquad \omega_{(k)} \wedge \left(\alpha_{[k+1]} - \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} \omega_{i[k+1]} \wedge \beta_{i(k)}\right) = 0.$$

Or on peut écrire

$$\alpha_{[k+1]} - \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} \omega_{i[k+1]} \wedge \beta_{i(k)} = \chi \wedge \gamma_{(k)}$$

avec $\gamma \in {}^{q-1}\mathrm{F}$, de telle sorte que la relation (5) entraîne

$$(6) \qquad \omega_{(k)} \wedge \gamma_{(k)} = 0.$$

Fin de la démonstration du lemme 11. 2.

En vertu de l'hypothèse ${}^{q-1}\mathrm{P}_{(k)}$, la relation (6) entraîne l'existence d'une famille

$$(\delta_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \subset {}^{q-2}\mathrm{F}_{(k)}$$

telle que l'on ait

$$\gamma_{(k)} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} \omega_{i(k)} \wedge \delta_{i(k)},$$

soit

$$\alpha_{[k+1]} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} \omega_{i[k+1]} \wedge \beta_{i(k)} + \chi \wedge \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} \omega_{i(k)} \wedge \delta_{i(k)};$$

compte-tenu de (4) et de la relation

$$\omega_{i(k)} \wedge \chi = \omega_{i(k+1)} \wedge \chi,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \alpha_{(k+1)} &= \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} \omega_{i(k)} \wedge \beta_{i(k)} + \omega_{i[k+1]} \wedge \beta_{i(k)} - \omega_{i(k)} \wedge \chi \wedge \delta_{i(k)} \\ &= \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} \omega_{i(k+1)} \wedge \beta_{i(k)} - \omega_{i(k)} \wedge \chi \wedge \delta_{i(k)} \\ &= \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} \omega_{i(k+1)} \wedge (\beta_{i(k)} - \chi \wedge \delta_{i(k)}). \end{aligned}$$

Comme l'expression entre parenthèses représente un élément de ${}^{q-1}\mathrm{F}_{(k+1)}$, la condition ${}^{q}\mathrm{P}_{(k+1)}$ est vérifiée.

Fin de la démonstration du lemme 11. 3.

Dans la partie commune aux démonstrations des lemmes 11. 2 et 11. 3, supposons $q = 1$; alors $\gamma_{(k)}$ est un élément m de M, et la relation (6) s'écrit $\omega_{(k)} \wedge m = 0$.

Soit, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $\mathrm{X}_i = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-i}) \in \mathrm{A}^n$;

alors on peut prendre $\chi = X_{i+1}$, et la relation $\omega_{(k)} \wedge m = 0$ entraîne $\omega_{(k)} \wedge \varepsilon = 0$ où $\varepsilon = m \wedge \Big(\bigwedge_{p<i\leqslant n} X_i\Big)$, soit $\omega_{(p)} \wedge \varepsilon = 0$. L'hypothèse $P'(p)$ entraîne l'existence d'une famille

$$(\delta_i)_{1\leqslant i\leqslant p} \subset {}^{n-p-1}F$$

telle que l'on ait

$$\varepsilon = \varepsilon^{(p-1)} + \sum_{1\leqslant i\leqslant p} \omega_{i(p-1)} \wedge \delta_i^{[p]}.$$

La relation $\varepsilon^{(p-1)} = 0$ entraîne

$$\varepsilon = \sum_{1\leqslant i\leqslant p} \omega_{i(p-1)} \wedge \delta_i^{[p]};$$

de cette dernière relation résultent $\delta_i^{[p]} = 0$ et $\varepsilon = 0$, soit $m = 0$. Alors on a

$$\begin{aligned} \alpha_{(k+1)} &= \sum_{1\leqslant i\leqslant p} \omega_{i(k)} \wedge \beta_{i(k)} + \omega_{i[k+1]} \wedge \beta_{i(k)} \\ &= \sum_{1\leqslant i\leqslant p} \omega_{i(k+1)} \wedge \beta_{i(k)}, \end{aligned}$$

et la propriété ${}^1P_{(k+1)}$ est vérifiée.

b) *Récurrences.*

En partant de l'hypothèse $P' = \bigcap_{p\leqslant k\leqslant n} P'(k)$, en tenant compte du lemme 10. 1 et en utilisant le lemme 11. 1 pour une récurrence sur l'indice k dans ${}^{n-p}P^{(k)}$, on obtient :

LEMME 11. 4. — $P' \Rightarrow {}^{n-p}P$.

En appliquant ce lemme à $F_{(p+q)}$, on obtient :

LEMME 11. 5. — *Pour* $0 \leqslant q \leqslant n-p$,

$$\bigcap_{p\leqslant k\leqslant p+q} P'(k) \Rightarrow {}^qP_{(p+q)}.$$

De ce lemme, on déduit aussitôt :

LEMME 11. 6.

$$P' \Leftrightarrow \bigcap_{0<q\leqslant n-p} {}^qP_{(p+q)}.$$

En effectuant une récurrence sur l'indice k de ${}^q\mathrm{P}_{(k)}$ à l'aide du lemme 11. 2, on obtient :

Lemme 11. 7. — *Pour* $1 < q \leqslant n - p$,

$$ {}^q\mathrm{P}_{(p+q)} \cap \Big(\bigcap_{p+q \leqslant k \leqslant n} {}^{q-1}\mathrm{P}_{(k)} \Big) \Rightarrow \bigcap_{p+q \leqslant k \leqslant n} {}^q\mathrm{P}_{(k)}. $$

Pour $q = 1$, le lemme 11. 5 s'écrit

$$ \mathrm{P}'(p) \cap \mathrm{P}'(p+1) \Rightarrow {}^1\mathrm{P}_{(p+1)}; $$

en utilisant ce résultat, et en raisonnant par récurrence, à l'aide du lemme 11. 3, sur l'indice k de ${}^1\mathrm{P}_{(k)}$, on obtient :

Lemme 11. 8.

$$ \mathrm{P}'(p) \cap \mathrm{P}'(p+1) \Rightarrow \bigcap_{p < k \leqslant n} {}^1\mathrm{P}_{(k)}. $$

Les résultats obtenus permettent maintenant de démontrer le *théorème* 10. 1, c'est-à-dire la relation

$$ \mathrm{P}' \Rightarrow \mathrm{P}; $$

en effet, si P' est réalisée, la condition $\bigcap_{0<q\leqslant n-p} {}^q\mathrm{P}_{(p+q)}$ est réalisée en vertu du lemme 11. 6, et aussi la condition $\bigcap_{p<k\leqslant n} {}^1\mathrm{P}_{(k)}$ en vertu du lemme 11. 8; il résulte alors du lemme 11. 7 que la condition $\bigcap_{p+q\leqslant k\leqslant n} {}^q\mathrm{P}_{(k)}$ et, en particulier, la condition ${}^q\mathrm{P} = {}^q\mathrm{P}_{(n)}$, sont réalisées, pour $1 \leqslant q \leqslant n - p$; donc $\mathrm{P} = \bigcap_{1\leqslant q\leqslant n-p} {}^q\mathrm{P}$ est réalisée.

12. Un corollaire du théorème fondamental.

Nous établirons maintenant un corollaire du théorème fondamental, plus maniable que celui-ci; ce corollaire nous permettra d'appliquer notre résultat à l'algèbre des formes différentielles extérieures sur une variété indéfiniment différentiable; il fera intervenir certaines matrices, dont les éléments appartiennent à un anneau, et qui généralisent la notion de M-suite, considérée par J.-P. Serre [19]; définissons d'abord ces matrices et des propriétés qui les concernent.

Comme précédemment, nous supposerons que A est un anneau commutatif avec élément unité, et que M est un

A-module unitaire; soient n et p deux nombres entiers vérifiant $1 \leqslant p \leqslant n$; soit $\omega = (\omega_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ une matrice d'éléments de A; pour toute suite d'entiers $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n$, on désignera par $\Delta_{i_1, \ldots, i_p}$ le déterminant de la matrice $(\omega_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ j = i_1, \ldots, i_p}}$; pour tout entier k vérifiant $p \leqslant k \leqslant n$, on désignera par $\Delta_{(k)}$ l'idéal de A engendré par les $\Delta_{i_1, \ldots, i_p}$ pour $i_p < k$; pour toute suite $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_{p-1} < k \leqslant n$, on désignera par $\Omega_{i_1, \ldots, i_{p-1}; k}$ l'idéal de A engendré par O et les éléments de la matrice

$$\omega_{(i_1, \ldots, i_{p-1}; k)} = (\omega_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p,\, j < k \\ j \neq i_1, \ldots, i_{p-1}}}.$$

Définitions. — Soit k un entier vérifiant $p \leqslant k \leqslant n$. On dira que ω satisfait :

a. La propriété $\mathrm{P}''(k)$ si la relation

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_{p-1} < k} \Delta_{i_1, \ldots, i_{p-1}, k} \cdot \varphi_{i_1, \ldots, i_{p-1}} \in \Delta_{(k)} . \mathrm{M}, \qquad \varphi_{i_1, \ldots, i_{p-1}} \in \mathrm{M}$$

entraîne

$$\varphi_{i_1, \ldots, i_{p-1}} \in \Omega_{i_1, \ldots, i_{p-1}; k} . \mathrm{M};$$

b. La propriété $\mathrm{Q}(k)$ si, pour toute suite d'entiers

$$1 \leqslant i_1 < \cdots < i_{p-1} < k,$$

$\Delta_{i_1, \ldots, i_{p-1}, k}$ n'est pas diviseur de zéro dans le A-module

$$\mathrm{M}/\Omega_{i_1, \ldots, i_{p-1}; k} . \mathrm{M};$$

c. La propriété P″ (resp. Q) s'il satisfait la propriété $\mathrm{P}''(k)$ (resp. $\mathrm{Q}(k)$) pour tout entier k vérifiant $p \leqslant k \leqslant n$.

Cas particuliers. — *a*. Si $p = 1$, si A est un anneau semi-local et si les éléments de ω appartiennent au radical de A, dire que ω satisfait la condition Q est dire que ω est une M-suite de A.

b. Si $p = 2$, si on pose $\omega_1 = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $\omega_2 = (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, les propriétés $\mathrm{P}''(k)$ et $\mathrm{Q}(k)$ s'explicitent respectivement comme suit :

i. La relation

$$\sum_{1 \leqslant j < k} (x_j y_k - x_k y_j) . \varphi_j = \sum_{1 \leqslant i < j < k} (x_i y_j - x_j y_i) . \psi_{ij},$$

avec $\varphi_i \in M$ et $\psi_{ij} \in M$, entraîne des relations

$$\varphi_i = \sum_{1 \leqslant j < k,\, j \neq i} x_j\theta_j + y_j\sigma_j,$$

avec $\theta_j \in M$ et $\sigma_j \in M$, pour les entiers i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant k$.

ii. Pour tout entier i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant k$, $x_iy_k - x_ky_i$ n'est pas diviseur de zéro dans le A-module

$$M/(0, x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{k-1}, y_1, \ldots, \hat{y}_i, \ldots, y_{k-1}).M$$

(où M est multiplié, au dénominateur, par l'idéal de A engendré par les éléments qui figurent entre parenthèses, l'accent surmontant un élément signifiant que cet élément est omis).

Les notations que nous venons d'introduire permettent d'énoncer le résultat qui est l'objet de ce paragraphe :

Théorème 12. 1. — *Soit* $\omega = (\omega_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ *une matrice vérifiant la condition* Q, *et soit* $\omega_i = (\omega_{ij})_{1 \leqslant j \leqslant n} \in {}^1E$, *pour* $1 \leqslant i \leqslant p$; *alors la relation*

$$\left(\bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant p} \omega_i\right) \wedge \alpha = 0$$

où $\alpha \in {}^qF$, $1 \leqslant q \leqslant n - p$, *entraîne l'existence d'une famille*

$$(\beta_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \subset {}^{q-1}F$$

telle que l'on ait

$$\alpha = \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} \omega_i \wedge \beta_i.$$

Ce thèorème résulte du théorème 10. 1 et de la comparaison des conditions $Q(k)$, $P''(k)$ et $P'(k)$; cette comparaison est l'objet des propositions ci-dessous.

Proposition 12. 1. — $Q(k) \Longrightarrow P''(k)$.

Démonstration. — La condition $P''(k)$ exprime que la relation

$$(1) \qquad \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_{p-1} < k} \Delta_{i_1, \ldots, i_{p-1}, k} \cdot \varphi_{i_1, \ldots, i_{p-1}} = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p < k} \Delta_{i_1, \ldots, i_p} \cdot \theta_{i_1, \ldots, i_p}$$

entraîne des relations

$$(2) \qquad \varphi_{i_1, \ldots, i_{p-1}} = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p,\ 1 \leqslant j < k \\ j \neq i_1, \ldots, i_{p-1}}} \omega_{i,j} \cdot \psi_{i, j, i_1, \ldots, i_{p-1}}$$

où $\varphi_{i_1,\dots,i_{p-1}}$, $\theta_{i_1,\dots,i_p}$, $\psi_{i,j,i_1,\dots,i_{p-1}}$ sont des éléments de M. Si on particularise une certaine permutation $i_1 < \dots < i_{p-1} < k$, la relation (1) s'écrit :

$$\Delta_{i_1,\dots,i_{p-1},k}\varphi_{i_1,\dots,i_{p-1}} + \sum_{\substack{1\leqslant j_1<\dots<j_{p-1}<k \\ (j_1,\dots,j_{p-1})\neq(i_1,\dots,i_{p-1})}} \Delta_{j_1,\dots,j_{p-1},k}\varphi_{j_1,\dots,j_{p-1}} = \sum_{1\leqslant r_1<\dots<r_p<k} \Delta_{r_1,\dots,r_p}\theta_{r_1,\dots,r_p}.$$

Dans chaque suite $1 \leqslant r_1 < \dots < r_p \leqslant k$, il y a au moins un indice qui ne figure pas dans la suite $i_1 < \dots < i_{p-1} < k$; donc cette relation entraîne

$$\Delta_{i_1,\dots,i_{p-1},k}\varphi_{i_1,\dots,i_{p-1}} = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant p,\, j<k \\ j\neq i_1,\dots,i_{p-1}}} \omega_{i,j}\,.\,\alpha_{i,j,i_1,\dots,i_{p-1}}$$

et, compte-tenu de cette dernière relation, Q(k) entraîne (2), q.e.d.

Si nous associons à la matrice $\omega = (\omega_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ la famille $(\omega_i)_{1\leqslant i\leqslant p} \subset {}^1\mathrm{E}$ où $\omega_i = (\omega_{ij})_{1\leqslant j\leqslant n}$, $1 \leqslant i \leqslant p$, la comparaison de P″($k$) et de P′($k$) est possible et donne lieu à la proposition suivante :

Proposition 12. 2. — P″(k) $\Longrightarrow$ P′(k).

Démonstration. — On exprimera à l'aide de la base $(\mathrm{X}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de A^n, introduite à la fin de la démonstration du lemme 11. 3, les éléments de F qui interviennent dans l'expression de P′(k), afin d'exprimer P′(k) à l'aide de conditions relatives à la matrice ω.

i. Expression de $\omega_{(k)}$, *de* $\varphi \in {}^{n-p}\mathrm{F}^{(k)}$, *et de la condition* $d_{(k)}\varphi = 0$.
On a d'abord

$$\omega_{i(k)} = \sum_{1\leqslant j\leqslant k} \omega_{i,j}\,.\,\mathrm{X}_j$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}\omega_{(k)} = \bigwedge_{1\leqslant i\leqslant p} \omega_{i(k)} &= \sum_{\substack{1\leqslant j_1\leqslant k \\ \cdots\cdots \\ 1\leqslant j_p\leqslant k}} \omega_{1,j_1}\omega_{2,j_2}\dots\omega_{p,j_p}\mathrm{X}_{j_1}\mathrm{X}_{j_2}\dots\mathrm{X}_{j_p} \\ &= \sum_{i_1<i_2<\dots<i_p\leqslant k} \delta^{j_1\cdots j_p}_{i_1\cdots i_p}\,\omega_{1,j_1}\dots\omega_{p,j_p}\mathrm{X}_{i_1}\dots\mathrm{X}_{i_p} \\ &= \sum_{i_1<\dots<i_p\leqslant k} \Delta_{i_1,\dots,i_p}\mathrm{X}_{i_1}\mathrm{X}_{i_2}\dots\mathrm{X}_{i_p}.\end{aligned}$$

On définit $*(X_{i_1} \ldots X_{i_p})$, pour $i_1 < \cdots < i_p \leqslant k$, de telle sorte que l'on ait

$$X_{i_1}X_{i_2} \ldots X_{i_p} * (X_{i_1}X_{i_2} \ldots X_{i_p}) = (-1)^{i_1+\cdots+i_p+p(p+1)/2} X_1 \ldots X_n.$$

Alors un élément φ appartenant à ${}^{n-p}F^{(k)}$ s'écrit

$$\varphi = \sum_{i_1 < \cdots < i_p \leqslant k} \varphi_{i_1,\ldots,i_p} * (X_{i_1} \ldots X_{i_p}) \qquad \text{avec} \qquad \varphi_{i_1, i_2, \ldots, i_p} \in M$$

et l'on a

$$\omega_{(k)} \wedge \varphi = \sum_{i_1 < \cdots < i_p \leqslant k} (-1)^{i_1+\cdots+i_p+p(p+1)/2} \Delta_{i_1,\ldots,i_p} \varphi_{i_1,\ldots,i_p} X_1 \ldots X_n.$$

La condition $d_{(k)}\varphi = 0$ s'écrit donc

$$\sum_{i_1 < \cdots < i_p \leqslant k} (-1)^{i_1+\cdots+i_p} \Delta_{i_1,\ldots,i_p} \cdot \varphi_{i_1,\ldots,i_p} = 0$$

ou encore

$$\sum_{i_1 < \cdots < i_p < k} (-1)^{i_1+\cdots+i_p} \Delta_{i_1,\ldots,i_p} \cdot \varphi_{i_1,\ldots,i_p} + \sum_{i_1 < \cdots < i_{p-1} < k} (-1)^{i_1+\cdots+i_{p-1}+k} \Delta_{i_1,\ldots,i_{p-1},k} \cdot \varphi_{i_1,\ldots,i_{p-1},k} = 0.$$

Elle entraîne la relation

$$\sum_{i_1 < \cdots < i_{p-1} < k} (-1)^{i_1+\cdots+i_{p-1}} \Delta_{i_1,\ldots,i_{p-1},k} \cdot \varphi_{i_1,\ldots,i_{p-1},k} \in \Delta_{(k)} . M$$

ii. *Expression de la condition : φ appartient à ${}^{n-p}F^{(k)}$ et sa projection, sur ${}^{n-p}F^{[k]}$, est dans l'image de $\overset{p}{\oplus}{}^{n-p-1}F^{[k]}$ par $\delta_{(k)}$.*

Si ψ_i appartient à ${}^{n-p-1}F^{[k]}$, on a

$$\psi_i = \sum_{i_1 < \cdots < i_p < k} \psi_{i, i_1, \ldots, i_p, k} * (X_{i_1} \ldots X_{i_p} X_k);$$

compte-tenu de la relation

$$\omega_{i(k-1)} = \sum_{1 < j \leqslant k-1} \omega_{i,j} X_j,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \omega_{i(k-1)} \wedge \psi_i &= \sum_{i_1 < \cdots < i_p < k} \Big(\sum_{1 < q < p} \omega_{i, i_q} \psi_{i, i_1, \ldots, i_p, k} X_{i_q} * (X_{i_1} \ldots X_{i_p} X_k) \Big) \\ &= \sum_{i_1 < \cdots < i_p < k} \Big(\sum_{1 \leqslant q \leqslant p} (-1)^{i_q - q} \omega_{i, i_q} \cdot \psi_{i, i_1, \ldots, i_p, k} \\ &\qquad * (X_{i_1} \ldots \hat{X}_{i_q} \ldots X_{i_p} X_k) \Big) \\ &= \sum_{\substack{i_1 < \cdots < i_{p-1} < k \\ j < k}} (-1)^{j-1} \omega_{i,j} \psi_{i,j,i_1,\ldots,i_{p-1},k} * (X_{i_1} \ldots X_{i_{p-1}} X_k). \end{aligned}$$

La projection de φ dans ${}^{n-p}\mathrm{F}^{[k]}$ étant égale à

$$\varphi^{[k]} = \sum_{i_1 < \cdots < i_{p-1} < k} \varphi_{i_1, \ldots, i_{p-1}, k} * (\mathrm{X}_{i_1} \ldots \mathrm{X}_{i_{p-1}} \mathrm{X}_k),$$

la condition considérée est l'existence d'éléments $\psi_{i, j, i_1, \ldots, i_{p-1}, k}$ de M, pour $1 \leqslant i \leqslant p$, $i_1 < \cdots < i_{p-1} < k$, $1 \leqslant j < k$, $j \neq i_1, \ldots, i_{p-1}$, tels que l'on ait

$$\varphi_{i_1, \ldots, i_{p-1}, k} = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j < k}} (-1)^{j-1} \omega_{i, j} . \psi_{i, j, i_1, \ldots, i_{p-1}, k};$$

cette condition s'écrit alors :

$$\varphi_{i_1, \ldots, i_{p-1}, k} \in \Omega_{i_1, \ldots, i_{p-1}; k} . \mathrm{M}.$$

Terminons la démonstration de la proposition 12. 2; si P″(k) est réalisée, la relation obtenue à la fin de *i* entraîne la relation obtenue à la fin de *ii*, donc la condition exprimée en *i* entraîne la condition exprimée en *ii*, et P′(k) est réalisée, q.e.d.

Les propositions 12. 1 et 12. 2 et le théorème 10. 1 fournissent les relations

$$\mathrm{Q} \Longrightarrow \mathrm{P}'' \Longrightarrow \mathrm{P}' \Longrightarrow \mathrm{P}$$

d'où résulte $\mathrm{Q} \Longrightarrow \mathrm{P}$; cette dernière relation équivaut au théorème 12. 1, qui se trouve donc démontré.

13. Application à l'algèbre des formes différentielles extérieures sur une variété indéfiniment différentiable.

Afin d'appliquer les résultats qui précèdent aux formes différentielles extérieures sur une variété différentiable, nous devons introduire quelques définitions. Soit A l'anneau des fonctions indéfiniment différentiables dans l'espace euclidien R^n, et soit M le A-module A ou le A-module des fonctions indéfiniment différentiables à support compact; nous conserverons les notations introduites au début du paragraphe 12.

Définition. — Nous dirons que la matrice $\omega = (\omega_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ vérifie la propriété R si :

a. $\Delta_{1, \ldots, p}$ ne s'annule identiquement dans aucun ouvert;

b. Pour tout entier k vérifiant $p \leqslant p(k-p) \leqslant n-1$, et toute suite d'entiers $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_{p-1} < k$, $\Delta_{i_1, \ldots, i_{p-1}, k}$ et les éléments de la matrice $\omega_{(i_1, \ldots, i_{p-1}; k)}$ sont $p(k-p)+1$ fonctions

appartenant à un système de coordonnées de R^n (ne s'annulant qu'en O);

c. Pour tout entier k vérifiant $n-1 < p(k-p) \leqslant p(n-p)$ et toute suite d'entiers $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_{p-1} < k$, $\Delta_{i_1, \ldots, i_{p-1}, k}$ et les éléments de la matrice $\omega_{(i_1, \ldots, i_{p-1}; k)}$ ne s'annulent pas simultanément.

Cette définition permet d'énoncer notre résultat relatif aux formes différentielles extérieures.

Théorème 13. 1. — *Soit* V *une variété indéfiniment différentiable, de dimension n, et soit* $(\omega_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$, $p < n$, *une famille de formes différentielles indéfiniment différentiables, homogènes de degré un, vérifiant la condition suivante: pour tout point* O *de* V, *il existe un voisinage* U *de* O *et un système* $(\xi_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *de coordonnées locales dans* U, *de telle sorte que, si on pose*

$$\omega_i = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \omega_{ij}\, d\xi_j, \quad 1 \leqslant i \leqslant p$$

dans U, *la matrice* $\omega = (\omega_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant p,\, 1 \leqslant j \leqslant n}$ *vérifie la condition* R. *Soit* α *une forme différentielle, indéfiniment différentiable, homogène, de degré* q, $1 \leqslant q \leqslant n-p$, *dans* V, *vérifiant la relation*

$$\left(\bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant p} \omega_i\right) \wedge \alpha = 0$$

dans V; *alors il existe une famille* $(\beta_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ *de formes indéfiniment différentiables, homogènes, de degré* $q-1$, *dans* V, *telles que l'on ait*

$$\alpha = \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} \omega_i \wedge \beta_i$$

dans V. *Si* α *est à support compact, les formes* β_i, $1 \leqslant i \leqslant p$, *peuvent être choisies à support compact.*

Ce théorème résulte du théorème 12. 1 et de la comparaison des conditions Q et R, réalisée par la Proposition suivante.

Proposition 13. 1. — R $\Longrightarrow$ Q.

Démonstration. — Il s'agit de montrer que, si la condition R est réalisée, alors, pour tout entier k vérifiant $p \leqslant k \leqslant n$, et toute suite d'entiers $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_{p-1} < k$, les relations

$$\Delta_{i_1, \ldots, i_{p-1}, k} \cdot \varphi_{i_1, \ldots, i_{p-1}} = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p,\, j < k \\ j \neq i_1, \ldots, i_{p-1}}} \omega_{i,j} \cdot \alpha_{i, j, i_1, \ldots, i_{p-1}}$$

entraînent des relations

$$\varphi_{i_1, \ldots, i_{p-1}} = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p,\, j < k \\ j \neq i_1, \ldots, i_{p-1}}} \omega_{i,j} \cdot \psi_{i,j,i_1,\ldots,i_{p-1}}.$$

Or, le problème a été résolu, dans le cas $p = 1$, par G. de Rham [15], qui a obtenu le résultat suivant :

Si l'on a $\omega = (\omega_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, les ω_i formant un système de coordonnées dans R^n et ne s'annulant simultanément qu'au point O, alors la condition Q est réalisée pour la famille réduite à la forme différentielle ω.

Compte-tenu de la condition R, ce résultat de G. de Rham permet de résoudre le système d'équations ci-dessus de la manière désirée.

Remarques. — *a*) Dans le cas $p = 1$, le théorème 13. 1 est un résultat connu de G. de Rham [15].

b) Dans le cas général, pour appliquer ce théorème, il faut vérifier qu'une certaine matrice de fonctions vérifie la propriété R ; la partie essentielle de cette vérification consiste à prouver la condition *b*) de la définition ci-dessus, c'est-à-dire à prouver que la matrice jacobienne de $\Delta_{i_1, \ldots, i_{p-1}, k}$ et des éléments de $\omega_{(i_1, \ldots, i_{p-1}; k)}$ est de rang maximum (c'est-à-dire $p(k - p) + 1$) en O si ces fonctions s'annulent simultanément en O.

Si l'on a $p = 2$ et $n = 3$, alors on a aussi $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ avec $\omega_1 = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $\omega_2 = (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$; si x_1, x_2, y_1 et y_2 s'annulent simultanément en O, la condition R exprime que les fonctions

$$y_3 \frac{D(x_1, y_1, x_2)}{D(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} - x_3 \frac{D(x_1, y_1, y_2)}{D(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}$$

et

$$y_3 \frac{D(x_2, y_2, x_1)}{D(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} - x_3 \frac{D(x_2, y_2, y_1)}{D(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}$$

ne s'annulent pas en O, et que $x_1 y_2 - x_2 y_1$ ne s'annule pas identiquement dans un ouvert.

La condition R est réalisée pour l'exemple suivant :

$$s_1 = (\xi_1 + \xi_2) . \xi_3 + (\xi_1)^2 + (\xi_2)^2, \qquad s_2 = \xi_1 . \xi_2 + \xi_3,$$
$$\omega_1 = ds_1 = (2\xi_1 + \xi_3)\, d\xi_1 + (2\xi_2 + \xi_3)\, d\xi_2 + (\xi_1 + \xi_2)\, d\xi_3,$$
$$\omega_2 = ds_2 = \xi_2 d\xi_1 + \xi_1 d\xi_2 + d\xi_3.$$

CHAPITRE IV

REPRÉSENTATIONS INTÉGRALES DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES COMPLEXES.

14. La formule de Cauchy-Fantappiè.

Nous montrerons, dans ce chapitre, que les formules intégrales de E. Martinelli [7] et de A. Weil [21] sont des conséquences de la formule de Cauchy-Fantappiè utilisée par J. Leray [5]. Pour cela, nous déduirons, de la formule de Cauchy-Fantappiè, une formule intégrale très générale (A) permettant d'exprimer la valeur d'une fonction holomorphe en un point quelconque d'un domaine, à l'aide des valeurs prises par cette fonction sur la frontière du domaine; nous montrerons ensuite que la formule (A) admet comme cas particuliers les formules intégrales de E. Martinelli et de A. Weil; plus précisément, au cours des calculs conduisant à la formule de A. Weil, nous obtiendrons une formule (B) plus générale que celle de A. Weil, mais dont le noyau présente le même caractère de simplicité. La principale difficulté rencontrée dans ce chapitre réside dans les calculs permettant de particulariser la formule (A) afin d'obtenir les intégrales de E. Martinelli et de A. Weil. La formule (A) admet d'autres cas particuliers intéressants, qui seront exposés ailleurs. Dans ce premier paragraphe, nous rappellerons l'expression et la démonstration de la formule de Cauchy-Fantappiè.

Soient X un domaine convexe d'un espace affin complexe E de dimension complexe n; Ξ l'espace vectoriel complexe (de dimension complexe $n + 1$) des fonctions linéaires affines dans E, à valeurs complexes; Ξ^* l'espace projectif complexe (de dimension complexe n) quotient de $\Xi - \{0\}$ par le groupe

des homothéties de rapport non nul de Ξ. On désignera par $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ (resp. $(\xi_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$) des coordonnées dans E (resp. Ξ) telles que la valeur prise par la fonction linéaire ξ (appartenant à Ξ) au point x de E soit égale à

$$\xi . x = \xi_0 + \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \xi_i x_i.$$

On définit les formes différentielles extérieures

$$\omega(x) = \bigwedge_{1\leqslant i\leqslant n} dx_i, \qquad \omega'(\xi) = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} (-1)^{k-1}\xi_k \bigwedge_{\substack{i\neq k\\ 1\leqslant i\leqslant n}} d\xi_i;$$

ainsi

$$(\xi . y)^{-n}\, \omega'(\xi)$$

est, pour tout $y \in X$, une forme différentielle extérieure dans Ξ, image réciproque d'une forme différentielle holomorphe dans Ξ^*, qui sera représentée par la même expression; nous appellerons noyau de Cauchy-Fantappiè la forme différentielle extérieure

$$\Phi(x, y) = (\xi . y)^{-n}\, \omega'(\xi) \wedge \omega(x)$$

définie dans $\Xi^* \times X$.

Dans $\Xi^* \times X$, soit Q la quadrique d'équation $\xi . x = 0$, et, pour tout $y \in X$, soit $P(y)$ l'hyperplan d'équation $\xi . y = 0$; ainsi que l'a montré J. Leray [5], l'espace vectoriel $H_c(Q - P(y) \cap Q)$ d'homologie, à supports compacts et à coefficients complexes, de $Q - P(y) \cap Q$, est engendré par deux classes d'homologie, de dimensions (réelles) respectives 0 et $2n - 1$; le point (ξ^*, x) décrit un cycle appartenant à cette dernière classe quand x décrit la frontière K d'un domaine borné, contenant y et contenu dans X, ξ^* variant continûment, en fonction de x, de sorte que l'on ait

$$\xi . x = 0, \qquad \xi . y \neq 0;$$

considérons en particulier le cycle β défini par les relations

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i - y_i|^2 = \varepsilon^2, \qquad \xi_i = \bar{x}_i - \bar{y}_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n, \qquad \xi . x = 0$$

et orienté de telle sorte que l'on ait

$$\int_\beta (i(\xi . y))^{-n} \omega'(\xi) \wedge \omega(x) > 0; \tag{1}$$

soit $h(\mathrm{Q} - \mathrm{P}(y) \cap \mathrm{Q})$ la classe d'homologie compacte contenant le cycle β; cette classe engendre le sous-groupe de

$$\mathrm{H}_c(\mathrm{Q} - \mathrm{P}(y) \cap \mathrm{Q})$$

de dimension (réelle) $2n - 1$; elle permet d'écrire la *formule de Cauchy-Fantappiè*

$$(2) \quad f(y) = \frac{(n-1)\,!}{(2i\pi)^n} \int_{h(\mathrm{Q}-\mathrm{P}(y)\cap\mathrm{Q})} f(x)(\xi \,.\, y)^{-n} \omega'(\xi) \wedge \omega(x)$$

pour toute fonction f holomorphe dans X.

Pour démontrer cette formule, J. Leray utilise une méthode, due à H. Lewy, qui consiste à intégrer explicitement sur le cycle β; on est alors amené à établir la relation

$$(3) \quad f(y) = \frac{(n-1)\,!}{(2i\pi)^n}$$
$$\times \int_{\sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|^2 = \varepsilon^2} \frac{f(x)\Big(\bigwedge\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} dx_i\Big) \wedge \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} (-1)^{k-1} (\overline{x}_k - \overline{y}_k) \Big(\bigwedge\limits_{\substack{i \neq k \\ 1 \leqslant i \leqslant n}} d\overline{x}_i\Big)}{\Big(\sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|^2\Big)^n},$$

la sphère de centre y, de rayon ε, étant orientée de manière convenable (c'est-à-dire telle que l'inégalité (1) soit réalisée); en considérant successivement le cas où $f(x) = 1$ dans X et celui où $f(y) = 0$, on établit aisément ce résultat et on voit que l'orientation convenable de la sphère est son orientation naturelle (de l'intérieur vers l'extérieur) dans X. Il convient de noter que la relation (3) est la première formule intégrale de E. Martinelli [6]; grâce au choix d'un cycle particulier β dans la classe d'homologie $h(\mathrm{Q} - \mathrm{P}(y) \cap \mathrm{Q})$, la démonstration de cette formule se révèle équivalente à celle de la formule de Cauchy-Fantappiè; rappelons enfin, pour préciser le sens de la relation (3), que le noyau

$$\mathrm{K}_0 = \frac{\Big(\bigwedge\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} dx_i\Big) \wedge \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} (-1)^{k-1} (\overline{x}_k - \overline{y}_k) \Big(\bigwedge\limits_{\substack{i \neq k \\ 1 \leqslant k \leqslant n}} d\overline{x}_i\Big)}{\Big(\sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|^2\Big)^n}$$

est fermé, qu'il est la différentielle $(1 - n)^{-1}\, d'\mathrm{H}_0$, par rapport

aux variables complexes x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, de la forme différentielle extérieure

$$H_0 = \frac{\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(\bigwedge_{\substack{i \neq k \\ 1 \leqslant k \leqslant n}} dx_i \right) \wedge \left(\bigwedge_{\substack{i \neq k \\ 1 \leqslant k \leqslant n}} d\bar{x}_i \right)}{\left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|^2 \right)^n},$$

et que, considéré comme courant, il vérifie la relation

$$dK_0 = d''K_0 = \frac{(2i\pi)^n}{(n-1)!} \delta_y$$

(où δ_y désigne un courant défini au début du paragraphe 3).

En remplaçant la sphère, qui a permis de construire le cycle β, par la frontière d'un domaine, supposée différentiable par morceaux, nous obtiendrons, au paragraphe 18, la formule générale (A), et les formules intégrales de E. Martinelli et de A. Weil; les calculs permettant de déduire les noyaux de ces formules du noyau de Cauchy-Fantappiè seront effectués dans les paragraphes 15, 16 et 17; la démonstration d'une identité utilisée, dans le paragraphe 16, pour le calcul du noyau de E. Martinelli, est rejetée à la fin du chapitre, dans le paragraphe 19.

15. Noyau général, dans l'espace affin, déduit du noyau de Cauchy-Fantappiè.

La diagonale du produit $X \times X$ étant désignée par Δ, soit $(\psi^\alpha)_{1 \leqslant \alpha \leqslant r}$, $r \leqslant n$, une famille d'applications continues et dérivables de $X \times X - \Delta$ dans Ξ telles que, pour tout

$$(x, y) \in X \times X - \Delta,$$

la famille de vecteurs $(\psi^\alpha(x, y))_{1 \leqslant \alpha \leqslant r}$ soit libre sur le corps des nombres réels et vérifie les relations $(\psi^\alpha(x, y)).x = 0$, $1 \leqslant \alpha \leqslant r$; les coordonnées du vecteur $\psi^\alpha(x, y)$ seront désignées par $(\psi^\alpha_j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$. Soit $t(x, y)$ l'ensemble engendré par les vecteurs

$$\xi(x, y, \lambda) = \sum_{1 \leqslant \alpha \leqslant r} \lambda_\alpha \psi^\alpha(x, y)$$

lorsque les nombres réels λ_α varient en vérifiant les relations

$$\lambda_\alpha \geqslant 0, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant r, \quad \sum_{1 \leqslant \alpha \leqslant r} \lambda_\alpha = 1;$$

soit $T(y)$ la partie de $\Xi \times X$ engendrée par l'ensemble $t(x, y) \times \{x\}$ lorsque x décrit $X - \{y\}$; la restriction $p(y)$ à $T(y)$ de la projection canonique de $\Xi \times X$ sur X est une fibration de $T(y)$ sur $X - \{y\}$ par des simplexes de dimension réelle $r - 1$.

Théorème 15. 1. — *La composante homogène, de degré $2n - r$, de la forme différentielle obtenue en intégrant le noyau de Cauchy-Fantappiè sur les fibres de $p(y)$, est*

$$(4)\quad K(x,y) = \int_{\substack{\lambda_\alpha \geq 0 \\ \sum\limits_{1 \leq \alpha \leq r} \lambda_\alpha = 1}} \Big(\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq \alpha \leq r}} \lambda_\alpha (y_i - x_i) \psi_i^\alpha\Big)^{-n} \Omega(x, y, \lambda)$$

où l'on a

$$\Omega(x, y, \lambda) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n,\ 1 \leq \beta \leq r \\ 1 \leq l_1 < \cdots < l_{n-r} \leq n}} (-1)^{k-1} \Big(\sum_{1 \leq \alpha \leq r} \lambda_\alpha \psi_k^\alpha\Big) \det M_{k\beta l_1 \ldots l_{n-r}}$$
$$\times \Big(\bigwedge_{\substack{1 \leq \alpha \leq r \\ \alpha \neq \beta}} d\lambda_\alpha\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{1 \leq \nu \leq n-r} d\bar{x}_{l_\nu}\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{1 \leq i \leq n} dx_i\Big),$$

la matrice $M_{k\beta l_1 \ldots l_{n-r}}$ étant définie par

$$M_{k\beta l_1 \ldots l_{n-r}} = \left((\psi_j^\alpha)_{\substack{1 \leq \alpha \leq r,\ \alpha \neq \beta \\ 1 \leq j \leq n,\ j \neq k}} \Big(\sum_{1 \leq \alpha \leq r} \lambda_\alpha \frac{\partial \psi_j^\alpha}{\partial \bar{x}_{l_\nu}}\Big)_{\substack{1 \leq \nu \leq n-r \\ 1 \leq j \leq n,\ j \neq k}} \right).$$

En effet, le noyau de Cauchy-Fantappiè a pour expression

$$\Phi(x, y) = (\xi \cdot y)^{-n}\, \omega'(\xi) \wedge \omega(x)$$

avec
$$\omega'(\xi) = \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{k-1} \xi_k \Big(\bigwedge_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} d\xi_i\Big)$$

et
$$\omega(x) = \bigwedge_{1 \leq i \leq n} dx_i.$$

Sur $T(y)$, on a
$$\xi_i = \sum_{1 \leq \alpha \leq r} \lambda_\alpha \psi_i^\alpha$$

et
$$d\xi_i = \sum_{1 \leq \alpha \leq r} \psi_i^\alpha d\lambda_\alpha + \sum_{\substack{1 \leq \alpha \leq r \\ 1 \leq j \leq n}} \lambda_\alpha \Big(\frac{\partial \psi_i^\alpha}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial \psi_i^\alpha}{\partial \bar{x}_j} d\bar{x}_j\Big)$$

Seule, ne sera pas annulée, au cours de la multiplication extérieure par $\omega(x)$, la partie de $d\xi_i$ qui s'écrit

$$[d\xi_i] = \sum_{1 \leq \alpha \leq r} \psi_i^\alpha d\lambda_\alpha + \sum_{\substack{1 \leq \alpha \leq r \\ 1 \leq j \leq n}} \lambda_\alpha \frac{\partial \psi_i^\alpha}{\partial \bar{x}_j} d\bar{x}_j;$$

donc, seule ne sera pas annulée, au cours de cette multiplication, la partie de $\omega'(\xi)$ qui s'écrit

$$[\omega'(\xi)] = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} (-1)^{k-1} \Big(\sum_{1 \leqslant \alpha \leqslant r} \lambda_\alpha \psi_k^\alpha \Big) \times \bigwedge_{\substack{i \neq k \\ 1 \leqslant i \leqslant n}} \Big(\sum_{1 \leqslant \alpha \leqslant r} \psi_i^\alpha d\lambda_\alpha + \sum_{\substack{1 \leqslant \alpha \leqslant r \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \lambda_\alpha \frac{\partial \psi_i^\alpha}{\partial \bar{x}_j} d\bar{x}_j \Big);$$

la forme différentielle $K(x, y)$ étant homogène de degré $2n - r$, est homogène de degré n par rapport aux dx_i, et de degré $n - r$ par rapport aux $d\bar{x}_j$; donc, la seule composante de $[\omega'(\xi)]$, qui intervient dans le calcul de $K(x, y)$, est homogène de degré $n - r$ par rapport aux $d\bar{x}_j$, et de degré $r - 1$ par rapport aux $d\lambda_\alpha$; c'est donc

$$[[\omega'(\xi)]] = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} (-1)^{k-1} \Big(\sum_{1 \leqslant \alpha \leqslant r} \lambda_\alpha \psi_k^\alpha \Big) \times \Big(\sum_{\substack{1 \leqslant \beta \leqslant r \\ 1 \leqslant l_1 < \cdots < l_{n-r} \leqslant n}} \det . M_{k\beta l_1 \ldots l_{n-r}} \Big(\bigwedge_{\substack{\alpha \neq \beta \\ 1 \leqslant \alpha \leqslant r}} d\lambda_\alpha \Big) \wedge \Big(\bigwedge_{1 \leqslant \nu \leqslant n-r} d\bar{x}_{l_\nu} \Big) \Big)$$

où $M_{k\beta l_1 \ldots l_{n-r}}$ est la matrice définie dans l'énoncé du théorème 15. 1.

Remarque. — L'intégration qui apparaît dans l'expression de $K(x, y)$ est celle d'une fraction rationnelle par rapport aux λ_α, $1 \leqslant \alpha \leqslant r$; cette intégration peut donc être effectuée explicitement; toutefois, nous ne ferons ici ce calcul que dans le cas particulier où il conduit aux noyaux de E. Martinelli (voir § 16). Si ψ^α admet une expression de la forme

$$\psi^\alpha = \pm (\theta^\alpha . y)^{-1} \theta^\alpha, \qquad 1 \leqslant \alpha \leqslant r,$$

l'intégration devient celle d'un polynôme, ainsi qu'il résultera du théorème 15. 2 ci-dessous; le calcul sera effectué dans le cas particulier fournissant le noyau de A. Weil et un noyau analogue (voir § 17).

THÉORÈME 15. 2. — *Soit* $(\theta^\alpha)_{1 \leqslant \alpha \leqslant r}$ *une famille d'applications continues et dérivables de* $X \times X - \Delta$ *dans* Ξ, *telle que l'on ait les relations*

$$\psi^\alpha = \Big(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} (x_i - y_i) \theta_i^\alpha \Big)^{-1} \theta^\alpha, \qquad 1 \leqslant \alpha \leqslant r.$$

Alors on a

$$K(x, y) = (-1)^n \int_{\substack{\lambda_\alpha > 0 \\ \sum_{1 \leqslant \alpha \leqslant r} \lambda_\alpha = 1}} \Omega'(x, y, \lambda)$$

avec

$$\Omega'(x, y, \lambda) = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n,\, 1 \leqslant \beta \leqslant r \\ 1 \leqslant l_1 < \cdots < l_{n-r} \leqslant n}} (-1)^{k-1}$$

$$\times \left(\sum_{1 \leqslant \alpha \leqslant r} \frac{\lambda_\alpha \theta_k^\alpha}{\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} (x_i - y_i)\theta_i^\alpha} \right) \frac{\det \mathrm{N}_{k\beta l_1 \ldots l_{n-r}}}{\prod_{1 \leqslant \alpha \leqslant r}^{\alpha \neq \beta} \left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} (x_i - y_i)\theta_i^\alpha \right)}$$

$$\times \left(\bigwedge_{1 \leqslant \alpha \leqslant r}^{\alpha \neq \beta} d\lambda_\alpha \right) \wedge \left(\bigwedge_{1 \leqslant \nu \leqslant n-r} d\bar{x}_{l_\nu} \right) \wedge \left(\bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant n} dx_i \right),$$

la matrice $\mathrm{N}_{k\beta l_1 \ldots l_{n-r}}$ *étant définie par*

$$\mathrm{N}_{k\beta l_1 \ldots l_{n-r}} = \begin{pmatrix} (\theta_j^\alpha)_{\substack{1 \leqslant \alpha \leqslant r,\, \alpha \neq \beta, \\ 1 \leqslant j \leqslant n,\, j \neq k}} \\ \left(\sum_{1 \leqslant \alpha \leqslant r} \frac{\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} (x_i - y_i)\lambda_\alpha \left(\theta_i^\alpha \frac{\partial \theta_j^\alpha}{\partial \bar{x}_{l_\nu}} - \theta_j^\alpha \frac{\partial \theta_i^\alpha}{\partial \bar{x}_{l_\nu}} \right)}{\left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} (x_i - y_i)\theta_i^\alpha \right)^2} \right)_{\substack{1 \leqslant \nu \leqslant n-r \\ 1 \leqslant j \leqslant n,\, j \neq k}} \end{pmatrix}.$$

En effet, compte-tenu des relations

$$\psi^\alpha = \left(\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} (x_j - y_j)\theta_j^\alpha \right)^{-1} \theta^\alpha, \qquad 1 \leqslant \alpha \leqslant r,$$

on obtient

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant \alpha \leqslant r}} \lambda_\alpha (y_i - x_i)\psi_i^\alpha = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant \alpha \leqslant r}} \frac{\lambda_\alpha (y_i - x_i)\theta_i^\alpha}{\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} (x_j - y_j)\theta_j^\alpha} = - \sum_{1 \leqslant \alpha \leqslant r} \lambda_\alpha = -1$$

et

$$\mathrm{M}_{k\beta l_1 \ldots l_{n-r}} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\theta_j^\alpha}{\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} (x_i - y_i)\, \theta_i^\alpha} \right)_{\substack{1 \leqslant \alpha \leqslant r,\, \alpha \neq \beta \\ 1 \leqslant j \leqslant n,\, j \neq k}} \\ \left(\sum_{1 \leqslant \alpha \leqslant r} \frac{\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} (x_i - y_i)\, \lambda_\alpha \left(\theta_i^\alpha \frac{\partial \theta_j^\alpha}{\partial \bar{x}_{l_\nu}} - \theta_j^\alpha \frac{\partial \theta_i^\alpha}{\partial \bar{x}_{l_\nu}} \right)}{\left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} (x_i - y_i)\, \theta_i^\alpha \right)^2} \right)_{\substack{1 \leqslant \nu \leqslant n-r \\ 1 \leqslant j \leqslant n,\, j \neq k}} \end{pmatrix}$$

d'où on déduit

$$\det M_{k\beta l_1 \dots l_{n-r}} = \Big(\prod_{1 \leqslant \alpha \leqslant r}^{\alpha \neq \beta} \Big(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} (x_i - y_i)\, \theta_i^\alpha \Big)\Big)^{-1} \det N_{k\beta l_1 \dots l_{n-r}};$$

En substituant les expressions obtenues à celles qui figurent dans l'énoncé du théorème 15. 1, on obtient le théorème 15. 2.

16. Les noyaux de E. Martinelli.

Effectuons l'intégration, qui figure dans l'expression de $K(x, y)$ donnée au théorème 15. 1, pour un choix particulier des fonctions ψ^α, conduisant aux noyaux de E. Martinelli; le résultat de ce calcul est exprimé par le théorème suivant :

Théorème 16. 1. — *Si l'on a*

$$\psi_j^\alpha = \frac{\partial \rho_{i_\alpha}^2}{\partial x_j}, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant r, \quad 1 \leqslant r \leqslant n-p, \quad 1 \leqslant j \leqslant n$$

et

$$\rho_i^2 = \Big(\sum_{1 \leqslant j \leqslant p} |x_j - y_j|^2 \Big) + |x_i - y_i|^2, \quad p < i \leqslant n,$$

alors on a $K(x, y) = 0$ *pour* $r < n - p$, *et, pour* $r = n - p$, $K(x, y)$ *est la somme d'une forme différentielle qui s'annule sur la sous-variété de* $X - \{y\}$ *où s'annulent simultanément les fonctions* $\rho_\alpha^2 - 1$, $p < \alpha \leqslant n$, *et de la forme différentielle extérieure*

$$H(x, y) = \frac{(p-1)!}{(n-1)!} \Big(\prod_{1 \leqslant i \leqslant n} (\bar{x}_i - \bar{y}_i) \Big) \Big(\bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant n} dx_i \Big)$$
$$\wedge \sum_{p < i \leqslant n} \Bigg[\sum_{\substack{\beta_j \geqslant 0 \\ \sum_{j < p \leqslant n} \beta_j = p}} \beta_i \prod_{p < j \leqslant n} \rho_j^{-2(1+\beta_j)} \Bigg]$$
$$\times \Bigg[\Big(\bigwedge_{1 \leqslant h \leqslant p} \frac{d\bar{x}_h}{\bar{x}_h - \bar{y}_h} \Big) - \sum_{1 \leqslant k \leqslant p} (-1)^{k-1} \frac{d\bar{x}_i}{\bar{x}_i - \bar{y}_i} \wedge \Big(\bigwedge_{1 \leqslant h \leqslant p}^{h \neq k} \frac{d\bar{x}_h}{\bar{x}_h - \bar{y}_h} \Big) \Bigg]$$

que nous appellerons noyau de E. Martinelli.

Dans la démonstration de ce théorème, nous poserons $\sigma_j = \bar{x}_j - \bar{y}_j$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$; nous aurons alors

$$\psi_j^\alpha = \begin{cases} \sigma_j & \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant p \quad \text{ou pour} \quad j = i_\alpha, \\ 0 & \text{pour} \quad p < j < i_\alpha \quad \text{ou pour} \quad i_\alpha < j \leqslant n; \end{cases}$$

$$\sum_{1\leqslant\alpha\leqslant r}\lambda_\alpha\psi_j^\alpha=\begin{cases}\sigma_j & \text{pour } \quad i\leqslant j\leqslant p,\\ \lambda_j\sigma_j & \text{pour } \quad j=i_\alpha,\\ 0 & \text{pour les autres valeurs de } j,\quad 1\leqslant j\leqslant n;\end{cases}$$

$$\sum_{1\leqslant\alpha\leqslant r}\lambda_\alpha\frac{\partial\psi_j^\alpha}{\partial\bar{x}_l}=\begin{cases}1 & \text{pour } \quad 1\leqslant j=l\leqslant p,\\ \lambda_\alpha & \text{pour } \quad j=l=i_\alpha,\\ 0 & \text{dans les autres cas;}\end{cases}$$

$$\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ 1\leqslant\alpha\leqslant r}}\lambda_\alpha(y_j-x_j)\psi_j^\alpha$$
$$=\sum_{1\leqslant j\leqslant p}(y_j-x_j)(\bar{x}_j-\bar{y}_j)+\sum_{1\leqslant\alpha\leqslant r}\lambda_\alpha(y_{i_\alpha}-x_{i_\alpha})(\bar{x}_{i_\alpha}-\bar{y}_{i_\alpha}).$$

La matrice $M_{k\beta l_1\ldots l_{n-r}}$ est obtenue en supprimant, de la matrice M écrite ci-dessous, la ligne d'indice k et la colonne d'indice β, et en ne conservant, parmi les colonnes d'indice $> r$, que celles d'indices $n-p+l_1, \ldots, n-p+l_{n-r}$.

$$M=\left[\begin{array}{c:c:ccc:cc:c:c:c:c}
\sigma_1 & \sigma_1 & \sigma_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\sigma_2 & \sigma_2 & \sigma_2 & 0 & 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & & & & & & \\
 & & & & \vdots & 0 & \vdots & & & & \\
 & & & & & 1 & 0 & & & & \\
\sigma_p & \sigma_p & \sigma_p & & & 0 & 1 & & & & \\
0 & 0 & 0 & & & \vdots & 0 & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots & & & & \\
0 & & & & & & & 0 & & & \\
\sigma_{i_1} & & & & & & & \lambda_1 & & & \\
0 & & & & & & & 0 & & & \\
\vdots & & & & & & & \vdots & 0 & & \\
 & \sigma_{i_\alpha} & & & & & & & \lambda_\alpha & & \\
 & 0 & & & & & & & 0 & & \\
 & \vdots & 0 & & & & & & \vdots & 0 & \\
 & & \sigma_{i_r} & & & & & & & \lambda_r & \\
 & & 0 & & & & & & & 0 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]$$

Pour que le déterminant de la matrice obtenue ne soit pas

nul, il est nécessaire que l'on ait $p+r \geqslant n-1$; mais, si l'on a $p+r=n-1$, le terme

$$\sum_{1 \leqslant \alpha \leqslant r} \lambda_\alpha \psi_k^\alpha$$

qui multiplie le déterminant (dans l'espression de $K(x, y)$ fournie par le théorème 15. 1) est nul (car on a $k>p$ et $k \neq i_\alpha$ pour $1 \leqslant \alpha \leqslant r$); donc la forme différentielle $K(x, y)$ est nulle pour $r<n-p$; pour $r=n-p$, on a

$$K(x, y)=(-1)^n \int_{\substack{\lambda_j \geqslant 0 \\ \sum\limits_{p<j \leqslant n} \lambda_j=1}} \Big(\sum_{1 \leqslant j \leqslant p} |x_j-y_j|^2 + \sum_{p<j \leqslant n} \lambda_j |x_j-y_j|^2\Big)^{-n} \Omega(x, y, \lambda);$$

la matrice écrite ci-dessus devient, pour $p+r=n-1$,

$$M = \left[\begin{array}{cccccccccccc}
\sigma_1 & \sigma_1 & \cdots & \sigma_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\sigma_2 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_2 & 0 & 1 & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & 0 & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\sigma_p & \sigma_p & \cdots & \sigma_p & \vdots & \vdots & \cdots & 1 & 0 & \vdots & \cdots & \vdots \\
\sigma_{p+1} & 0 & \cdots & 0 & \vdots & \vdots & \cdots & 0 & \lambda_{p+1} & 0 & \cdots & \vdots \\
0 & \sigma_{p+2} & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & 0 & \lambda_{p+2} & \cdots & \vdots \\
\vdots & 0 & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & 0 & \cdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \cdots & 0 & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & \sigma_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n
\end{array}\right]$$

Les seuls déterminants non trivialement nuls qui interviennent dans l'expression de $\Omega(x, y, \lambda)$ sont (l'accent qui surmonte un indice signifiant que cet indice est omis) :

i) pour $1 \leqslant k \leqslant p$,

(a) $\det M_{k,\beta,1,\dots,\hat{k},\dots,p,p+\beta} = (-1)^{np+\beta-1}\lambda_{p+\beta} \prod_{\substack{p<j\leqslant n \\ j\neq p+\beta}} \sigma_j$

(b) $\det M_{k,\beta,1,\dots,\hat{\alpha},\dots,\hat{k},\dots,p,p+\gamma,p+\beta}$
$$= (-1)^{(n-1)p+\alpha+\beta-1}\lambda_{p+\gamma}\lambda_{p+\beta}\sigma_\alpha \prod_{\substack{p<j\leqslant n \\ j\neq p+\beta \\ j\neq p+\gamma}} \sigma_j$$

(c) $\det M_{k,\beta,1,\dots,\hat{k},\dots,\hat{\alpha},\dots,p,p+\gamma,p+\beta}$
$$= (-1)^{(n-1)p+\alpha+\beta}\lambda_{p+\gamma}\lambda_{p+\beta}\sigma_\alpha \prod_{\substack{p<j\leqslant n \\ j\neq p+\gamma \\ j\neq p+\beta}} \sigma_j$$

et les deux termes, analogues à (b) et (c), avec $\beta < \gamma$;

ii. Pour $p < k \leqslant n$,

(d) $\det M_{p+\beta,\beta,1,\dots,p} = (-1)^{np} \prod_{\substack{p<j\leqslant n \\ j\neq p+\beta}} \sigma_j$

(e) $\det M_{p+\beta,\beta,1,\dots,\hat{\alpha},\dots,p,p+\gamma}$
$$= (-1)^{(n-1)p+\alpha-1}\lambda_{p+\gamma}\sigma_\alpha \prod_{\substack{p<j\leqslant n \\ j\neq p+\beta \\ j\neq p+\gamma}} \sigma_j \text{ pour } \gamma\neq\beta$$

(f) $\det M_{p+\gamma,p+\beta,1,\dots,\hat{\alpha},\dots,p,p+\beta}$
$$= (-1)^{(n-1)p+\alpha+\beta+\gamma}\lambda_{p+\beta}\sigma_\alpha \prod_{\substack{p<j\leqslant n \\ j\neq p+\beta \\ j\neq p+\gamma}} \sigma_j \text{ pour } \gamma\neq\beta$$

L'expression (a) fournit, dans $\Omega(x, y, \lambda)$, le terme
$$\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant p \\ 1\leqslant\beta\leqslant n-p}} (-1)^{k+\beta}\lambda_{p+\beta}\sigma_k\Big(\prod_{\substack{p<j\leqslant n \\ j\neq p+\beta}} \sigma_j\Big)\Big(\bigwedge_{\substack{p<j\leqslant n \\ j\neq p+\beta}} d\lambda_j\Big)$$
$$\wedge\Big(\bigwedge_{1\leqslant i\leqslant n} dx_i\Big)\wedge\Big(\bigwedge_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ i\neq k}} d\bar{x}_i\Big)\wedge d\bar{x}_{p+\beta};$$

les expressions (b) et (c), dans lesquelles α et k jouent des rôles symétriques, fournissent des termes dont la somme est nulle; il en est de même pour leurs analogues avec $\beta < \gamma$; l'expression (d) fournit le terme
$$\sum_{1\leqslant\beta\leqslant n-p} (-1)^{p+\beta+1}\lambda_{p+\beta}\Big(\prod_{p<j\leqslant n} \sigma_j\Big)\Big(\bigwedge_{\substack{p<j\leqslant n \\ j\neq p+\beta}} d\lambda_j\Big)$$
$$\wedge\Big(\bigwedge_{1\leqslant i\leqslant n} dx_i\Big)\wedge\Big(\bigwedge_{1\leqslant i\leqslant p} d\bar{x}_i\Big);$$

enfin les expressions (e) et (f) fournissent le terme

$$\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant p\\ 1\leqslant\beta<\gamma\leqslant n-p}} (-1)^{k+\beta+\gamma}\lambda_{p+\beta}\lambda_{p+\gamma}\sigma_k\Big(\prod_{\substack{p<j\leqslant n\\ j\neq p+\beta\\ j\neq p+\gamma}}\sigma_j\Big)(d\lambda_{p+\beta}+d\lambda_{p+\gamma})$$
$$\wedge\Big(\bigwedge_{\substack{p<j\leqslant n\\ j\neq p+\beta\\ j\neq p+\gamma}} d\lambda_j\Big)\wedge\Big(\bigwedge_{1\leqslant i\leqslant n} dx_i\Big)\wedge\Big(\bigwedge_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ i\neq k}} d\bar{x}_i\Big)$$
$$\wedge(\sigma_{p+\beta}d\bar{x}_{p+\gamma}-\sigma_{p+\gamma}\,d\bar{x}_{p+\beta}).$$

Considérons les sous-variétés de $X-\{y\}$ sur lesquelles toutes les fonctions ρ_i, $p<i\leqslant n$, sont constantes; sur une telle sous-variété, nous avons les relations

$$(x_{p+\beta}-y_{p+\beta})\sigma_{p+\beta}-(x_{p+\gamma}-y_{p+\gamma})\sigma_{p+\gamma}=0$$

et

$$\Big(\bigwedge_{1\leqslant i\leqslant n} dx_i\Big)\wedge\Big((x_{p+\beta}-y_{p+\beta})\,d\bar{x}_{p+\beta}-(x_{p+\gamma}-y_{p+\gamma})\,d\bar{x}_{p+\gamma}\Big)=0;$$

il en résulte

$$\Big(\bigwedge_{1\leqslant i\leqslant n} dx_i\Big)\wedge(\sigma_{p+\beta}\,d\bar{x}_{p+\gamma}-\sigma_{p+\gamma}\,d\bar{x}_{p+\beta})=0$$

et le terme fourni par (e) et (f) s'annule sur les sous-variétés considérées. Donc, pour $r=n-p$, $K(x, y)$ est la somme d'une forme différentielle qui s'annule sur ces sous-variétés, et de la forme différentielle

$$H(x, y)=(-1)^n\Big(\prod_{1\leqslant i\leqslant n}\sigma_i\Big)\Big(\bigwedge_{1\leqslant i\leqslant n} dx_i\Big)$$
$$\wedge\sum_{p<i\leqslant n}(-1)^{i-1}\left[\int_{\substack{\lambda_j>0\\ \sum_{p<j\leqslant n}\lambda_j=1}}\frac{\lambda_i\Big(\bigwedge_{\substack{j\neq i\\ p<j\leqslant n}} d\lambda_j\Big)}{\Big(\sum_{1\leqslant j\leqslant p}|x_j-y_j|^2+\sum_{p<j\leqslant n}\lambda_j|x_j-y_j|^2\Big)^n}\right]$$
$$\times\left[\Big(\bigwedge_{1\leqslant h\leqslant p}\frac{d\bar{x}_h}{\sigma_h}\Big)-\sum_{1\leqslant k\leqslant p}(-1)^{k-1}\frac{d\bar{x}_i}{\sigma_i}\wedge\Big(\bigwedge_{\substack{h\neq k\\ 1\leqslant h\leqslant p}}\frac{d\bar{x}_h}{\sigma_h}\Big)\right].$$

Le calcul de l'intégrale qui figure dans cette expression est l'objet du paragraphe 19, où le résultat est fourni par le théorème 19. 2; compte-tenu de ce résultat, on obtient le théorème 16. 1. Ce théorème nous fournit un résultat qui sera

utilisé, dans le paragraphe 18, pour établir les formules intégrales de E. Martinelli.

17. Le noyau de A. Weil.

Nous supposerons maintenant que les fonctions θ_j^α, $1 \leqslant \alpha \leqslant r$, $1 \leqslant j \leqslant n$, qui figurent dans l'énoncé du théorème 15. 2, sont holomorphes par rapport à x, et nous calculerons explicitement l'intégrale exprimant la forme différentielle $K(x, y)$; nous obtiendrons ainsi le théorème suivant.

Théorème 17. 1. — *Si les applications θ^α, $1 \leqslant \alpha \leqslant r$, vérifiant les hypothèses du théorème* 15. 2, *sont holomorphes par rapport à x, alors on a $K(x, y) = 0$ pour $r < n$, tandis que, pour $r = n$, on a*

$$K(x, y) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant n} \Big(\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} (x_j - y_j)\, \theta_j^i \Big)^{-1} \Big(\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \theta_j^i\, dx_j \Big);$$

cette forme différentielle sera appelée noyau de A. Weil généralisé.

La simplicité de cette expression est due à celle de la matrice $N_{k\beta l_1 \ldots l_{n-r}}$, sous les hypothèses de ce théorème; on a en effet

$$N_{k\beta l_1 \ldots l_{n-r}} = \Big((\theta_j^\alpha)_{\substack{1 \leqslant \alpha \leqslant r,\ \alpha \neq \beta \\ 1 \leqslant j \leqslant n,\ j \neq k}}, 0 \Big)$$

où 0 désigne la matrice à $n - 1$ lignes et $n - r$ colonnes dont tous les éléments sont nuls; pour que le déterminant de la matrice $N_{k\beta l_1 \ldots l_{n-r}}$ ne soit pas nul, il faut que l'on ait $r = n$; dans ce cas, on a

$$\det N_{k\beta} = \det \Big((\theta_j^i)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n,\ i \neq \beta \\ 1 \leqslant j \leqslant n,\ j \neq k}} \Big)$$

et

$$\Omega'(x, y, \lambda) = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant \beta \leqslant n \\ 1 \leqslant i \leqslant n}} (-1)^{k+1} \frac{\lambda_i \theta_k^i}{\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} (x_j - y_j)\, \theta_j^i}$$

$$\times \frac{\det \Big((\theta_l^h)_{\substack{1 \leqslant h \leqslant n,\ h \neq \beta \\ 1 \leqslant l \leqslant n,\ l \neq k}} \Big)}{\prod_{\substack{1 \leqslant h \leqslant n \\ h \neq \beta}} \Big(\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} (x_j - y_j)\, \theta_j^h \Big)} \Big(\bigwedge_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq \beta}} d\lambda_j \Big) \wedge \Big(\bigwedge_{1 \leqslant j \leqslant n} dx_j \Big).$$

On obtient alors la relation

$$K(x,y)=(-1)^n \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant \beta\leqslant n\\ 1\leqslant i\leqslant n}} \frac{(-1)^{k+1}\theta_k^i}{\sum_{1\leqslant j\leqslant n}(x_j-y_j)\theta_j^i}$$

$$\times\left[\int_{\substack{\lambda_j\geqslant 0\\ \sum_{1\leqslant j\leqslant n}\lambda_j=1}} \lambda_i\Big(\bigwedge_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq\beta}} d\lambda_j\Big)\right]\frac{\det\left((\theta_l^h)_{\substack{1\leqslant h\leqslant n,\ h\neq\beta\\ 1\leqslant l\leqslant n,\ l\neq k}}\right)}{\prod_{\substack{1\leqslant h\leqslant n\\ h\neq\beta}}\Big(\sum_{1\leqslant j\leqslant n}(x_j-y_j)\theta_j^h\Big)}\Big(\bigwedge_{1\leqslant j\leqslant n} dx_j\Big).$$

Or on établit aisément la formule

$$\int_{\substack{\lambda_j\geqslant 0\\ \sum_{1\leqslant j\leqslant n}\lambda_j=1}} \lambda_i\Big(\bigwedge_{1\leqslant j\leqslant n}^{j\neq\beta} d\lambda_j\Big)=\frac{(-1)^{\beta-1}}{n!}\quad \text{pour}\quad 1\leqslant i\leqslant n.$$

On obtient donc

$$K(x,y)=\frac{(-1)^n}{n!}\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant \beta\leqslant n\\ 1\leqslant i\leqslant n}} \frac{(-1)^{k+\beta}\theta_k^i\det\left((\theta_l^h)_{\substack{1\leqslant h\leqslant n,\ h\neq\beta\\ 1\leqslant l\leqslant n,\ l\neq k}}\right)\Big(\bigwedge_{1\leqslant j\leqslant n} dx_j\Big)}{\Big(\sum_{1\leqslant j\leqslant n}(x_j-y_j)\theta_j^i\Big)\prod_{\substack{1\leqslant h\leqslant n\\ h\neq\beta}}\Big(\sum_{1\leqslant j\leqslant n}(x_j-y_j)\theta_j^h\Big)}.$$

En vertu des relations

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n}(-1)^{k+\beta}\theta_k^\beta\det\left((\theta_l^h)_{\substack{1\leqslant h\leqslant n,\ h\neq\beta\\ 1\leqslant l\leqslant n,\ l\neq k}}\right)=\det\left((\theta_l^h)_{\substack{1\leqslant h\leqslant n\\ 1\leqslant l\leqslant n}}\right)$$

et
$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n}(-1)^{k+i}\theta_k^i\det\left((\theta_l^h)_{\substack{1\leqslant h\leqslant n,\ h\neq\beta\\ 1\leqslant l\leqslant n,\ l\neq k}}\right)=0,\quad i\neq\beta,$$

on obtient enfin

$$K(x,\,y)=\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\Big(\prod_{1\leqslant i\leqslant n}\Big(\sum_{1\leqslant j\leqslant n}(x_j-y_j)\,\theta_j^i\Big)\Big)^{-1}$$
$$\times\det\left((\theta_l^h)_{\substack{1\leqslant h\leqslant n,\ h\neq\beta\\ 1\leqslant l\leqslant n,\ l\neq k}}\right)\cdot\Big(\bigwedge_{1\leqslant i\leqslant n} dx_i\Big)$$

d'où résulte l'expression indiquée dans le théorème 17.1.

En particularisant les fonctions $\theta_j^i(x,\,y)$ qui figurent dans ce théorème, on obtient les corollaires suivants :

COROLLAIRE 17. 1. — *Soit* $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *une famille de fonctions holomorphes dans* X, *et soit*

$$\theta_j^i=\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\qquad 1\leqslant i\leqslant n,\qquad 1\leqslant j\leqslant n;$$

on a alors

$$K(x, y) = \frac{(-1)^n}{n!} \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} (x_j - y_j) \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right)^{-1} . dX_i$$

COROLLAIRE 17. 2. — *Soient* $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *une famille de fonctions holomorphes dans* X, *et* $(P_{jk})_{1 \leqslant j \leqslant n,\ 1 \leqslant k \leqslant n}$ *une famille de fonctions holomorphes dans* $X \times X$, *vérifiant les relations*

$$X_i(x) - X_i(y) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} (x_j - y_j) P_{ij}(x, y), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n;$$

soit enfin

$$\theta^i_j = P_{ij}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n;$$

on a alors

$$K(x, y) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant n} (X_i(x) - X_i(y))^{-1} . \left(\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} P_{ij} dx_j \right)$$

Ce dernier noyau est celui qui figure effectivement dans la formule intégrale de A. Weil. C'est cette formule que nous allons maintenant déduire, ainsi que celles de E. Martinelli, de la formule de Cauchy-Fantappiè.

18. Démonstration de formules intégrales à l'aide de la formule de Cauchy-Fantappiè.

Les considérations des paragraphes 15, 16 et 17 ne nécessitaient aucune hypothèse sur le domaine X; nous devons maintenant supposer X convexe, afin d'écrire la formule de Cauchy-Fantappiè; pour écrire cette formule, nous déterminerons un cycle particulier appartenant à $h(Q - P(y) \cap Q)$.

Supposons y fixé; soit alors K un domaine borné vérifiant $y \in K \Subset X$; supposons la frontière de K réunion finie

$$S = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant u} S_i$$

de parties d'hypersurfaces régulières (de dimension réelle $2n - 1$) dont un nombre quelconque possèdent toujours une intersection régulière; soit η^i une application continue et dérivable d'un voisinage U_i de $\bar{S}_i$ dans Ξ, vérifiant les conditions suivantes :

i. $\eta^i . x = \eta^i_0(x) + \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} x_j \eta^i_j(x) = 0$ pour $x \in U_i$;

ii. pour tout $x \in S_{i_1 \dots i_r} = \bigcap_{1 \leqslant \alpha \leqslant r} S_{i_\alpha}$, la famille de vecteurs

$$(\psi^\alpha(x))_{1 \leqslant \alpha \leqslant r} = (\eta^{i_\alpha}(x))_{1 \leqslant \alpha \leqslant r}$$

est libre sur le corps des nombres réels;

iii. pour tout x vérifiant

$$x \in S_{i_1 \dots i_r} \qquad \text{et} \qquad x \notin S_i \qquad \text{pour} \qquad i \neq i_\alpha, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant r$$

et pour tous nombres réels λ_α, $1 \leqslant \alpha \leqslant r$, vérifiant

$$\lambda_\alpha \geqslant 0, \qquad \sum_{1 \leqslant \alpha \leqslant r} \lambda_\alpha = 1,$$

on a la relation

$$\Big(\sum_{1 \leqslant \alpha \leqslant r} \lambda_\alpha \psi^\alpha\Big) \cdot y \neq 0.$$

Ainsi, à chaque arête $S_{i_1 \dots i_r}$ nous associons une famille $(\psi^\alpha)_{1 \leqslant \alpha \leqslant r}$; puis, selon la construction effectuée en début du paragraphe 15, une partie $T_{i_1 \dots i_r}$ de $\Xi \times X$, dont nous désignerons l'image dans $\Xi^* \times X$ par $T^*_{i_1 \dots i_r}$; enfin, conformément au théorème 15. 1, une forme différentielle $K_{i_1 \dots i_r}(x, y)$. Le cycle

$$T^* = \bigcup_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_r \leqslant p} T^*_{i_1 \dots i_r},$$

orienté de telle sorte que l'on ait

$$\int_{T^*} (i(\xi \cdot y))^{-n} \omega'(\xi) \wedge \omega(x) > 0,$$

peut être utilisé comme cycle d'intégration dans la formule de Cauchy-Fantappiè; on obtient alors le résultat suivant :

Théorème 18. 1. — *Si f est une fonction holomorphe dans* X, *on a la relation*

$$\text{(A)} \quad f(y) = \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \sum_{\substack{1 \leqslant r \leqslant n \\ 1 \leqslant i_1 < \dots < i_r \leqslant n}} (-1)^{n-r-1} \int_{S_{i_1 \dots i_r}} f(x) K_{i_1 \dots i_r}(x, y).$$

Dans cette relation, les arêtes $S_{i_1 \dots i_r}$ sont orientées de manière naturelle, la partie régulière de la frontière de K étant orientée de l'intérieur vers l'extérieur; le signe qui précède l'intégrale est fixé par le choix de l'orientation de T^*; on le

détermine en remarquant que la relation ci-dessus admet comme cas particulier la relation (3) du paragraphe 14.

Le cas particulier le plus simple du théorème 18. 1 est obtenu avec $p = 1$; on obtient alors :

THÉORÈME 18. 2. — *Si l'on a $p = 1$, et si f est une fonction holomorphe dans* X, *on a la relation*

$$f(y) = \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \times \int_S \frac{f(x)\left(\bigwedge_{1\leqslant i\leqslant n} dx_i\right) \wedge \sum_{\substack{1\leqslant h\leqslant n \\ \leqslant k\leqslant n}} (-1)^{k-1} \psi_k \, det\left(\left(\frac{\partial\psi_j}{\partial\bar{x}_i}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n,\ i\neq h \\ 1\leqslant j\leqslant n,\ j\neq k}}\right)\left(\bigwedge_{\substack{i\neq h \\ 1\leqslant i\leqslant n}} d\bar{x}_i\right)}{\left(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} (x_i - y_i)\psi_i\right)^n}$$

Si l'on suppose que les ψ^α vérifient toujours les conditions indiquées dans le théorème 15. 2, on peut évidemment effectuer le calcul des noyaux à l'aide du résultat de ce théorème; c'est ce que nous ferons pour établir la formule intégrale de A. Weil; cette dernière formule figure parmi les cas particuliers du théorème 18. 1, pour lesquels les intégrales sur les arêtes $S_{i_1 \dots i_r}$ s'annulent sauf pour une valeur déterminée de r; nous établirons d'abord les intégrales de E. Martinelli, ensuite une généralisation de l'intégrale de A. Weil.

THÉORÈME 18. 3. — *Si* X *est l'espace* E *entier, si* K *est défini par les inégalités*

$$\varphi_i = \left(\sum_{1\leqslant j\leqslant p} |x_j - y_j|^2\right) + |x_i - y_i|^2 - 1 < 0, \qquad p < i \leqslant n,$$

alors on a, pour toute fonction f holomorphe au voisinage de $\overline{\mathrm{K}}$, *la relation*

$$f(y) = (-1)^{p-1} \frac{(p-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{S'(y)} f(x)\, \mathrm{H}(x, y)$$

où $S'(y)$ *est l'intersection des sous-variétés d'équations* $\varphi_i(x, y) = 0$, $p < i \leqslant n$, *l'expression de la forme différentielle* $\mathrm{H}(x, y)$ *ayant été donnée par le théorème* 16. 1.

Ceci résulte immédiatement du théorème 18. 1, si l'on tient compte de l'expression des noyaux $K_{i_1 \dots i_r}(x, y)$, donnée par le théorème 16. 1.

Le théorème 18. 3 fournit des formules intégrales que nous appellerons *formules de E. Martinelli*; toutefois, pour démontrer les formules générales établies par E. Martinelli dans [7], il est nécessaire de développer des considérations topologiques que l'on trouvera dans le mémoire de cet auteur. Nous nous intéresserons maintenant à l'intégrale de A. Weil.

THÉORÈME 18. 4. — *Si les hypothèses fondamentales de ce paragraphe sont réalisées avec*

$$\eta^i = \Big(\sum_{1\leqslant j\leqslant n}(x_j-y_j)\theta^i_j\Big)^{-1}\theta^i, \quad 1\leqslant i\leqslant p, \quad 1\leqslant j\leqslant n, \quad n\leqslant p,$$

et si les fonctions θ^i_j *sont holomorphes par rapport à* x, *on a, pour toute fonction* f *holomorphe dans* X, *la relation*

$$\text{(B)}\quad f(y)=\frac{1}{(2i\pi)^n}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_n\leqslant p}\int_{S_{i_1\ldots i_n}} f(x)\bigwedge_{1\leqslant\alpha\leqslant n}\frac{\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\theta^{i_\alpha}_j dx_j}{\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant n}(x_j-y_j)\theta^{i_\alpha}_j}.$$

Cette formule, que nous appellerons *formule de A. Weil généralisée*, résulte du théorème 18. 1, si l'on exprime les noyaux $K_{i_1\ldots i_r}(x, y)$ en tenant compte du théorème 17. 1. Aux corollaires 17. 1 et 17. 2 correspondent de même les résultats suivants :

COROLLAIRE 18. 1. — *Supposons que le domaine* K *est un polyèdre analytique défini dans* X *par les inégalités* $|X_i|<1$, $1\leqslant i\leqslant p$, *les fonctions* X_i *étant holomorphes dans* X; *si* K *est convexe, on a, pour toute fonction* f *holomorphe dans* X, *la relation*

$$f(y)=\frac{1}{(2i\pi)^n}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_n\leqslant p}\int_{S_{i_1\ldots i_n}} f(x)\bigwedge_{1\leqslant\alpha\leqslant n}\frac{dX_{i_\alpha}}{\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant n}(x_j-y_j)\dfrac{\partial X_{i_\alpha}}{\partial x_j}}.$$

COROLLAIRE 18. 2. — *Supposons que le domaine* K *est un polyèdre analytique défini dans* X *par les inégalités* $|X_i|<1$, $1\leqslant i\leqslant p$, *les fonctions* X_i *étant holomorphes dans* X; *soit* $(P_{jk})_{1<j\leqslant n,\,1<k<n}$ *une famille de fonctions, holomorphes dans* X × X, *vérifiant les relations*

$$X_i(x)-X_i(y)=\sum_{1\leqslant j\leqslant n}(x_j-y_j)P_{ij}(x, y), \quad 1\leqslant i\leqslant n;$$

on a alors la formule intégrale de A. Weil

$$f(y) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_n \leqslant p} \int_{S_{i_1 \ldots i_n}} f(x) \bigwedge_{1 \leqslant \alpha \leqslant n} \frac{\sum\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} P_{i_\alpha j}(x, y)\, dx_j}{X_{i_\alpha}(x) - X_{i_\alpha}(y)}.$$

Pour établir ce corollaire, il faut remarquer que l'hypothèse iii. écrite au début de ce paragraphe est réalisée en vertu de la relation ci-dessus entre les X_j et les P_{jk}. Si X est un domaine d'holomorphie, et si les fonctions X_i sont données, il existe toujours des fonctions P_{jk} vérifiant la condition ci-dessus.

19. Démonstration d'une identité utilisée dans le paragraphe 16. Le résultat essentiel démontré dans ce paragraphe est exprimé par le théorème suivant :

Théorème 19. 1. — *On a les identités suivantes, pour $h \leqslant n-2$;*

$$\int_{\substack{u_i > 0 \\ \sum\limits_{0 \leqslant i \leqslant h} u_i < 1}} \frac{\bigwedge\limits_{0 \leqslant i \leqslant h} du_i}{\left(A + \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant h} B_i u_i\right)^n}$$

$$= (-1)^h \frac{(n-h-2)\,!}{(n-1)\,!} \sum_{1 \leqslant q \leqslant n-h-1} \frac{1}{A^q} \left[\frac{1}{\left(\prod\limits_{1 \leqslant j \leqslant h} B_j\right) A^{n-h-q}} - \sum_{1 \leqslant i \leqslant h} \frac{1}{B_i \left(\prod\limits_{\substack{j \neq i \\ 1 \leqslant j \leqslant h}} (B_j - B_i)\right) (A + B_i)^{n-h-q}} \right]$$

$$= (-1)^h \frac{(n-h-2)\,!}{(n-1)\,!} \sum_{\substack{\beta_j \geqslant 0 \\ \sum\limits_{0 \leqslant j \leqslant h} \beta_j = n-h-1}} \beta_0 A^{-1-\beta_0} \left(\prod_{1 \leqslant j \leqslant h} (A + B_j)^{-1-\beta_j} \right).$$

De ce théorème, on déduit immédiatement l'identité utilisée dans le paragraphe 16, et exprimée par le théorème suivant :

Théorème 19. 2. — *On a l'identité*

$$\int_{\substack{\lambda_j > 0 \\ \sum\limits_{p < j \leqslant n} \lambda_j = 1}} \frac{\lambda_{p+k} \left(\bigwedge\limits_{\substack{j \neq p+k \\ p+1 \leqslant j \leqslant n}} d\lambda_j \right)}{\left(\sum\limits_{1 \leqslant j \leqslant p} x_j \bar{x}_j + \sum\limits_{p < j \leqslant n} \lambda_j x_j \bar{x}_j \right)^n} = (-1)^{n-p+k} \frac{(p-1)\,!}{(n-1)\,!}$$

$$\times \sum_{\substack{\beta_j \geqslant 0 \\ \sum\limits_{p < j \leqslant n} \beta_j = p}} \beta_{p+k} \left(\prod_{p < j \leqslant n} \left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant p} x_i \bar{x}_i + x_j \bar{x}_j \right)^{-1-\beta_j} \right)$$

En effet, la relation

$$\lambda_{p+k} = 1 - \sum_{\substack{j \neq p+k \\ p<j\leqslant n}} \lambda_j$$

est vérifiée sur la variété où l'on intègre; on en déduit

$$\sum_{p<j\leqslant n} \lambda_j x_j \bar{x}_j = x_{p+k}\bar{x}_{p+k} + \sum_{\substack{j \neq p+k \\ p<j\leqslant n}} \lambda_j (x_j\bar{x}_j - x_{p+k}\bar{x}_{p+k}).$$

Donc, si l'on pose

$$\mathrm{A} = \sum_{1\leqslant j\leqslant p} x_j\bar{x}_j + x_{p+k}\bar{x}_{p+k},$$

$$(\mathrm{B}_i)_{1\leqslant i\leqslant h} = (x_j\bar{x}_j - x_{p+k}\bar{x}_{p+k})_{p<j\leqslant n,\ j\neq p+k}, \qquad h = n-p-1,$$

$$(u_i)_{1\leqslant i\leqslant h} = (\lambda_j)_{p<j\leqslant n,\ j\neq p+k},$$

on est amené à calculer l'intégrale

$$\int_{\substack{u_i>0 \\ \sum_{1\leqslant i\leqslant h} u_i<1}} (-1)^{k-1} \frac{\left(1-\sum_{1\leqslant i\leqslant h} u_i\right)\left(\bigwedge_{1\leqslant i\leqslant h} du_i\right)}{\left(\mathrm{A}+\sum_{1\leqslant i\leqslant h} \mathrm{B}_i u_i\right)^n},$$

c'est-à-dire

$$\int_{\substack{u_i>0 \\ \sum_{0\leqslant i\leqslant h} u_i<1}} \frac{(-1)^{k+1} \bigwedge_{0\leqslant i\leqslant h} du_i}{\left(\mathrm{A}+\sum_{1\leqslant i\leqslant h} \mathrm{B}_i u_i\right)^n};$$

le résultat de ce calcul est fourni par le théorème 19. 1.

La première identité qui figure dans le théorème 19. 1 est obtenue aisément en intégrant successivement par rapport à chaque variable; la seconde résultera d'une suite d'identités que nous allons indiquer au préalable.

Identité 19. 1.

$$\prod_{1\leqslant j<k\leqslant h} (x_k - x_j) = \sum_{1\leqslant i\leqslant h} (-1)^{i-1} \left(\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant h \\ j\neq i}} x_j\right)\left(\prod_{\substack{1\leqslant j<k\leqslant h \\ j\neq i,\ k\neq i}} (x_k - x_j)\right).$$

La démonstration de cette identité est immédiate.

Identité 19. 2.

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant h}(-1)^{i-1}\Bigg(\prod_{\substack{1\leqslant j<k\leqslant h\\ j\neq i,\, k\neq i}}(x_k-x_j)\Bigg)\Bigg(\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant h\\ j\neq i}}x_j^q\Bigg)$$
$$=\Bigg(\prod_{1\leqslant j<k\leqslant h}(x_k-x_j)\Bigg)\Bigg(\sum_{\substack{\beta_j\geqslant 0\\ \sum_{1\leqslant j\leqslant h}\beta_j=q-1}}\Bigg(\prod_{1\leqslant j\leqslant h}x_j^{q-\beta_j-1}\Bigg)\Bigg)$$

Pour démontrer cette identité, on remarque que l'expression, figurant au premier membre, s'annule pour $x_j=x_k$, $1\leqslant j<k\leqslant h$; elle est donc divisible par x_k-x_j; elle est par conséquent égale au produit de

$$\prod_{1\leqslant j<k\leqslant h}(x_k-x_j)$$

par un polynôme, homogène de degré $(h-1)(q-1)$,

$$\mathrm{P}=\sum_{\substack{0\leqslant\alpha_j\leqslant q+h-2\\ \sum_{1\leqslant j\leqslant h}\alpha_j=(h-1)(q-1)}}\gamma_{(\alpha_j)_{1\leqslant j\leqslant h}}\Bigg(\prod_{1\leqslant j\leqslant h}x_j^{\alpha_j}\Bigg);$$

compte-tenu de l'identité 19. 1, on obtient donc l'identité

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant h}(-1)^{i-1}\Bigg(\prod_{\substack{1\leqslant j<k\leqslant h\\ j\neq i,\, k\neq i}}(x_k-x_j)\Bigg)\Bigg(\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant h\\ j\neq i}}x_j\Bigg)\Bigg[\Bigg(\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant h\\ j\neq i}}x_j^{q-1}\Bigg)-\mathrm{P}\Bigg]=0,$$

d'où résultent l'inégalité $\alpha_j\leqslant q-1$ et l'égalité des $\gamma_{(\alpha_j)}$; en cherchant dans l'expression de P le terme avec $\alpha_j=q-1$ pour $j\neq i$ et $\alpha_i=0$, on voit que tous les $\gamma_{(\alpha_j)}$ sont égaux à 1; en posant $\beta_j=q-\alpha_j-1$, on obtient l'expression qui figure au second membre de l'identité 19. 2.

De l'identité 19. 2 résultent immédiatement les deux suivantes :

Identité 19. 3.

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant h}\Bigg(\prod_{\substack{j\neq i\\ 1\leqslant j\leqslant h}}(x_j-x_i)\Bigg)^{-1}x_i^{-q}=\sum_{\substack{\beta_j\geqslant 0\\ \sum_{1\leqslant j\leqslant h}\beta_j=q-1}}\Bigg(\prod_{1\leqslant j\leqslant h}x_j^{-1-\beta_j}\Bigg)$$

Identité 19. 3'.

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant h}\Bigg(\prod_{\substack{j\neq i\\ 1\leqslant j\leqslant h}}(\mathrm{B}_j-\mathrm{B}_i)\Bigg)^{-1}(\mathrm{A}+\mathrm{B}_i)^{-q}$$
$$=\sum_{\substack{\beta_j\geqslant 0\\ \sum_{1\leqslant j\leqslant h}\beta_j=q-1}}\Bigg(\prod_{1\leqslant j\leqslant h}(\mathrm{A}+\mathrm{B}_j)^{-1-\beta_j}\Bigg).$$

Des identités 19. 1 et 19. 3′ on déduit l'identité 19. 4.

Identité 19. 4.

$$\Big(\prod_{1\leqslant j\leqslant h} B_j\Big)^{-1} A^{-q} - \sum_{1\leqslant i\leqslant h} B_i^{-1}\Big(\prod_{\substack{j\neq i\\ 1\leqslant j\leqslant h}} (B_j - B_i)\Big)^{-1} (A+B_i)^{-q}$$
$$= \sum_{\substack{\beta_j\geqslant 0\\ \sum_{0\leqslant j\leqslant h}\beta_j = q-1}} A^{-1-\beta_0}\Big(\prod_{1\leqslant j\leqslant h}(A+B_j)^{-1-\beta_j}\Big)$$

En effet, si on réduit au même dénominateur les fractions qui figurent au premier membre de cette identité, si on tient compte de l'identité 19. 1 pour transformer le numérateur de la fraction obtenue et si on effectue des mises en facteurs évidentes, il ne reste qu'à tenir compte de l'identité 19. 3′ pour obtenir le résultat annoncé. De l'identité 19. 4 résulte immédiatement l'identité 19. 5.

Identité 19. 5.

$$\sum_{1\leqslant q\leqslant n-h-1} A^{-q}\Big[\Big(\prod_{\leqslant j\leqslant h} B_j\Big)^{-1} A^{q+h-n}$$
$$- \sum_{1\leqslant i\leqslant h} B_i^{-1}\Big(\prod_{\substack{j\neq i\\ 1\leqslant j\leqslant h}}(B_j - B_i)\Big)^{-1}(A+B_i)^{q+h-n}\Big]$$
$$= \sum_{\substack{\beta_j\geqslant 0\\ \sum_{0\leqslant j\leqslant h}\beta_j = n-h-1}} \beta_0 A^{-1-\beta_0}\Big(\prod_{1\leqslant j\leqslant h}(A+B_j)^{-1-\beta_j}\Big).$$

Cette relation établit la seconde identité du théorème 19. 1; la première identité de ce théorème se démontre aisément par récurrence en intégrant successivement par rapport aux variables $u_1, \ldots, u_n, u_0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Grothendieck Alexandre, Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tohoku Math. J.*, 9, 1957, 119-221.

[2] Lelong Pierre, Integration of a differential form on an analytic complex subvariety, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 43, 1957, 246-248.

[3] Lelong Pierre, Intégration sur un ensemble analytique complexe, *Bull. Soc. Math. France*, 85, 1957, 239-262.

[4] Lepage Théophile, Sur certaines congruences de formes alternées, *Bull. Soc. Roy. Liège*, 1946, 21-31.

[5] Leray Jean, Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe (Problème de Cauchy, III), *Bull. Soc. Math. France*, 87, 1959, 81-180.

[6] Martinelli Enzo, Alcuni teoremi integrali per le funzioni analitiche di più variabili complesse, *Mem. r. Accad. Ital.*, 9, 1938, 269-283.

[7] Martinelli Enzo, Sulle estensioni della formula integrale di Cauchy alle funzioni analitiche di più variabili complesse, *Annali Mat. pura ed appl.*, Serie 4, t. 34, 1953, 277-347.

[8] Norguet François, Sur les domaines d'holomorphie des fonctions uniformes de plusieurs variables complexes (Passage du local au global), *Bull. Soc. Math. France*, 82, 1954, 137-159.

[9] Norguet François, Produit tensoriel et produit de composition des courants, *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 239, 1954, 667-669.

[10] Norguet François, Sur le produit de composition des courants et le nombre algébrique d'intersections de deux chaînes, *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 240, 1955, 830-832.

[11] Norguet François, Sur l'homologie associée à une famille de dérivations, *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 247, 1958, 1081-1083.

[12] Norguet François, Sur la théorie des résidus, *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 248, 1959, 2057-2059.

[13] Norguet François, Représentations intégrales des fonctions de plusieurs variables complexes, *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 250, 1960.

[14] Papy Georges, Sur l'arithmétique dans les algèbres de Grassmann, *Mém. Acad. Roy. Belgique*, Cl. des Sci., 26, 1952, 1-108.

[15] De Rham Georges, Sur la division de formes et de courants par une forme linéaire, *Comment. Math. Helvet.*, 28, 1954, 346-352.

[16] De Rham Georges, Variétés différentiables; formes, courants, formes harmoniques, *Actualités Scientifiques et Industrielles*, 1222, Hermann, Paris, 1955.

[17] Schwartz Laurent, Théorie des distributions, *Actualités Scientifiques et Industrielles*, 1091 et 1122, Hermann, Paris, 1950 et 1951.

[18] Schwartz Laurent, Courant associé à une forme différentielle méromorphe sur une variété analytique complexe, *Colloque international de Géométrie différentielle*, Strasbourg, 1953, pp. 185-195.

[19] Serre Jean-Pierre, Algèbre locale, multiplicités, *Cours au Collège de France*, 1957-1958, multigraphié.

[20] Sommer Friedrich, Über die Integralformeln in der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen, *Math. Ann.*, 125, 1952, 172-182.

[21] Weil André, L'intégrale de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables, *Math. Ann.*, 111, 1935, 178-182.

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
11 (1961), 83-87.

A SIMPLEX WITH DENSE EXTREME POINTS

By Ebbe Theu POULSEN (Aarhus)

1. — Introduction.

Let L be a locally convex linear topological space, and let C be a compact convex subset of L. The Krein-Milman theorem [3] asserts that C is the closed convex hull of the set E(C) of extreme points of C. It follows that for every $x \in C$ there exists a positive measure μ_x of mass 1 on $\overline{E(C)}$ such that

$$x = \int_{\overline{E(C)}} y d\mu_x(y).$$

This representation is of little interest in the case where $C = \overline{E(C)}$, and according to a result due to Klee [2] this is the rule rather than the exception.

Recently Choquet [1] has shown that if C is metrizable the measures μ_x may be chosen so as to be supported by E(C) itself, and furthermore that these measures are uniquely determined if and only if C is a simplex (i.e. such that the intersection of any two positive homothetic images of C is either empty, a single point or a positive homothetic image of C).

The question is raised by Choquet whether the situation $C = \overline{E(C)}$ can arise when C is a simplex. It is the object of this note to construct an example which shows that the answer is affirmative. The ideas governing the construction

are closely related to the ideas of [4] where a simple example of a convex set with dense extreme points is exhibited. In § 2 we perform the actual construction of the simplex S and observe that $S = \overline{E(S)}$, and in § 3 we prove that S really is a simplex.

2. — Construction of the example.

In the Hilbert space l^2 of sequences

$$x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$$

we denote by e_j the unit vector having the coordinates $\xi_i = \delta_{ij}$. Further, we denote by E_n the subspace spanned by $e_1, e_2, \ldots, e_n$ and by P_n the projection on E_n.

We first construct a sequence of simplexes S_n with the following properties:

(i) $S_n \subset E_n$ for every n.

(ii) $S_n \subset S_m$ and $E(S_n) \subset E(S_m)$ for $n < m$.

(iii) $P_n S_m = S_n$ for $n < m$.

(iv) for every $\varepsilon > 0$ there exists an n such that every point of S_n has distance at most ε from $E(S_n)$.

The construction of the simplexes S_n falls in groups as follows:

a) The first group consists of one simplex

$$S_1 = \{x | 0 \leqq \xi_1 \leqq 2^{-1};\ x \in E_1\}.$$

b) Assume that $S_1, S_2, \ldots, S_{n_p}$ have been constructed, S_{n_p} being the last simplex in the p'th group. Choose points $y_1, y_2, \ldots, y_{q_p}$ in S_{n_p} such that every point of S_{n_p} has distance at most 2^{-p} from the set $\{y_1, y_2, \ldots, y_{q_p}\}$.

For $n_p < k \leqq n_p + q_p = n_{p+1}$ we define

$$z_k = y_{k-n_p} + 2^{-k} e_k,$$

whereupon we define S_k as the convex hull of the set

$$S_{n_p} \cup \{z_{n_p+1}, \ldots, z_k\}.$$

With this construction it is clear that the sets S_n are simplexes satisfying (i), (ii), (iii) and (iv).

Now define

$$T_n = P_n^{-1}(S_n) = \{x \mid P_n x \in S_n\}$$

and

$$S = \bigcap_{n=1}^{\infty} T_n$$

It then follows that

(ii′) $T_n \supset T_m$ for $n < m$.

(iii′) $P_n T_m = S_n$ for $n < m$.

(iii″) $P_n S = S_n$ for all n.

(iv′) The set $\bigcup_{n=1}^{\infty} E(S_n)$ is dense in S.

Thus, to prove that $S = \overline{E(S)}$ it suffices to prove that $E(S_n) \subset E(S)$ for all n. The proof of this is exactly the same as in [4], but it is so short that we may as well repeat it here: Let $z \in E(S_n)$ and let $y \neq 0$. Then there exists $m \geq n$ so that $P_m y \neq 0$, and by (ii) $z \in E(S_m)$. Therefore, the segment

$$\{x \mid x = z + tP_m y;\ -1 \leq t \leq 1\} \not\subset S_m,$$

and consequently

$$\{x \mid x = z + ty;\ -1 \leq t \leq 1\} \not\subset S.$$

Hence, $z \in E(S)$.

Finally, let us note for completeness that S is compact and convex.

3. — Proof that S is a simplex.

We must prove that every set of the form

$$A = S \cap (qS + a) \quad \text{with} \quad q > 0$$

containing at least two points is itself of the form

$$A = rS + b \quad \text{with} \quad r > 0.$$

Now since

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} T_n \cap \left(q \bigcap_{n=1}^{\infty} T_n + a\right)$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} (T_n \cap (qT_n + a))$$

each of the sets $T_n \cap (qT_n + a)$ contains at least two points, and therefore

$$P_n(T_n \cap (qT_n + a)) = S_n \cap (qS_n + a_n),$$

where $a_n = P_n a$, is non-empty for every n and contains at least two points for sufficiently large n.

Since S_n is a simplex, we have

$$S_n \cap (qS_n + a_n) = r_n S_n + b_n \qquad \text{with} \qquad r_n \geqq 0$$

for every n and $r_n > 0$ for sufficiently large n. Now, for $m > n$ we have

$$P_n(S_m \cap (qS_m + a_m)) \subset P_n S_m \cap P_n(qS_m + a_m),$$

i.e. $$P_n(r_m S_m + b_m) \subset S_n \cap (qS_n + a_n)$$

or $$r_m S_n + P_n b_m \subset r_n S_n + b_n$$

from where it follows that

1) $r_m \leqq r_n$.

2) $P_n b_m \in r_n S_n + b_n$ (since $0 \in S_n$).

By the construction all points of S_n have all their coordinates non-negative, and hence, writing

$$b_n = (\beta_{n1}, \beta_{n2}, \ldots, \beta_{nn}, 0, \ldots)$$

we get

3) $\beta_{mi} \geqq \beta_{ni}$ for all i.

From 1) it follows that

$$r_n \to r\ (\geqq 0) \qquad \text{for} \qquad n \to \infty$$

and from 3) that

$$\beta_{ni} \to \beta_i \text{ (for } n \to \infty) \text{ for all i.}$$

It is easily seen that the sequence

$$b = \{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$$

belongs to l^2 and that

$$b_n \to b \qquad \text{for} \qquad n \to \infty$$

whence $b \in A$.

We shall complete our proof by showing that

$$A = rS + b.$$

First, since $r \leqq r_m$ for every m, we have

$$rS + b_m \subset rT_m + b_m \subset r_m T_m + b_m = T_m \cap (qT_m + a_m) = T_m \cap (qT_m + a)$$

for every m, and since

$$T_m \cap (qT_m + a) \subset T_n \cap (qT_n + a) \qquad \text{for} \qquad m > n$$

we have

$$rS + b_m \subset T_n \cap (qT_n + a) \qquad \text{for} \qquad m > n.$$

Since T_n is closed, it follows that

$$rS + b \subset T_n \cap (qT_n + a) \qquad \text{for every } n,$$

whence $rS + b \subset A$.

Secondly, since

$$r_n \geq r_m \qquad \text{for} \qquad m > n,$$

we have

$$\begin{aligned} r_nT_n + b_m &\supset r_nT_m + b_m \\ &\supset r_mT_m + b_m \\ &= T_m \cap (qT_m + a) \\ &\supset A \qquad \text{for every} \qquad m > n. \end{aligned}$$

It follows that

$$r_nT_n + b \supset A \qquad \text{for every } n,$$

hence also that

$$r_nT_m + b \supset r_mT_m + b \supset A \qquad \text{for} \qquad m > n,$$

whence

$$r_nS + b \supset A \qquad \text{for all } n.$$

From here, finally, it follows that

$$rS + b \supset A,$$

and the proof is completed.

BIBLIOGRAPHY

[1] Choquet Gustave, Existence et unicité des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes. *Séminaire Bourbaki* (Décembre 1956), 139-01-139-15.

[2] Klee V. L. Jr., Some new results on smoothness and rotundity in normed linear spaces. *To appear.*

[3] Krein M. and Milman D., On extreme points of regular convex sets. *Studia Math.*, 9 (1940), 133-138.

[4] Poulsen Ebbe Thue, Convex sets with dense extreme points. *Amer. Math. Monthly*, 66 (1959), 577-578.

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
11 (1961), 89-136.

ŠILOVSCHER RAND UND DIRICHLETSCHES PROBLEM

von Heinz BAUER (Hamburg).

EINLEITUNG

Aus der Theorie der Banach-Algebren kennt man Begriff und Bedeutung des Šilovschen Randes : Ist $\mathcal{A}$ eine *Algebra* von stetigen, komplexwertigen Funktionen auf einem kompakten Raum X, welche die konstanten Funktionen enthält und die Punkte von X trennt, so existiert nach Šilov [25] unter allen abgeschlossenen Teilmengen S von X mit der Eigenschaft, daß jede der Funktionen $|f|$ mit $f \in \mathcal{A}$ eine in S gelegene Maximalstelle besitzt, eine kleinste Menge. Diese wird mit $\partial_{\mathcal{A}}X$ bezeichnet und heißt der Šilovsche Rand von X bezüglich $\mathcal{A}$. Ist z.B. X die kompakte Kreisscheibe $|z| \leqslant 1$ in der komplexen z-Ebene und $\mathcal{A}$ die Algebra aller auf X stetigen, in der offenen Kreisscheibe holomorphen Funktionen, so folgt aus dem Maximum-Prinzip der Funktionentheorie, daß $\partial_{\mathcal{A}}X$ der topologische Rand von X, also die Kreislinie $|z| = 1$ ist.

Eine analoge Situation liegt vor, wenn man die Algebra $\mathcal{A}$ ersetzt durch einen *Vektorraum* $\mathcal{H}$ von auf einem kompakten Raum X definierten, stetigen, reellwertigen Funktionen, welcher die konstanten reellen Funktionen enthält und die Punkte von X trennt. Dann existiert nach Milman [33] und Arens-Singer [1] eine kleinste abgeschlossene Menge $\partial_{\mathcal{H}}X$ von X mit der Eigenschaft, daß jede Funktion aus $\mathcal{H}$ eine in $\partial_{\mathcal{H}}X$ gelegene Maximalstelle besitzt. Man nennt auch hier $\partial_{\mathcal{H}}X$ den Šilovschen Rand von X bezüglich $\mathcal{H}$.

Der Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit war die Frage nach der Bedeutung dieser Begriffsbildung für die Theorie

des *Dirichletschen Problems*, oder genauer: Es sei Ω eine offene, relativ kompakte Menge im $\mathbf{R}^n$. Welches ist der Šilovsche Rand der abgeschlossenen Hülle $\overline{\Omega}$ von Ω bezüglich des Vektorraumes $\mathcal{H}_\Omega$ aller in $\overline{\Omega}$ stetigen, in Ω harmonischen, reellen Funktionen? In § 6 dieser Arbeit wird gezeigt, daß der gesuchte Šilovsche Rand die abgeschlossene Hülle der Menge der sog. regulären Randpunkte von Ω ist.

Darüber hinaus hat aber diese spezielle Frage zu einer allgemeineren Fragestellung geführt, nämlich zu einem *abstrakten Dirichletschen Problem*, das sich vom klassischen grob gesagt dadurch unterscheidet, daß der Raum $\overline{\Omega}$ durch einen beliebigen kompakten Raum X, der Vektorraum $\mathcal{H}_\Omega$ durch einen Vektorraum $\mathcal{H}$ stetiger reeller Funktionen auf X und der euklidische Rand Ω^* von Ω durch den Šilovschen Rand $X^* = \partial_{\mathcal{H}} X$ ersetzt wird. Von $\mathcal{H}$ wird zunächst nur vorausgesetzt, daß die konstanten Funktionen zu $\mathcal{H}$ gehören und daß die Punkte von X durch $\mathcal{H}$ getrennt werden. Durch einen sich in natürlicher Weise anbietenden Prozeß wird sodann $\mathcal{H}$ zu einem Vektorraum $\hat{\mathcal{H}}$ stetiger reeller Funktionen erweitert, der mit $\mathcal{H}_\Omega$ eine wichtige Eigenschaft gemeinsam hat: Es gibt eine bezüglich gleichmäßiger Konvergenz abgeschlossene Menge $\mathfrak{S}$ stetiger reeller Funktionen auf X, welche mit je zwei Funktionen auch deren untere Einhüllende enthält; ferner gilt $\hat{\mathcal{H}} = \mathfrak{S} \cap (-\mathfrak{S})$. Bezüglich $\mathcal{H}_\Omega$ hat die Menge aller auf $\overline{\Omega}$ stetigen, in Ω superharmonischen Funktionen diese Eigenschaft. Daher ist erst $\hat{\mathcal{H}}$ das genaue Analogon zu $\mathcal{H}_\Omega$. Das abstrakte Dirichletsche Problem besteht dann in der Aufgabe, notwendige und hinreichende Bedingungen dafür anzugeben, daß jede auf X^* stetige reelle Funktion zu einer Funktion aus $\hat{\mathcal{H}}$ fortgesetzt werden kann. Gewisse Ansatzpunkte zu einem abstrakten, wenn auch andersartigen Dirichletschen Problem finden sich bereits bei Arens-Singer [1].

Innerhalb dieser allgemeinen Theorie spielt eine in X^* dicht liegende Punktmenge, nämlich die Menge der sog. *$\mathcal{H}$-extremalen Punkte* von X eine wichtige Rolle. Die regulären Randpunkte von Ω erweisen sich hinterher als identisch mit den $\mathcal{H}_\Omega$-extremalen Punkten von $\overline{\Omega}$. Daher werden in § 1 zunächst diese ausgezeichneten Punkte eingeführt und mit

ihrer Hilfe ein neuer Beweis für die Existenz des Šilovschen Randes gegeben. In den Paragraphen 2 und 3 wird dann das abstrakte Dirichletsche Problem entwickelt.

Der Rest der Arbeit ist im wesentlichen Anwendungen gewidmet. Es zeigt sich nämlich, daß die allgemeine Theorie auch nützliche Anwendungen außerhalb des Fragenkreises des klassischen Dirichletschen Problems besitzt. In § 4 wird X als *konvexe* kompakte Menge in einem lokal-konvexen Raum E angenommen und für $\mathcal{H}$ der Vektorraum der auf X eingeschränkten, stetigen, *affin-linearen* Funktionen auf E gewählt. Dann erweist sich $\hat{\mathcal{H}}$ als der Vektorraum aller auf X stetigen, affin-linearen Funktionen. Die $\mathcal{H}$-extremalen Punkte fallen mit den (geometrischen) Extremalpunkten von X zusammen. Das abstrakte Dirichletsche Problem reduziert sich also hier auf die Frage, wann jede stetige reelle Funktion auf der abgeschlossenen Hülle aller Extremalpunkte zu einer in X stetigen, affin-linearen Funktion fortgesetzt werden kann. Hierfür erweist es sich als notwendig und hinreichend, daß X ein Simplex im Sinne von Choquet [21] mit abgeschlossener Extremalpunktmenge ist. Die allgemeine Theorie liefert Kennzeichnungen dieser Klasse von Simplexen durch innere Eigenschaften.

Diese Anwendung wurde derjenigen über das klassische Dirichletsche Problem vorangestellt, da sie mit der allgemeinen Theorie in innigem Zusammenhang steht. Man kann nämlich im Rahmen der allgemeinen Theorie den kompakten Raum X homöomorph in den schwach topologisierten, topologischen Dualraum E von $\hat{\mathcal{H}}$ einbetten und z.B. zeigen, daß das abstrakte Dirichletsche Problem genau dann lösbar ist, wenn die abgeschlossene konvexe Hülle des Bildes von X in E ein Simplex mit kompakter Extremalpunktmenge ist. Der § 5 dient der Klärung dieser Beziehungen zwischen der allgemeinen Theorie und der soeben beschriebenen speziellen Anwendung des § 4.

Erst der § 6 bringt dann die Anwendung auf das *klassische Dirichletsche Problem.* Die allgemeine Theorie liefert hierbei neuartige Einsichten in diesen Problemkreis. Hervorzuheben ist besonders die bereits erwähnte Tatsache, daß die regulären Randpunkte einer offenen, relativ kompakten Menge im R^n als *Extremalpunkte* gedeutet werden können.

Der § 7 bringt eine Anwendung auf das Dirichletsche Problem für *diskrete harmonische Funktionen*, die neuerdings wieder im Zusammenhang mit der Theorie der Markovschen Ketten an Bedeutung gewonnen haben [29]. Der abschließende § 8 weist im wesentlichen auf offene Fragen im Zusammenhang mit *Funktionenalgebren* hin.

Die wichtigsten Resultate dieser Arbeit wurden ohne Beweis in einer Note in den Comptes rendus de l'Académie des Sciences (Paris) [3] angekündigt. In gedrängter Form habe ich einen im Pariser Seminar über Potentialtheorie gehaltenen Vortrag über dieses Thema in [4] ausgearbeitet.

BEZEICHNUNGEN

Im folgenden schließen wir uns weitgehend der Terminologie von N. BOURBAKI an.

Mit $\mathbf{R}$ bzw. $\mathbf{C}$ soll stets der topologische Körper der *reellen* bzw. *komplexen Zahlen* (Zahlengerade bzw. komplexe Zahlenebene) bezeichnet werden. Jede Abbildung $f: A \to \mathbf{R}$ einer Menge A in die Zahlengerade heiße *reelle* oder reellwertige Funktion auf A. Jede Abbildung $f: A \to \overline{\mathbf{R}}$ von A in die durch Adjunktion von $\pm\infty$ kompaktifizierte Zahlengerade $\overline{\mathbf{R}}$ heiße *numerische Funktion* auf A.

Für jede Abbildung $f: A \to B$ und jede Menge $S \subset A$ bezeichne f_S die *Restriktion* der Abbildung f auf S. Eine Menge $\mathcal{F}$ von Abbildungen einer Menge A in eine Menge B heißt *punktetrennend*, wenn zu je zwei Punkten $x, y \in A$ mit $x \neq y$ eine Abbildung $f \in \mathcal{F}$ existiert mit $f(x) \neq f(y)$.

Ist X ein *kompakter* (und daher Hausdorffscher) Raum, so bezeichnen wir mit $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$ *bzw.* $\mathcal{C}(X, \mathbf{C})$ die Menge aller stetigen, reellen bzw. komplexen Funktionen auf X. Bezüglich der üblichen (punktweise definierten) Operationen ist $\mathcal{C}(X, \mathbf{R})$ bzw. $\mathcal{C}(X, \mathbf{C})$ eine *Algebra*, insbesondere also ein *Vektorraum* über $\mathbf{R}$ bzw. $\mathbf{C}$. Beide Algebren sollen stets mit der *Topologie der gleichmäßigen Konvergenz* versehen sein. Außerdem trägt $\mathcal{C}(X, \mathbf{R})$ die übliche, mit der Vektorraumstruktur verträgliche Ordnungsrelation $\leqslant$.

Für einen kompakten Raum X soll ferner $\mathcal{M}(X)$ stets die Menge aller *positiven (Radonschen) Maße* auf X bezeichnen. $\mathcal{M}(X)$ ist bezüglich der üblichen Operationen ein konvexer Kegel. Es sei stets mit der *vagen* Topologie versehen. Für einen beliebigen Punkt $x \in X$ bezeichne ε_x das durch die *Einheitsmasse im Punkte x* definierte positive Maß auf X.

§ 1. — Extremalpunkte und Šilovscher Rand.

1. 1. *Definition des Šilovschen Randes.* — Es sei X ein *kompakter* topologischer Raum und $\mathcal{E}$ eine nicht leere Menge von auf X definierten, nach unten halbstetigen, numerischen Funktionen. Dann nimmt bekanntlich jede Funktion $u \in \mathcal{E}$ ihr (globales) *Minimum* auf X an, d.h. es gibt mindestens ein $x_0 \in X$ mit

$$u(x_0) = \inf_{x \in X} u(x).$$

Jeden derartigen Punkt x_0 nennen wir eine *Minimalstelle* von u.

Wir betrachten nun das System $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(\mathcal{E})$ aller *kompakten* Teilmengen S von X mit der Eigenschaft, daß jede Funktion $u \in \mathcal{E}$ mindestens eine in S gelegene Minimalstelle besitzt. Es gilt dann $X \in \mathfrak{S}$; also ist $\mathfrak{S}$ nicht leer.

Ferner ist $\mathfrak{S}$ *induktiv geordnet* bezüglich der Relation $\supset$. Es sei nämlich $\mathfrak{K}$ eine bezüglich $\supset$ total-geordnete Teilmenge von $\mathfrak{S}$. Dann genügt es zu zeigen, daß $T = \bigcap_{S \in \mathfrak{K}} S$ ein Element von $\mathfrak{S}$ ist. Zunächst ist T kompakt und nicht leer, da X kompakt und $\mathfrak{K}$ eine Filterbasis kompakter Teilmengen von X ist. Weiter sei $u \in \mathcal{E}$ und M_u die Menge aller Minimalstellen von u. Da u nach unten halbstetig ist, so ist M_u abgeschlossen. Aus $M_u \cap S \neq \emptyset$ für alle $S \in \mathfrak{S}$, also insbesondere für alle $S \in \mathfrak{K}$, folgt dann $M_u \cap T \neq \emptyset$, da $\{M_u \cap S : S \in \mathfrak{K}\}$ eine Filterbasis kompakter Teilmengen von X ist. Daher gilt: $T \in \mathfrak{S}$.

Nach dem Zornschen Lemma ist also in jeder Menge $S \in \mathfrak{S}$ mindestens ein minimales Element von $\mathfrak{S}$ enthalten. Die Existenz genau eines minimalen Elementes in $\mathfrak{S}$ ist daher gleichwertig mit der Existenz eines kleinsten Elementes in $\mathfrak{S}$.

Definition 1. — *Existiert im System* $\mathfrak{S}(\mathcal{E})$ *eine kleinste Menge* S_0, *so heiße* S_0 *der Šilovsche Rand von* X *bezüglich* $\mathcal{E}$; *in Zeichen:* $S_0 = \partial_{\mathcal{E}} X$.

1. 2. *$\mathcal{E}$-extremale Punkte.* — Im folgenden sollen hinreichende Bedingungen für die Existenz von $\partial_{\mathcal{E}} X$ angegeben werden.

Die Anwendungen, auf die wir in den Paragraphen 4 und 6 zu sprechen kommen, werden zeigen, daß $\partial_{\mathcal{E}}X$ im allgemeinen « unnatürliche » Punkte enthält. Der folgende Beweis für die Existenz von $\partial_{\mathcal{E}}X$ (unter gewissen Zusatzvoraussetzungen) soll daher die Definition der « natürlichen Punkte von $\partial_{\mathcal{E}}X$ » zum Ausgangspunkt haben.

Hierzu bezeichne $\mathcal{M}_x = \mathcal{M}_x(\mathcal{E})$ für jeden Punkt $x \in X$ die Menge aller Maße $\mu \in \mathcal{M}(X)$ mit folgenden zwei Eigenschaften:

$$\int d\mu = 1; \tag{1. 1}$$

$$\int^* u d\mu \leqslant u(x) \quad \textit{für alle} \quad u \in \mathcal{E}. \tag{1. 2}$$

Hierbei bezeichnet $\int^* u d\mu$ das μ-Oberintegral von u (vgl. Bourbaki [14], pp. 172-173, exercices 5,6). Wenn eine Funktion $u \in \mathcal{E}$ nach unten beschränkt ist, wie das im folgenden fast immer der Fall sein wird, ist $\int^* u d\mu = \int u d\mu$ unter der Voraussetzung der Integrierbarkeit von u und sonst $\int^* u d\mu = +\infty$ (vgl. [14], p. 150).

Die Menge $\mathcal{M}_x$ ist für kein $x \in X$ leer, da offenbar stets ε_x zu $\mathcal{M}_x$ gehört.

Definition 2. — *Ein Punkt $x \in X$ heiße $\mathcal{E}$-extremal, wenn gilt:*

$$\mathcal{M}_x(\mathcal{E}) = \{\varepsilon_x\}. \tag{1. 3}$$

Die Menge aller $\mathcal{E}$-extremalen Punkte von X werde mit $X_e = X_e(\mathcal{E})$ bezeichnet und heiße [1] *der Choquetsche Rand von X bezüglich $\mathcal{E}$.*

Ohne Zusatzvoraussetzungen über $\mathcal{E}$ kann die Menge X_e leer sein, wie die beiden folgenden Beispiele zeigen:

Beispiel 1. — Der Raum X enthalte mindestens zwei Punkte; $\mathcal{E}$ sei die Menge aller auf X konstanten reellen Funktionen.

Beispiel 2. — Der Raum X sei die mit der diskreten Topologie versehene zweipunktige Menge $\{a, b\}$. $\mathcal{E}$ enthalte

[1] Nach einem Vorschlag von Bishop und de Leeuw [8].

als einziges Element die folgende Funktion u: $u(a) = -\infty$, $u(b) = 0$.

Die durch diese Beispiele nahegelegten Zusatzvoraussetzungen genügen, um die Existenz $\mathcal{E}$-extremaler Punkte zu beweisen:

Satz 1. — *Die Menge $\mathcal{E}$ besitze folgende zusätzliche Eigenschaften:*

(1.4) *$\mathcal{E}$ trennt die Punkte von* X;

(1.5) *es ist* $u(x) > -\infty$ *für alle* $x \in X$ *und* $u \in \mathcal{E}$.

Dann besitzt jede Funktion aus $\mathcal{E}$ mindestens eine $\mathcal{E}$-extremale Minimalstelle. Insbesondere ist der Choquetsche Rand $X_e(\mathcal{E})$ *nicht leer.*

Der Beweis dieses Satzes wurde in [5] (Satz 2) als Folgerung aus einem allgemeinen Minimumprinzip erbracht.

1.3. *$\mathcal{E}$-exponierte Punkte.* — Spezielle $\mathcal{E}$-extremale Punkte lernen wir im folgenden Beispiel kennen:

Beispiel 3. — Ein Punkt $x \in X$ heiße *$\mathcal{E}$-exponiert*, wenn eine Funktion $u \in \mathcal{E}$ existiert derart, daß gilt:

(1.6) $-\infty < u(x) < u(y)$ *für alle* $y \in X$ *mit* $y \neq x$.

Es sei x ein solcher Punkt und u eine Funktion aus $\mathcal{E}$ mit der Eigenschaft (1.6). Für jedes Maß $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{E})$ ist dann u auf dem Träger T_μ von μ konstant gleich $u(x)$ (nach [5], Hilfssatz 3). Wegen (1.6) folgt hieraus: $T_\mu = \{x\}$; wegen (1.1) ist dann $\mu = \varepsilon_x$, also $\mathcal{M}_x = \{\varepsilon_x\}$. Daher ist jeder $\mathcal{E}$-exponierte Punkt auch $\mathcal{E}$-extremal. Die Umkehrung hiervon gilt jedoch nicht, wie schon Beispiel 4 zeigen wird ([2]).

Aus der Definition der $\mathcal{E}$-exponierten Punkte folgt ferner, daß jeder derartige Punkt in jeder Menge $S \in \mathfrak{S}(\mathcal{E})$ und damit auch in $\partial_{\mathcal{E}}X$ liegt, sofern der Šilovsche Rand existiert.

1.4. *Existenz des Šilovschen Randes.* — Die bisherigen Voraussetzungen über $\mathcal{E}$ (einschließlich (1.4) und (1.5)) haben nach Satz 1 zur Folge, daß die abgeschlossene Hülle $\overline{X_e}$ des

([2]) Vgl. auch die Bemerkung 3 in Nr. 4.3.

Choquetschen Randes zum System $\mathfrak{S}(\mathcal{E})$ gehört. Sie lassen aber nicht den Schluß zu, daß der Šilovsche Rand existiert; aus der Existenz von $\partial_{\mathcal{E}}X$ folgt ferner nicht die Gleichheit mit $\overline{X_e}$. Dies zeigen die beiden nächsten Beispiele:

Beispiel 4. — Der Raum X sei die diskret topologisierte, aus drei Punkten bestehende Menge $\{x_1, x_2, x_3\}$. Die (stetigen) reellen Funktionen auf X entsprechen dann eineindeutig den Vektoren des $\mathbf{R}^3$. Die Funktionenmenge $\mathcal{E}$ bestehe aus den durch den Vektoren (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) definierten Funktionen. Es ist offenbar: $X_e(\mathcal{E}) = X$. Der Šilovsche Rand existiert nicht, da alle zweipunktigen Teilmengen von X minimale Elemente von $\mathfrak{S}(\mathcal{E})$ sind.

Beispiel 5. — Der Raum X sei wie im Beispiel 4 definiert. Jedoch sei $\mathcal{E}$ jetzt die durch die Vektoren (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1) und (1, 0, 1) definierte Funktionenmenge. Wiederum ist $X_e(\mathcal{E}) = X$. Jedoch existiert jetzt der Šilovsche Rand: $\partial_{\mathcal{E}}X = \{x_1, x_2\}$.

Es gilt nun aber der folgende.

Satz 2. — *Die Menge* $\mathcal{E}$ *besitze neben* (1. 4) *und* (1. 5) *noch folgende Eigenschaft:*

$$(1.\ 7) \qquad u, v \in \mathcal{E} \Longrightarrow u + v \in \mathcal{E}.$$

Dann existiert der Šilovsche Rand $\partial_{\mathcal{E}}X$ *und er ist gleich der abgeschlossenen Hülle des Choquetschen Randes* $X_e(\mathcal{E})$.

Beweis. Wir setzen $S_0 = \overline{X_e}$. Dann folgt aus Satz 1, daß S_0 zum System $\mathfrak{S}$ gehört. Es sei nun S ein beliebiges Element aus $\mathfrak{S}$; dann ist noch $S_0 \subset S$ oder die gleichwertige Relation $X_e \subset S$ zu beweisen. Wir betrachten hierzu einen beliebigen Punkt $x \in X$ und konstruieren ein spezielles Maß $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{E})$, welches von S getragen wird. Für jeden Punkt $x \in \complement S$ ist dann dieses Maß von ε_x verschieden, also $\complement S \subset \complement X_e$ und somit $X_e \subset S$.

Zur Konstruktion von μ bezeichnen wir mit $\mathcal{E}_1$ die Menge aller Funktionen $u + \alpha$ mit $u \in \mathcal{E}$ und $\alpha \in \mathbf{R}$ einschließlich aller auf X konstanten reellen Funktionen. Dann überträgt sich die Eigenschaft (1.7) auf $\mathcal{E}_1$; ferner besitzt auch jede

Funktion aus $\mathcal{E}_1$ eine in S gelegene Minimalstelle, es ist also $S \in \mathfrak{S}(\mathcal{E}_1)$. Für jede Funktion $f \in \mathcal{C}(S)$ setzen wir

$$(1.8) \qquad p(f) = \inf_{f \leqslant v_S,\, v \in \mathcal{E}_1} v(x),$$

wobei wie auf p. 93 vereinbart, v_S die Restriktion von v auf S bezeichnet. Dann gilt für alle $f \in \mathcal{C}(S)$:

$$(1.9) \qquad |p(f)| < +\infty.$$

Es ist nämlich $p(f) < +\infty$, da z.B. konstante Funktionen $v \in \mathcal{E}_1$ existieren mit $f \leqslant v_S$; ist weiter $\alpha \in R$ eine untere Schranke von f, so gilt $p(f) \geqslant \alpha$ wegen $S \in \mathfrak{S}(\mathcal{E}_1)$. Diese Überlegung zeigt ferner, daß

$$(1.10) \qquad p(\alpha) = \alpha$$

ist für jede auf S konstante reelle Funktion α. Aus $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_1$ folgt noch:

$$(1.11) \qquad p(f+g) \leqslant p(f) + p(g) \quad \text{für beliebige} \quad f, g \in \mathcal{C}(S).$$

Nun wird durch $\nu_0(\alpha) = p(\alpha) = \alpha$ ein Homomorphismus der additiven Gruppe aller auf S konstanten reellen Funktionen in die additive Gruppe R definiert. (ν_0 ist natürlich sogar ein Isomorphismus auf R.) Nach AUMANN [2] (Satz 2) kann dann ν_0 fortgesetzt werden zu einem Homomorphismus $\nu : \mathcal{C}(S) \to R$ der additiven Gruppe $\mathcal{C}(S)$ in R, und zwar derart, daß

$$(1.12) \qquad \nu(f) \leqslant p(f) \quad \text{für alle} \quad f \in \mathcal{C}(S)$$

gilt (3). Dann ist ν ein positives Maß auf S. In der Tat: aus $f \in \mathcal{C}(S)$ und $f \geqslant 0$ folgt $-f \leqslant 0$ und somit $p(-f) \leqslant 0$. Nach (1.12) ist daher $-\nu(f) = \nu(-f) \leqslant p(-f) \leqslant 0$, also $\nu(f) \geqslant 0$. Nach einem bekannten Satz ([14], p. 35, prop. 1) ist dann aber ν eine positive Linearform auf dem Vektorraum $\mathcal{C}(S)$, also $\nu \in \mathcal{M}(S)$.

Das Bildmaß $\mu = j(\nu)$ von ν bei der kanonischen Injektion $j : S \to X$ leistet dann das Verlangte. Zunächst ist

(3) Wir verwenden den zitierten Satz von AUMANN nur in der folgenden speziellen Form, die sich leicht aus [2] ableiten läßt: *Es sei* H *eine abelsche (additiv geschriebene) Gruppe und* E *eine Untergruppe von* H; *ferner sei p eine reelle Funktion auf H mit:* $p(0) = 0$ *und* $p(f+g) \leqslant p(f) + p(g)$ *für alle* $f, g \in H$. *Dann existiert zu jedem Homomorphismus* $\nu_0 : E \to R$ *mit* $\nu_0(f) \leqslant p(f)$ *für alle* $f \in E$ *ein Homomorphismus* $\nu : H \to R$ *mit folgenden Eigenschaften:* ν *setzt* ν_0 *fort und es ist* $\nu(f) \leqslant p(f)$ *für alle* $f \in H$.

definitionsgemäß μ ein positives Maß auf X mit $\mu(\complement S) = 0$ und $\int g\, d\mu = \int g_S\, d\nu$ für alle $g \in \mathcal{C}(X)$. Speziell ist also: $\int d\mu = \int d\nu = \nu_0(1) = 1$. Für jede Funktion $u \in \mathcal{E}$, welche gemäß (1. 5) nach unten beschränkt ist, gilt:

$$(1.\ 13) \qquad \int^* u\, d\mu = \sup_{g \leqslant u, g \in \mathcal{C}(X)} \int g\, d\mu.$$

Für jedes $g \in \mathcal{C}(X)$ mit $g \leqslant u$ ist $g_S \leqslant u_S$ und nach (1. 12): $\int g d\mu = \int g_S d\nu = \nu(g_S) \leqslant p(g_S)$. Nun ist aber $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}_1$, also auch $u \in \mathcal{E}_1$; aus (1. 8) folgt daher noch: $p(g_S) \leqslant u(x)$. Zusammen mit (1. 13) ergibt dies die für alle $u \in \mathcal{E}$ gültige Ungleichung $\int^* u d\mu \leqslant u(x)$. Damit ist μ wie behauptet ein auf S konzentriertes Maß aus $\mathcal{M}_x(\mathcal{E})$, unser Satz also bewiesen.

Bemerkung. — Der Satz 2 überschneidet sich hinsichtlich der Aussage über die Existenz des Šilovschen Randes mit einem Resultat von Arens-Singer [1] (Theorem 2. 4). Unter der Voraussetzung, daß $\mathcal{E}$ nur stetige Funktionen enthält und die Eigenschaften (1. 4), (1. 5) und (1. 7) besitzt, genügt nämlich die Menge $H = \{e^{-u} : u \in \mathcal{E}\}$ den Annahmen in [1]. Dort werden allerdings $\mathcal{E}$-extremale Punkte und ihr Zusammenhang mit $\partial_{\mathcal{E}} X$ nicht diskutiert.

§ 2. — $\mathcal{H}$-harmonische Funktionen.

2. 1. *Der Vektorraum* $\mathcal{H}$. — Die Situation, mit der wir uns hier und im folgenden beschäftigen werden, wird spezieller sein als die im Paragraphen 1.

Gegeben sei jetzt nämlich ein kompakter Raum X und eine Menge $\mathcal{H}$ von auf X definierten Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

(2. 1) *$\mathcal{H}$ ist ein linearer Unterraum von* $\mathcal{C}(X)$;
(2. 2) *$\mathcal{H}$ enthält alle konstanten Funktionen aus* $\mathcal{C}(X)$;
(2. 3) *$\mathcal{H}$ trennt die Punkte von* X.

Dann ist für jedes $x \in X$ die Menge $\mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ von Maßen definiert. Wegen der speziellen Eigenschaften von $\mathcal{H}$ vereinfachen sich die an $\mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ gestellten Forderungen (1. 1) und (1. 2):

$\mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ ist für jedes $x \in X$ die Menge aller Maße $\mu \in \mathcal{M}(X)$ mit:

$$(2.4) \qquad \int h d\mu = h(x) \qquad \text{für alle } h \in \mathcal{H}.$$

Nach dem Satz 2 existiert der Šilovsche Rand $\partial_{\mathcal{H}} X$ und ist gleich der abgeschlossenen Hülle des Choquetschen Randes $X_e(\mathcal{H})$ aller $\mathcal{H}$-extremalen Punkte. Das System $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ besteht somit aus allen kompakten Mengen S mit $\partial_{\mathcal{H}} X \subset S \subset X$. Wegen (2. 1) besitzt jede Funktion aus $\mathcal{H}$ eine in einem beliebigen $S \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ gelegene Minimal- und Maximalstelle.

2. 2. *Die Mengen* $\mathcal{M}_x^S$. — Für eine beliebige Menge $S \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ verallgemeinern wir nun die Mengen $\mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ wie folgt: Für jeden Punkt $x \in X$ bezeichne $\mathcal{M}_x^S = \mathcal{M}_x^S(\mathcal{H})$ die Menge aller Maße $\mu \in \mathcal{M}(S)$ mit:

$$(2.5) \qquad \int h_S d\mu = h(x) \qquad \text{für alle } h \in \mathcal{H}.$$

Offenbar ist $\mathcal{M}_x(\mathcal{H}) = \mathcal{M}_x^X(\mathcal{H})$ für jedes $x \in X$. Aus (2. 2) folgt: $\int d\mu = 1$ für alle $\mu \in \mathcal{M}_x^S(\mathcal{H})$. Aus $x \in S$ folgt $\varepsilon_x \in \mathcal{M}_x^S$ und für jeden $\mathcal{H}$-extremalen Punkt x ist sogar $\mathcal{M}_x^S = \{\varepsilon_x\}$. Wir werden später sehen, daß diese letzte Eigenschaft die $\mathcal{H}$-extremalen Punkte sogar kennzeichnet (Satz 14).

Daß auch für Punkte $x \in \complement S$ die Menge $\mathcal{M}_x^S$ nicht leer ist, folgt aus der folgenden Betrachtung:

Für jeden Punkt $x \in X$ und jede Funktion $f \in \mathcal{C}(S)$ werde gesetzt:

$$(2.6) \qquad \overline{Q}_x^S(f) = \inf_{f \leqslant h_S,\ h \in \mathcal{H}} h(x);$$

$$(2.7) \qquad \underline{Q}_x^S(f) = -\overline{Q}_x^S(-f).$$

Durch elementare Schlüsse, die dem Leser überlassen werden können, beweist man dann:

Hilfssatz 1. — *Für alle* $x \in X$ *gilt:*

$$(2.8) \qquad -\infty < \underline{Q}_x^S(f) \leqslant \overline{Q}_x^S(f) < +\infty \qquad (f \in \mathcal{C}(S));$$

$$(2.9) \qquad f \leqslant g \Rightarrow \overline{Q}_x^S(f) \leqslant \overline{Q}_x^S(g) \qquad (f,\ g \in \mathcal{C}(S));$$

$$(2.10) \qquad \overline{Q}_x^S(f+g) \leqslant \overline{Q}_x^S(f) + \overline{Q}_x^S(g) \qquad (f,\ g \in \mathcal{C}(S));$$

$$(2.11) \qquad \overline{Q}_x^S(\lambda f) = \lambda \overline{Q}_x^S(f) \qquad (f \in \mathcal{C}(S);\ \lambda \geqslant 0);$$

$$(2.12) \qquad \underline{Q}_x^S(h_S) = \overline{Q}_x^S(h_S) = h(x) \qquad (h \in \mathcal{H}).$$

Hieraus folgern wir nunmehr:

SATZ 3. — *(a) Bei beliebiger Wahl von* $x \in X$, $\mu \in \mathcal{M}_x^S$ *und* $f \in \mathcal{C}(S)$ *gilt:*

$$\underline{Q}_x^S(f) \leqslant \int f\, d\mu \leqslant \overline{Q}_x^S(f). \tag{2.13}$$

(b) Sind umgekehrt $x \in X$, $f_0 \in \mathcal{C}(S)$ *und* $\gamma \in R$ *derart gewählt, daß*

$$\underline{Q}_x^S(f_0) \leqslant \gamma \leqslant \overline{Q}_x^S(f_0) \tag{2.14}$$

gilt, so gibt es mindestens ein Maß $\mu \in \mathcal{M}_x^S$ *mit:* $\gamma = \int f_0\, d\mu$.

Beweis. *Zu (a):* Für jedes $h \in \mathcal{H}$ mit $f \leqslant h_S$ gilt nach (2.5): $\int f\, d\mu \leqslant \int h_S\, d\mu = h(x)$; somit ist $\int f\, d\mu \leqslant \overline{Q}_x^S(f)$. Bei Beachtung von (2. 7) folgt hieraus die Behauptung.

Zu (b): Es sei $\mathcal{F}_0 = \{\lambda f_0 : \lambda \in R\}$ der von f_0 in $\mathcal{C}(S)$ erzeugte lineare Unterraum. Dann ist $\lambda f_0 \to \lambda\gamma$ eine auf $\mathcal{F}_0$ definierte Linearform μ_0; im Falle $f_0 = 0$ hat man hierbei zu berücksichtigen, daß $\gamma = 0$ ist. Für jedes $f \in \mathcal{F}_0$ gilt: $\mu_0(f) \leqslant \overline{Q}_x^S(f)$ nach (2. 11) und (2. 14). Wegen der Eigenschaften (2. 10) und (2. 11) der Funktion $f \to \overline{Q}_x^S(f)$ existiert nach dem Satz von HAHN-BANACH (vgl. [24], p. 9) eine μ_0 auf $\mathcal{C}(S)$ fortsetzende Linearform μ mit $\mu(f) \leqslant \overline{Q}_x^S(f)$, also mit

$$\underline{Q}_x^S(f) \leqslant \mu(f) \leqslant \overline{Q}_x^S(f) \quad \text{für alle} \quad f \in \mathcal{C}(S). \tag{2.15}$$

Aus $f \geqslant 0$ folgt gemäß Hilfssatz 1: $0 = \underline{Q}_x^S(0) \leqslant \underline{Q}_x^S(f)$, also $\mu(f) \geqslant 0$. Somit ist μ ein positives Maß auf $\mathcal{C}(S)$. Nach Konstruktion gilt: $\int f_0\, d\mu = \mu_0(f_0) = \gamma$; aus (2. 15) folgt schließlich bei Beachtung von (2. 12), daß μ zu $\mathcal{M}_x^S$ gehört. Damit besitzt μ alle gewünschten Eigenschaften.

Zusammen mit (2. 8) zeigt der Satz 3 insbesondere, daß keine der Mengen $\mathcal{M}_x^S$ leer ist.

2. 3. *$\mathcal{H}$-harmonische Funktionen.* — Bei gegebenem $S \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ fragen wir nun weiter nach der Menge aller Funktionen $h \in \mathcal{C}(X)$, welche der Gleichung (2. 5) für alle $x \in X$ und $\mu \in \mathcal{M}_x^S$ genügen.

Satz 4. — *Bei beliebig gegebenem* $S \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ *sind für jede Funktion* $f \in \mathcal{C}(X)$ *folgende Bedingungen gleichwertig:*

(*a*) $f(x) = \int f_S \, d\mu$ *für alle* $x \in X$ *und alle* $\mu \in \mathcal{M}_x^S(\mathcal{H})$.

(*b*) $f(x) = \underline{Q}_x^S(f_S) = \overline{Q}_x^S(f_S)$ *für alle* $x \in X$.

(*c*) *Zu jedem* $\varepsilon > 0$ *gibt es endlich viele Funktionen* $h'_1, \ldots, h'_m$; $h''_1, \ldots, h''_n$ *in* $\mathcal{H}$ *derart, daß für die Einhüllenden*

$$\underline{h} = \sup(h'_1, \ldots, h'_m) \text{ und } \overline{h} = \inf(h''_1, \ldots, h''_n)$$

gilt:

$$\underline{h} \leqslant f \leqslant \overline{h} \text{ und } \overline{h} - \underline{h} \leqslant \varepsilon.$$

Beweis. $(a) \Longrightarrow (b)$: Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus Satz 3.

$(b) \Longrightarrow (c)$: Es seien $\varepsilon > 0$ und $x \in X$ beliebig gewählt. Aus den Definitionsgleichungen (2. 6) und (2. 7) sowie aus (*b*) folgt dann die Existenz von Funktionen $h_x^1, h_x^2 \in \mathcal{H}$ mit folgenden Eigenschaften:

$$(h_x^1)_S \leqslant f_S \leqslant (h_x^2)_S; \tag{2. 16}$$

$$h_x^2(x) - h_x^1(x) < \varepsilon. \tag{2. 17}$$

Aus (2. 16) folgt wegen der Isotonie der Funktion $\overline{Q}_y^S$ bei Beachtung von (2. 12) und (*b*): $h_x^1(y) \leqslant f(y) \leqslant h_x^2(y)$ für alle $y \in X$, also $h_x^2 \leqslant f \leqslant h_x^1$. Wegen der Stetigkeit aller Funktionen aus $\mathcal{H}$ folgt aus (2. 17) die Existenz einer offenen Umgebung U_x von x mit: $h_x^2(y) - h_x^1(y) < \varepsilon$ für alle $y \in U_x$. Da der Raum X kompakt ist, genügen endlich viele der Mengen U_x zu seiner Überdeckung: $X = U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n}$ $(x_i \in X)$. Es ist dann klar, daß die Funktionen $h'_i = h_{x_i}^1$ und $h''_i = h_{x_i}^2$ $(i = 1, \ldots, n)$ das Verlangte leisten.

$(c) \Longrightarrow (a)$: Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir die Funktionen $h'_1, \ldots, h'_m$; $h''_1, \ldots, h''_n$ gemäß der Bedingung (*c*). Durch Integration einer jeden Ungleichung $h'_i \leqslant f \leqslant h''_j$ folgt dann $h'_i(x) \leqslant \int f_S d\mu \leqslant h''_j(x)$ $(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$ und somit $\underline{h}(x) \leqslant \int f_S d\mu \leqslant \overline{h}(x)$ für jedes $x \in X$ und alle $\mu \in \mathcal{M}_x^S$. Wegen $\underline{h} \leqslant f \leqslant \overline{h}$ und $\overline{h} - \underline{h} \leqslant \varepsilon$ folgt weiter: $\left|\int f_S d\mu - f(x)\right| \leqslant \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$, $x \in X$ und $\mu \in \mathcal{M}_x^S$. Also genügt f der Bedingung (*a*).

Die Tatsache, daß die Menge S nicht in der Bedingung (*c*) auftritt, gibt Anlaß zur folgenden Definition:

DEFINITION 3. — *Eine Funktion* $f \in \mathcal{C}(X)$ *heiße* $\mathcal{H}$*-harmonisch, wenn sie den äquivalenten Bedingungen* (*a*)-(*c*) *in Satz* 4 *für eine Menge* $S \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ *(und dann auch für jede derartige Menge) genügt.*

Wir bezeichnen die Menge aller $\mathcal{H}$-harmonischen Funktionen mit $\hat{\mathcal{H}}$. Aus der Definition (z. B. durch die Bedingung (*a*) von Satz 4) folgt sofort, daß $\hat{\mathcal{H}}$ ein *abgeschlossener, linearer Unterraum* von $\mathcal{C}(X)$ ist. Nach (2. 5) gilt: $\mathcal{H} \subset \hat{\mathcal{H}}$. Der Übergang von $\mathcal{H}$ zu $\hat{\mathcal{H}}$ ist ein gewisser Prozess der Vervollständigung, der, wie sich sofort zeigen wird, auf $\hat{\mathcal{H}}$ angewendet zu nichts Neuem führt.

2. 4. *Beziehungen zwischen* $\mathcal{H}$ *und* $\hat{\mathcal{H}}$. — Soeben wurde gezeigt, daß auch $\hat{\mathcal{H}}$ die Eigenschaften (2. 1)-(2. 3) von $\mathcal{H}$ besitzt. Also sind definiert die Mengen: $X_e(\hat{\mathcal{H}})$, $\partial_{\hat{\mathcal{H}}}X$, $\mathfrak{S}(\hat{\mathcal{H}})$, $\mathcal{M}_x^S(\hat{\mathcal{H}})$ und $\hat{\hat{\mathcal{H}}}$. Aus der Definition von $\hat{\mathcal{H}}$ durch die Bedingung (*a*) von Satz 4 für $S = X$ folgt: $\mathcal{M}_x(\hat{\mathcal{H}}) = \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ für alle $x \in X$. Hieraus ergibt sich:

$$X_e(\hat{\mathcal{H}}) = X_e(\mathcal{H}). \tag{2. 18}$$

Nach Satz 2 ist daher

$$\partial_{\hat{\mathcal{H}}}X = \partial_{\mathcal{H}}X. \tag{2. 19}$$

Dann aber ist auch

$$\mathfrak{S}(\hat{\mathcal{H}}) = \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \tag{2. 20}$$

und aus der Definition von $\hat{\mathcal{H}}$ folgt:

$$\mathcal{M}_x^S(\hat{\mathcal{H}}) = \mathcal{M}_x^S(\mathcal{H}) \quad \text{für alle} \quad S \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \quad \text{und} \quad x \in X. \tag{2. 21}$$

Schließlich folgt hieraus

$$\hat{\hat{\mathcal{H}}} = \hat{\mathcal{H}}. \tag{2. 22}$$

Die Gleichungen (2. 18)-(2. 22) rechtfertigen die Verwendung der kürzeren Bezeichnungen X_e, $\mathfrak{S}$, $\mathcal{M}_x^S$ und $\mathcal{M}_x$ bei gegebenem $\mathcal{H}$.

Die naheliegende Vermutung, daß $\hat{\mathcal{H}}$ gleich der abgeschlossenen Hülle von $\mathcal{H}$ in $\mathcal{C}(X)$ ist, wird durch das folgende Beispiel widerlegt.

Beispiel 6. — Es sei X das kompakte Intervall [0,1] auf der Zahlengeraden und $\mathcal{H}$ die Menge aller auf X eingeschränkten, reellen, quadratischen Polynome $x \to \alpha + \beta x + \gamma x^2 (\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{R})$. Dann besitzt $\mathcal{H}$ die Eigenschaften (2. 1)-(2. 3); ferner ist $\mathcal{H}$ in $\mathcal{C}(\mathrm{X})$ abgeschlossen. Es gilt jedoch: $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{C}(\mathrm{X})$. Man zeigt dies entweder direkt mit Hilfe der Definition von $\hat{\mathcal{H}}$ durch die Bedingung (*c*) von Satz 4 oder einfacher wie folgt: Für jedes $x_0 \in \mathrm{X}$ liegt die durch $x \to (x - x_0)^2$ definierte Funktion h in $\mathcal{H}$ und es ist $h(x_0) < h(x)$ für alle $x \neq x_0$. Also ist jeder Punkt aus X $\mathcal{H}$-exponiert, also nach 1.3 $\mathcal{H}$-extremal. Dann aber ergibt sich $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{C}(\mathrm{X})$ nach dem folgenden Satz.

Satz 5. — *Dann und nur dann ist jeder Punkt aus X $\mathcal{H}$-extremal, wenn $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{C}(\mathrm{X})$ ist.*

Beweis. Aus $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{C}(\mathrm{X})$ folgt $\mathrm{X} = \mathrm{X}_e(\hat{\mathcal{H}})$ unmittelbar, also $\mathrm{X} = \mathrm{X}_e(\mathcal{H})$ nach (2. 18). Umgekehrt folgt aus $\mathrm{X} = \mathrm{X}_e$ zunächst $\mathcal{M}_x = \{\varepsilon_x\}$ für jedes $x \in \mathrm{X}$. Die Definition der $\mathcal{H}$-harmonischen Funktionen liefert dann: $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{C}(\mathrm{X})$.

Unter einer Zusatzvoraussetzung über $\mathcal{H}$, die uns noch in § 3 beschäftigen wird, gilt jedoch:

Satz 6. — *Wenn $\mathcal{H}$ bezüglich der üblichen Ordnungsrelation $\leqslant$ ein Verband ist, so ist $\hat{\mathcal{H}}$ die abgeschlossene Hülle von $\mathcal{H}$ in $\mathcal{C}(\mathrm{X})$* [4].

Beweis. Zu jeder Funktion $f \in \hat{\mathcal{H}}$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es nach Satz 4 Funktionen $h'_1, \ldots, h'_m;\ h''_1, \ldots, h''_n$ in $\mathcal{H}$ mit:

$$\underline{h} = \sup\ (h'_1, \ldots, h'_m) \leqslant f \leqslant \bar{h} = \inf\ (h''_1, \ldots, h''_n)$$

und $\bar{h} - \underline{h} \leqslant \varepsilon$. Nach Voraussetzung besitzen $h'_1, \ldots, h'_m$ eine kleinste gemeinsame Majorante $\underline{h}_0$ in $\mathcal{H}$, für die offenbar gilt: $\underline{h} \leqslant \underline{h}_0 \leqslant \bar{h}$. Man erhält daher: $|f - \underline{h}_0| \leqslant \varepsilon$. Damit ist gezeigt, daß f in der abgeschlossenen Hülle $\overline{\mathcal{H}}$ von $\mathcal{H}$ liegt; es ist also: $\hat{\mathcal{H}} \subset \overline{\mathcal{H}}$. Da andererseits $\hat{\mathcal{H}}$ in $\mathcal{C}(\mathrm{X})$ abgeschlossen ist und $\mathcal{H}$ als Teilmenge enthält, gilt sogar $\overline{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}$.

[4] Die Voraussetzung über $\mathcal{H}$ besagt, daß zu je zwei Funktionen h_1, h_2 in $\mathcal{H}$ eine kleinste gemeinsame Majorante und eine größte gemeinsame Minorante in $\mathcal{H}$ existiert. $\mathcal{H}$ ist dann bezüglich der Relation $\leqslant$ sogar ein *Rieszscher Raum* (Vektorverband).

Beispiel 7. — Es sei X das kompakte Intervall [0,1] auf der Zahlengeraden und $\mathcal{H}$ die Menge aller auf X eingeschränkten, affin-linearen, reellen Funktionen $x \to \alpha + \beta x$. Dann besitzt $\mathcal{H}$ die Eigenschaften (2. 1)-(2. 3). $\mathcal{H}$ ist in $\mathcal{C}(X)$ abgeschlossen und ein Verband. Also gilt $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H}$. Übrigens ist hier $X_e = \{0,1\}$.

2. 5. *Kennzeichnungen von* $\hat{\mathcal{H}}$ *mittels* inf-*stabiler Teilmengen.* — Zunächst vereinbaren wir folgende Sprechweise: Eine Teilmenge $\mathcal{S}$ von $\mathcal{C}(X)$ heiße inf-*stabil*, wenn sie mit je endlich vielen Funktionen auch deren untere Einhüllende enthält. Offenbar existiert zu $\mathcal{H}$ (allgemeiner zu jeder Teilmenge von $\mathcal{C}(X)$) eine *kleinste abgeschlossene*, inf-*stabile Teilmenge* von $\mathcal{C}(X)$, *die* $\mathcal{H}$ *enthält.* Diese Menge soll mit $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}$ bezeichnet werden.
Es gilt nun folgende Verallgemeinerung von Satz 4:

Satz 7. — *Für jede Funktion* $f \in \mathcal{C}(X)$ *sind folgende Bedingungen gleichwertig:*

(*a*) $f \in \mathcal{E}_{\mathcal{H}}$;

(*b*) $\int f\,d\mu \leqslant f(x)$ *für alle* $x \in X$ *und* $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$;

(*c*) $\overline{Q}{}^X_x(f) = f(x)$ *für alle* $x \in X$;

(*d*) *Zu jedem* $\varepsilon > 0$ *gibt es endlich viele Funktionen* $h_1, \ldots, h_n \in \mathcal{H}$ *mit* $f \leqslant \inf(h_1, \ldots, h_n) \leqslant f + \varepsilon$.

Beweis. $(a) \Longrightarrow (b)$: Es sei $\mathcal{S}$ die Menge aller Funktionen $u \in \mathcal{C}(X)$ mit $\int u\,d\mu \leqslant u(x)$ für alle $x \in X$ und $\mu \in \mathcal{M}_x$. Dann prüft man sofort nach, daß $\mathcal{S}$ in $\mathcal{C}(X)$ abgeschlossen und inf-stabil ist. Da ferner $\mathcal{H} \subset \mathcal{S}$ ist, so folgt $\mathcal{E}_{\mathcal{H}} \subset \mathcal{S}$ und damit (*b*).

$(b) \Longrightarrow (c)$: Aus (*b*) folgt zunächst $\overline{Q}{}^X_x(f) \leqslant f(x)$ für jedes $x \in X$, da nach Satz 3 speziell ein Maß $\mu \in \mathcal{M}_x$ existiert mit $\overline{Q}{}^X_x(f) = \int f\,d\mu$. Nach der Definitionsgleichung (2. 6) (für $S = X$) ist aber auch $f(x) \leqslant \overline{Q}{}^X_x(f)$ für alle $x \in X$.

$(c) \Longrightarrow (d)$: Zu $\varepsilon > 0$ und zu jedem $x \in X$ gibt es nach (2. 6) eine Funktion $h_x \in \mathcal{H}$ mit $f \leqslant h_x$ und

$$h_x(x) < f(x) + \varepsilon = \overline{Q}{}^X_x(f) + \varepsilon.$$

Der Rest des Beweises verläuft dann analog zum Schritt « $(b) \Longrightarrow (c)$ » des Beweises von Satz 4.

$(d) \Longrightarrow (a)$: Da $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}$ definitionsgemäß eine abgeschlossene,

inf-stabile Teilmenge von $\mathcal{C}(X)$ ist mit $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}_{\mathcal{H}}$, zeigt die Bedingung (d), daß f in $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}$ liegt.

Nunmehr ergeben sich eine Reihe von Folgerungen:

Korollar 1. — *Es gilt* $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{E}_{\mathcal{H}} \cap (-\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$. *Dann und nur dann ist* $\mathcal{H} = \hat{\mathcal{H}}$, *wenn es eine in* $\mathcal{C}(X)$ *abgeschlossene,* inf-*stabile Menge* $\mathcal{E}$ *gibt mit* $\mathcal{H} = \mathcal{E} \cap (-\mathcal{E})$.

Beweis. Nach Satz 7 ist $\mathcal{E}_{\mathcal{H}} \cap (-\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$ die Menge aller $f \in \mathcal{E}(X)$ mit $\int f\,d\mu = f(x)$ für alle $x \in X$ und $\mu \in \mathcal{M}_x$. Nach Definition 3 ist dies die Menge $\hat{\mathcal{H}}$. — Ist $\mathcal{H} = \hat{\mathcal{H}}$, so ist nach dem bereits Bewiesenen $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathcal{H}}$ eine in $\mathcal{C}(X)$ abgeschlossene, inf-stabile Menge mit $\mathcal{H} = \mathcal{E} \cap (-\mathcal{E})$. Ist $\mathcal{E}$ irgendeine Menge mit diesen Eigenschaften, so folgt $\mathcal{H} = \hat{\mathcal{H}}$ aus der Gleichheit $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{E}_{\mathcal{H}} \cap (-\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$ und aus $\mathcal{E}_{\mathcal{H}} \subset \mathcal{E}$.

Korollar 2. — *Die Menge* $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}$ *ist ein konvexer Kegel in* $\mathcal{C}(X)$ *mit der Spitze* 0 ([5]).

Beweis. Zu zeigen ist: $\mathcal{E}_{\mathcal{H}} + \mathcal{E}_{\mathcal{H}} \subset \mathcal{E}_{\mathcal{H}}$ und $\lambda\mathcal{E}_{\mathcal{H}} \subset \mathcal{E}_{\mathcal{H}}$ für jede reelle Zahl $\lambda \geqslant 0$. Dies aber folgt aus Satz 7, (b).

Korollar 3. — *Jede Funktion aus* $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}$ *besitzt eine* $\mathcal{H}$*-extremale Minimalstelle.*

Beweis. Wegen $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}_{\mathcal{H}} \subset \mathcal{C}(X)$ ist Satz 1 auf $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathcal{H}}$ anwendbar. Jede Funktion aus $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}$ besitzt also eine $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}$-extremale Minimalstelle. Nach Satz 7 gilt $\mathcal{M}_x(\mathcal{E}_{\mathcal{H}}) = \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ für alle $x \in X$. Daher ist $X_e(\mathcal{H}) = X_e(\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$, woraus die Behauptung folgt.

Wegen $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}_{\mathcal{H}}$ folgt aus dem letzten Korollar noch, daß $\partial_{\mathcal{H}}X = \partial_{\mathcal{E}_{\mathcal{H}}}X$ ist.

§ 3. — Das abstrakte Dirichletsche Problem.

3. 1. *$\mathcal{H}$-harmonische Maße und $\mathcal{H}$-resolutive Funktionen.* — Für eine beliebige Menge $S \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ folgt aus der Gleichung (2. 20), daß jede $\mathcal{H}$-harmonische Funktion h eindeutig durch

([5]) Vgl. hierzu auch Choquet-Deny [23].

ihre Restriktion h_S auf S bestimmt ist. Für jede Funktion $g \in \hat{\mathcal{H}}$ mit $g_S = h_S$ gilt nämlich $(g - h)_S = 0$. Hieraus folgt $g = h$, da $g - h$ sowohl eine Maximal- als auch eine Minimalstelle in S besitzt. Wir stoßen daher auf das folgende « *abstrakte*» *Dirichletsche Problem:* Man gebe notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, daß *eine* Funktion $f \in \mathcal{C}(S)$ oder *jede* Funktion aus $\mathcal{C}(S)$ zu einer $\mathcal{H}$-harmonischen Funktion auf X fortgesetzt werden kann.

Eine Antwort auf die erste Frage gibt folgender Satz:

SATZ 8. — *Für jede Menge* $S \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ *und jede Funktion* $f \in \mathcal{C}(S)$ *sind folgende Aussagen gleichwertig:*

(*a*) *f kann zu einer $\mathcal{H}$-harmonischen Funktion auf* X *fortgesetzt werden.*

(*b*) *Für jeden Punkt* $x \in X$ *und je zwei Maße* $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_x^S(\mathcal{H})$ *gilt:*

$$\int f\, d\mu_1 = \int f\, d\mu_2.$$

(*c*) $\underline{Q}_x^S(f) = \overline{Q}_x^S(f)$ *für jedes* $x \in X$.

Beweis. (*a*) $\Longrightarrow$ (*b*): Es gibt eine Funktion $h \in \hat{\mathcal{H}}$ mit $f = h_S$. Daher gilt $h(x) = \int h_S\, d\mu = \int f\, d\mu$ für alle $x \in X$ und $\mu \in \mathcal{M}_x^S$. Hieraus folgt (*b*).

(*b*) $\Longrightarrow$ (*c*): Dies folgt aus Satz 3.

(*c*) $\Longrightarrow$ (*a*): Wir definieren eine reelle Funktion *h* auf X durch: $h(x) = \underline{Q}_x^S(f) = \overline{Q}_x^S(f)$. Nach (2. 6) und (2. 7) ist sie nach oben und unten halbstetig, also stetig. Nach Satz 3 gilt $h(x) = \int f d\mu$ für alle $x \in X$ und $\mu \in \mathcal{M}_x^S$. Da für jeden Punkt $x \in S$ das Maß ε_x zu $\mathcal{M}_x^S$ gehört, ergibt sich: $h(x) = \int f\, d\varepsilon_x = f(x)$. Also ist *h* eine Fortsetzung von *f*. Die für alle $x \in X$ und $\mu \in \mathcal{M}_x^S$ gültige Gleichung $h(x) = \int f d\mu = \int h_S\, d\mu$ besagt dann, daß *h* $\mathcal{H}$-harmonisch ist.

Bei der Behandlung der zweiten Frage, die uns im folgenden ausschließlich beschäftigen wird, können wir uns auf den Fall $S = \partial_{\mathcal{H}} X$ beschränken. In der Tat: Kann jede Funktion aus $\mathcal{C}(S)$ zu einer $\mathcal{H}$-harmonischen Funktion fortgesetzt werden, so kann auch jede Funktion aus $\mathcal{C}(\partial_{\mathcal{H}} X)$ zunächst zu einer Funktion aus $\mathcal{C}(S)$ und diese zu einer Funktion aus $\hat{\mathcal{H}}$ fortgesetzt werden. Wegen $\partial_{\mathcal{H}} X \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ kann also jede Funk-

tion aus $\mathcal{C}(\partial_{\mathcal{H}}X)$ auf genau eine Weise zu einer Funktion aus $\mathcal{C}(S)$ fortgesetzt werden. Wegen der Normalität kompakter Räume ist dies nur möglich, wenn $S = \partial_{\mathcal{H}}X$ ist.

Wir setzen daher im folgenden zur Abkürzung:

$$(3.1) \quad X^* = \partial_{\mathcal{H}}X \quad \text{und} \quad \mathcal{M}_x^* = \mathcal{M}_x^{X^*}(\mathcal{H}) \quad \text{für jedes } x \in X.$$

Die Elemente von $\mathcal{M}_x^*$ sollen die *zum Punkt* $x \in X$ *gehörigen* $\mathcal{H}$-*harmonischen Maße* genannt werden. Ferner werde eine Funktion $f \in \mathcal{C}(X^*)$ als $\mathcal{H}$-*resolutiv* bezeichnet, wenn sie zu einer Funktion aus $\hat{\mathcal{H}}$ fortgesetzt werden kann.

Aus dem Satz 8 erhalten wir nun sofort eine erste Antwort auf unsere zweite Frage:

Satz 9. — *Jede der beiden folgenden Bedingungen ist notwendig und hinreichend dafür, daß jede Funktion aus* $\mathcal{C}(X^*)$ $\mathcal{H}$-*resolutiv ist:*

(*a*) *Zu jedem Punkt* $x \in X$ *gehört genau ein* $\mathcal{H}$-*harmonisches Maß.*

(*b*) *Für alle* $x \in X$ *und* $f \in \mathcal{C}(X^*)$ *gilt:* $\underline{Q}_x^{X^*}(f) = \overline{Q}_x^{X^*}(f)$.

3. 2. *Verbandsstruktur von* $\hat{\mathcal{H}}$. — Es soll jetzt ein Kriterium anderer Art für die $\mathcal{H}$-Resolutivität aller Funktionen aus $\mathcal{C}(X^*)$ angegeben werden.

Wir betrachten hierzu die Abbildung $h \to h_{X^*}$ von $\hat{\mathcal{H}}$ in $\mathcal{C}(X^*)$, welche jedem $h \in \hat{\mathcal{H}}$ seine Restriktion h_{X^*} auf X^* zuordnet. Es handelt sich offenbar um einen Monomorphismus bezüglich der Ordnungsstruktur: aus $g \leqslant h$ folgt $g_{X^*} \leqslant h_{X^*}$ und umgekehrt. Wenn speziell jede Funktion aus $\mathcal{C}(X^*)$ $\mathcal{H}$-resolutiv ist, liegt ein Isomorphismus der geordneten Mengen $\hat{\mathcal{H}}$ und $\mathcal{C}(X^*)$ vor. Mit $\mathcal{C}(X^*)$ ist dann also auch $\hat{\mathcal{H}}$ ein *Verband*, wegen der Verträglichkeit der Relation $\leqslant$ mit der Vektorraumstruktur also sogar ein *Rieszscher Raum.*

Das angekündigte Kriterium lautet nun:

Satz 10. — *Dann und nur dann ist jede Funktion aus* $\mathcal{C}(X^*)$ $\mathcal{H}$-*resolutiv, wenn* $\hat{\mathcal{H}}$ *bezüglich der üblichen Ordnungsrelation* $\leqslant$ *ein Verband ist.*

Zu beweisen ist nur noch, daß die angegebene Bedingung auch hinreichend ist. Der Beweis soll erst in den beiden

nächsten Nummern erbracht werden. Hier sollen zunächst einige Folgerungen aus Satz 10 besprochen werden.

Im Verband $\hat{\mathcal{H}}$ bezeichnen wir die Verbandsoperationen mit Sup und Inf. Offenbar gilt für je zwei Funktionen $h_1, h_2 \in \hat{\mathcal{H}}$:

$$(3.2) \quad \operatorname{Inf}(h_1, h_2) \leqslant \inf(h_1, h_2) \leqslant \sup(h_1, h_2) \leqslant \operatorname{Sup}(h_1, h_2).$$

Im allgemeinen ist $\operatorname{Sup}(h_1, h_2) \neq \sup(h_1, h_2)$ wie Beispiel 7 zeigt, welches zudem eine erste Illustration unseres Satzes 10 liefert.

Mit Hilfe der Menge $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}$ aus Nr. 2. 5 kann der Satz 10 auch wie folgt formuliert werden:

Korollar 1. — *Dann und nur dann ist jede Funktion aus $\mathcal{C}(X^*)$ $\mathcal{H}$-resolutiv, wenn jede Funktion $u \in \mathcal{E}_{\mathcal{H}}$ eine größte $\mathcal{H}$-harmonische Minorante h_u besitzt.*

Beweis. Es sei jede Funktion aus $\mathcal{C}(X^*)$ $\mathcal{H}$-resolutiv. Speziell ist dann für jedes $u \in \mathcal{E}_{\mathcal{H}}$ die Restriktion u_{X^*} auf X^* $\mathcal{H}$-resolutiv, also existiert ein $h_u \in \hat{\mathcal{H}}$ mit $h_u(x) = u(x)$ für alle $x \in X^*$. Wegen $\hat{\mathcal{H}} \subset \mathcal{E}_{\mathcal{H}}$ ist $u - h_u$ eine Funktion aus $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}$. Aus $u(x) - h_u(x) = 0$ für alle $x \in X^*$ folgt $u - h_u \geqslant 0$ nach dem Korollar 3 zu Satz 7. Also ist h_u eine $\mathcal{H}$-harmonische Minorante von u. Sie ist sogar die größte: Aus $h \in \hat{\mathcal{H}}$ und $h \leqslant u$ folgt $h(x) \leqslant h_u(x)$ für alle $x \in X^*$ und hieraus $h \leqslant h_u$.

Nunmehr werde umgekehrt die Existenz von h_u für jedes $u \in \mathcal{E}_{\mathcal{H}}$ vorausgesetzt. Für jede Funktion $h \in \hat{\mathcal{H}}$ gehört $u = \inf(h, 0)$ zu $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}$. Die zugehörige Funktion h_u ist dann eine $\mathcal{H}$-harmonische Minorante von h und 0. Für jede andere Minorante $h' \in \hat{\mathcal{H}}$ von h und 0 gilt $h' \leqslant u$ und somit $h' \leqslant h_u$. Also ist h_u die größte $\mathcal{H}$-harmonische Minorante von h und 0: es existiert $\operatorname{Inf}(h, 0) = h_u$. Hieraus folgt, daß $\hat{\mathcal{H}}$ ein Verband ist. Die Behauptung folgt daher aus Satz 10.

Korollar 2. — *Dann und nur dann kann jede Funktion aus $\mathcal{C}(X^*)$ zu einer Funktion aus dem Vektorraum $\mathcal{H}$ selbst fortgesetzt werden, wenn $\mathcal{H}$ in $\mathcal{C}(X)$ abgeschlossen und ein Verband ist.*

Beweis. Kann jede Funktion aus $\mathcal{C}(X^*)$ zu einer Funktion aus $\mathcal{H}$ fortgesetzt werden, so ist offenbar $\mathcal{H} = \hat{\mathcal{H}}$ und jede

Funktion aus $\mathcal{C}(X^*)$ $\mathcal{H}$-resolutiv. Nach Nr. 2. 3 ist daher $\mathcal{H}$ in $\mathcal{C}(X)$ abgeschlossen, nach Satz 10 ein Verband. — Besitzt umgekehrt $\mathcal{H}$ diese Eigenschaften, so ist $\mathcal{H} = \hat{\mathcal{H}}$ nach Satz 6 und die Behauptung folgt abermals nach Satz 10.

Bemerkung. — Wenn $\hat{\mathcal{H}}$ ein Verband ist, so ist $\hat{\mathcal{H}}$ bezüglich der Norm $||h|| = \sup_{x \in X} |h(x)|$ sogar ein M-Raum im Sinne von Kakutani [27], d.h. es gilt

$$||\mathrm{Sup}\,(h_1, \ h_2)|| = \sup\,(||h_1||, \ ||h_2||)$$

für je zwei Funktionen $h_i \in \hat{\mathcal{H}}$ mit $h_i \geqslant 0$. Nach dem Hauptresultat von [27] ist jeder M-Raum isomorph zum Rieszschen Raum aller stetigen reellen Funktionen auf einem kompakten Raum Y. Der Satz 10 zeigt, daß der zu $\hat{\mathcal{H}}$ gehörige Raum Y zu X^* homöomorph ist.

3. 3. *Hilfssätze über Rieszsche Räume.* — Wir erinnern zunächst an einige bekannte Begriffsbildungen über Rieszsche Räume ([6]). Es sei hierzu R ein Rieszscher Raum; mit Sup und Inf sollen die Verbandsoperationen bezeichnet werden. Ein linearer Unterraum N von R heißt *gesättigt*, wenn jedes Element $f \in N$ von der Form $f = f_1 - f_2$ ist mit $f_i \in N$, $f_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2)$ und wenn aus $0 \leqslant g \leqslant f$, $f \in N$, $g \in R$ stets $g \in N$ folgt. Mit diesen Forderungen gleichwertig ist die Bedingung : aus $f \in N$, $g \in R$ und $\mathrm{Sup}\,(g, -g) \leqslant \mathrm{Sup}(f, -f)$ folgt $g \in N$.

Zu jedem linearen Unterraum N von R gehört der Quotientenraum R/N und die kanonische Abbildung $\varphi : R \to R/N$. Ist N gesättigt und R^+ die Menge aller Elemente $\geqslant 0$ in R, so gibt es in R/N genau eine mit der Vektorraumstruktur verträgliche Ordnungsrelation, bezüglich welcher $\varphi(R^+)$ die Menge aller Elemente $\geqslant 0$ in R/N ist. R/N ist dann sogar ein Rieszscher Raum, und es gilt :

$$(3.\,3) \quad \varphi(\mathrm{Sup}(h_1, h_2)) = \mathrm{Sup}(\varphi(h_1), \varphi(h_2)) \qquad (h_1, h_2) \in R.$$

Ein gesättigter linearer Unterraum N von R heißt *maximal*, wenn $N \neq R$ ist und für jeden gesättigten linearen Unterraum N' mit $N \subset N' \subset R$ gilt : $N = N'$ oder $N' = R$.

([6]) Vgl. hierzu und für das Folgende Bourbaki [14], chap. II, insbesondere p. 27, exercice 4, sowie [11], p. 23, exercice 4.

Zur Vorbereitung des Beweises von Satz 10 benötigen wir einige Hilfssätze:

Hilfssatz 2. — *Es sei* N *ein maximaler gesättigter linearer Unterraum eines Rieszschen Raumes* R. *Dann ist* N *eine Hyperebene in* R *und es gibt eine positive Linearform* χ *auf* R *mit* $N = \chi^{-1}(0)$. *Jede solche positive Linearform* χ *genügt den folgenden Bedingungen:*

(3. 4) $\chi(\mathrm{Sup}\,(h_1, h_2)) = \sup\,(\chi(h_1), \chi(h_2)) \quad (h_1, h_2 \in \mathrm{R});$

(3. 5) $\chi(\mathrm{Inf}\,(h_1, h_2)) = \inf\,(\chi(h_1), \chi(h_2)) \quad (h_1, h_2 \in \mathrm{R});$

(3. 6) $\mathrm{Inf}\,(h_1, h_2) = 0 \Rightarrow \chi(h_1) = 0$ *oder* $\chi(h_2) = 0 \; (h_1, h_2 \in \mathrm{R}).$

Diese sind für jede positive Linearform χ *auf* R *äquivalent.*

Beweis. Es sei φ: $\mathrm{R} \to \mathrm{R/N}$ die kanonische Abbildung von R auf den Rieszschen Raum R/N. Aus der Maximaleigenschaft von N folgt, daß $\{0\}$ der einzige maximale gesättigte lineare Unterraum von R/N ist. Daher existiert ein Isomorphismus $\psi: \mathrm{R/N} \to \mathbf{R}$ auf den Rieszschen Raum $\mathbf{R}$ der reellen Zahlen [7]. Dann ist $\chi_0 = \psi \circ \varphi$ eine positive Linearform auf R mit $\chi_0^{-1}(0) = \varphi^{-1}(0) = \mathrm{N}$, welche nach (3. 3) die Eigenschaft (3. 4) besitzt. Insbesondere ist dann N eine Hyperebene in R. Jede andere positive Linearform χ auf R mit $\chi^{-1}(0) = \mathrm{N}$ ist von der Form $\chi = \lambda\chi_0$ mit $\lambda > 0$, $\lambda \in \mathbf{R}$, und besitzt daher ebenfalls die Eigenschaft (3. 4). Schließlich rechnet man leicht nach, daß die Eigenschaften (3. 4)-(3. 6) für jede positive Linearform χ auf R äquivalent sind [8].

Hilfssatz 3. — *Für jede positive Linearform* $\chi \neq 0$ *auf einem Rieszschen Raum* R, *welche die Eigenschaften* (3. 4)-(3. 6) *besitzt, ist* $\mathrm{N} = \chi^{-1}(0)$ *ein maximaler gesättigter linearer Unterraum.*

Beweis. Für jedes Element $f \in \mathrm{R}$ gilt bekanntlich $f = f^+ - f^-$ und $\mathrm{Inf}\,(f^+, f^-) = 0$, wenn man setzt: $f^+ = \mathrm{Sup}(f, 0)$ und $f^- = (-f)^+$. Aus (3. 6) folgt daher $\chi(f^+) = 0$ oder $\chi(f^-) = 0$. Wegen $\chi(f) = \chi(f^+) - \chi(f^-)$ folgt hieraus: $\chi(f^+) = \chi(f^-) = 0$ für jedes $f \in \mathrm{N}$; also liegen mit f auch f^+ und f^- in N. Somit ist jedes $f \in \mathrm{N}$ die Differenz von Elementen $\geqslant 0$ aus N. Aus

[7] Vgl. Birkhoff [7], p. 239; gesättigte lineare Unterräume werden dort l-Ideale genannt. Vgl. ferner Bourbaki [11], p. 23, exercice 4.

[8] Vgl. auch Kakutani [27], p. 1001.

$0 \leqslant g \leqslant f$, $f \in \mathrm{N}$, $g \in \mathrm{R}$ und der Positivität von χ folgt: $\chi(g) = 0$, also $g \in \mathrm{N}$. Somit ist N ein gesättigter linearer Unterraum von R. N ist maximal, da N als Hyperebene sogar ein maximales Element in der Menge aller echten linearen Unterräume von R ist.

Hilfssatz 4. — *Es sei* Y *ein kompakter Raum und* $\mathfrak{R}$ *ein die Punkte von* Y *trennender, die konstanten reellen Funktionen enthaltender, linearer Unterraum von* $\mathcal{C}(\mathrm{Y})$. *Ferner sei* $\mathfrak{R}$ *ein Verband bezüglich der üblichen Relation* $\leqslant$ *(und damit ein Rieszscher Raum). Dann existiert zu jedem maximalen gesättigten linearen Unterraum* $\mathfrak{N}$ *von* $\mathfrak{R}$ *genau ein Punkt* $y_0 \in \mathrm{Y}$ *derart, daß* $\mathfrak{N}$ *die Menge aller* $f \in \mathfrak{R}$ *ist mit* $f(y_0) = 0$.

Beweis. Auf Grund der Voraussetzungen über $\mathfrak{R}$ gibt es zu je zwei verschiedenen Punkten $y_1, y_2 \in \mathrm{Y}$ eine Funktion $f \in \mathfrak{R}$ mit $f(y_1) = 0$ und $f(y_2) \neq 0$. Daher kann zu $\mathfrak{N}$ höchstens ein Punkt y_0 mit den genannten Eigenschaften existieren. Den Existenzbeweis führen wir indirekt: Angenommen zu jedem $y \in \mathrm{Y}$ gibt es eine Funktion $f_y \in \mathfrak{N}$ mit $f_y(y) \neq 0$. Da sich jede Funktion aus $\mathfrak{N}$ als Differenz nicht-negativer Funktionen aus $\mathfrak{N}$ darstellen läßt, kann o.B.d.A. $f_y \geqslant 0$ angenommen werden. Daher gibt es zu $y \in \mathrm{Y}$ eine offene Umgebung U_y von y mit: $f_y(z) > 0$ für alle $z \in \mathrm{U}_y$. Da Y kompakt ist, gibt es endlich viele Punkte $y_1, \ldots, y_n \in \mathrm{Y}$ mit $\mathrm{Y} = \mathrm{U}_{y_1} \cup \cdots \cup \mathrm{U}_{y_n}$. Die Funktion $f_0 = f_{y_1} + \cdots + f_{y_n}$ liegt in $\mathfrak{N}$ und ist auf Y strikt positiv. Zu jedem $f \in \mathfrak{R}$ mit $f \geqslant 0$ gibt es daher eine Zahl $\alpha > 0$ mit $0 \leqslant f \leqslant \alpha f_0$, woraus $f \in \mathfrak{N}$ folgt. Hieraus ergibt sich aber $\mathfrak{N} = \mathfrak{R}$, was falsch ist. Damit ist die Existenz eines $y_0 \in \mathrm{Y}$ bewiesen mit $f(y_0) = 0$ für alle $f \in \mathfrak{N}$. Es ist $\mathfrak{N}$ sogar gleich der Menge $\mathfrak{N}'$ aller $f \in \mathfrak{R}$ mit $f(y_0) = 0$. Es ist nämlich $\mathfrak{N}$ eine Hyperebene in $\mathfrak{R}$ nach Hilfssatz 2; $\mathfrak{N}'$ ist eine Hyperebene in $\mathfrak{R}$ nach Definition. Aus $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}'$ folgt daher $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}'$.

Der Hilfssatz 4 kann unter Heranziehung der vorausgehenden Hilfssätze auch wie folgt ausgesprochen werden: *Zu jeder positiven Linearform* χ *auf* $\mathfrak{R}$ *mit* $\chi(1) = 1$ *und den gleichwertigen Eigenschaften* (3. 4)-(3. 6) *gibt es genau einen Punkt* $y_0 \in \mathrm{Y}$ *mit* $\chi(f) = f(y_0)$ *für alle* $f \in \mathfrak{R}$.

Wir fragen daher jetzt nach allen Punkten $y \in \mathrm{Y}$, für welche die Linearform $f \to f(y)$ auf $\mathfrak{R}$ die Eigenschaften (3. 4)-(3. 6)

besitzt. Hiermit gleichbedeutend ist die Frage nach allen Punkten $y \in Y$, für welche die Menge $\mathfrak{N}_y = \{f \in \mathfrak{R} : f(y) = 0\}$ ein (notwendig maximaler) gesättigter linearer Unterraum ist.

Hilfssatz 5. — *Unter den in Hilfssatz 4 über* Y *und* $\mathfrak{R}$ *gemachten Voraussetzungen gilt: Die Menge* Y_0 *aller Punkte* $y \in Y$, *für welche die Linearform* $f \to f(y)$ *auf* $\mathfrak{R}$ *die Eigenschaften* (3. 4)-(3. 6) *besitzt, ist gleich dem Šilovschen Rand* $\partial_{\mathfrak{R}} Y$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß Y_0 abgeschlossen und damit kompakt ist. Hierzu sei $y \in \complement Y_0$. Dann gibt es Funktionen $f_1, f_2 \in \mathfrak{R}$ mit $\operatorname{Inf}(f_1, f_2) = 0$ sowie mit $f_1(y) > 0$ und $f_2(y) > 0$. Aus Stetigkeitsgründen sind f_1 und f_2 sogar noch in einer Umgebung U von y strikt positiv. Also ist U zu Y_0 fremd. Damit ist die Offenheit von $\complement Y_0$, also die Abgeschlossenheit von Y_0 bewiesen.

Weiter besitzt jede Funktion $f_0 \in \mathfrak{R}$ eine in Y_0 gelegene Minimalstelle. Hierzu sei $\alpha = \inf\limits_{y \in Y} f_0(y)$ und M die Menge aller Minimalstellen von f_0. Wir betrachten die Menge $\mathfrak{N}_0$ aller Funktionen $f \in \mathfrak{R}$, die sich in der Form $f = f_1 - f_2$ darstellen lassen, wobei $f_i \in \mathfrak{R}$, $f_i \geqslant 0$ und $f_i(x) = 0$ ist für alle $x \in M$ $(i = 1, 2)$. Offenbar ist $\mathfrak{N}_0$ ein gesättigter linearer Unterraum, der $f_0 - \alpha$ aber nicht die konstante Funktion 1 als Element enthält. Eine einfache Anwendung des Zornschen Lemmas ergibt dann die Existenz eines maximalen gesättigten linearen Unterraumes $\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{N}_0 \subset \mathfrak{N}$. Nach Hilfssatz 4 entspricht diesem genau ein Punkt $y_0 \in Y$ mit: $\mathfrak{N} = \{f \in \mathfrak{R} : f(y_0) = 0\}$. Nach der diesem Hilfssatz vorangestellten Bemerkung liegt y_0 in Y_0; wegen $f_0 - \alpha \in \mathfrak{N}_0 \subset \mathfrak{N}$ gilt $f_0(y_0) = \alpha$. Also ist y_0 eine in Y_0 gelegene Minimalstelle von f_0.

Schließlich haben wir noch zu zeigen, daß Y_0 in $Y^* = \partial_{\mathfrak{R}} Y$ enthalten und damit gleich Y^* ist. Hierzu betrachten wir die Abbildung $f \to f_{Y^*}$ von $\mathfrak{R}$ auf den Vektorraum $\mathfrak{R}_{Y^*}$ aller Restriktionen f_{Y^*} mit $f \in \mathfrak{R}$; diese ist ein Isomorphismus bezüglich der Vektorraumstruktur und der Ordnungsstruktur. Insbesondere ist also mit $\mathfrak{R}$ auch $\mathfrak{R}_{Y^*}$ ein Verband. Ferner folgt, daß für jeden Punkt $y_0 \in Y_0$ die auf $\mathfrak{R}_{Y^*}$ definierte positive Linearform $f_{Y^*} \to f(y_0) = \chi(f_{Y^*})$ die Eigenschaften (3. 4)-(3. 6) besitzt. Aus dem Hilfssatz 4 ergibt sich daher die Existenz

eines Punktes $z_0 \in Y^*$ mit $f_{Y^*}(z_0) = \chi(f_{Y^*})$, also mit $f(z_0) = f(y_0)$ für alle $f \in \mathfrak{R}$. Hieraus folgt $z_0 = y_0 \in Y^*$. Also gilt $Y_0 \subset Y^*$, was noch zu zeigen war.

3. 4. *Beweis des Satzes 10.* — Es werde nun $\hat{\mathcal{H}}$ als Verband vorausgesetzt. Zu zeigen ist die $\mathcal{H}$-Resolutivität aller Funktionen aus $\mathcal{C}(X^*)$.

Nach dem Hilfssatz 5 (angewandt auf $Y = X$ und $\mathfrak{R} = \hat{\mathcal{H}}$) ist X^* die Menge aller Punkte $x \in X$, für welche die positive Linearform $h \to h(x)$ die Eigenschaften (3. 4)-(3. 6) besitzt. Nach (3. 4) gilt dann also:

$$(3.\ 7) \qquad [\operatorname{Sup}(g, h)]_{X^*} = \sup(g_{X^*}, h_{X^*})$$

für je zwei Funktionen $g, h \in \hat{\mathcal{H}}$. Daher genügt der lineare Unterraum $\hat{\mathcal{H}}_{X^*}$ von $\mathcal{C}(X^*)$ aller Restriktionen h_{X^*} mit $h \in \hat{\mathcal{H}}$ den Voraussetzungen des Approximationssatzes von M. H. Stone. Nach diesem Satz ist $\hat{\mathcal{H}}_{X^*}$ in $\mathcal{C}(X^*)$ dicht. Nun ist aber $\hat{\mathcal{H}}$ in $\mathcal{C}(X)$ abgeschlossen; aus den fundamentalen Eigenschaften des Šilovschen Randes folgt dann auch die Abgeschlossenheit von $\hat{\mathcal{H}}_{X^*}$ in $\mathcal{C}(X^*)$. Also ist $\hat{\mathcal{H}}_{X^*} = \mathcal{C}(X^*)$ und damit der Beweis für Satz 10 erbracht.

3. 5. *Aussagen über den Choquetschen Rand.* — Abschliessend untersuchen wir die Frage, in welcher Weise die $\mathcal{H}$-Resolutivität jeder Funktion aus $\mathcal{C}(X^*)$ den Choquetschen Rand X_e einschränkt.

Satz 11. — *Ist jede Funktion aus $\mathcal{C}(X^*)$ $\mathcal{H}$-resolutiv, so ist der Choquetsche Rand $X_e(\mathcal{H})$ gleich dem Šilovschen Rand $\partial_{\mathcal{H}} X$.*

Beweis. Zu zeigen ist offenbar nur: $X^* \subset X_e$. Nach Satz 9 gehört zu jedem Punkt $x \in X$ genau ein $\mathcal{H}$-harmonisches Maß μ_x; speziell ist $\mu_x = \varepsilon_x$ für $x \in X^*$. Die durch $\varphi(x) = \mu_x$ definierte Abbildung $\varphi : X \to \mathcal{M}(X^*)$ ist stetig. Es sei nämlich $\mathfrak{F}$ ein gegen $x_0 \in X$ konvergenter Filter in X; dann gilt aus Stetigkeitsgründen: $h(x_0) = \lim_{\mathfrak{F}} h(x)$, d. h. $\int h_{X^*}\, d\mu_{x_0} = \lim_{\mathfrak{F}} \int h_{X^*}\, d\mu_x$ für alle $h \in \hat{\mathcal{H}}$. Da nach Voraussetzung jede Funktion $f \in \mathcal{C}(X^*)$ von der Form $f = h_{X^*}$ mit $h \in \hat{\mathcal{H}}$ ist, bedeutet dies: $\mu_{x_0} = \lim_{\mathfrak{F}} \mu_x$, also die Stetigkeit von φ. Es sei jetzt x_0 ein beliebiger Punkt aus

X^* und $\mu \in \mathcal{M}(X)$ ein Maß mit $\int h\,d\mu = h(x_0)$ für alle $h \in \mathcal{H}$. Wegen der Stetigkeit von φ existiert $\int \varphi\,d\mu$ und es ist $\mu_\varphi = \int \varphi\,d\mu = \int \mu_x\,d\mu(x)$ ein Maß aus $\mathcal{M}(X^*)$; es gilt

$$\int h_{X^*}\,d\mu_\varphi = \int \left(\int h_{X^*}\,d\mu_x\right) d\mu(x) = \int h(x)\,d\mu(x) = h(x_0)$$

für alle $h \in \mathcal{H}$. Also ist μ_φ das zu x_0 gehörige $\mathcal{H}$-harmonische Maß, d.h. $\mu_\varphi = \varepsilon_{x_0}$. Aus $\varepsilon_{x_0} = \int \mu_x\,d\mu(x)$ und $\int d\mu = 1$ folgt aber $\mu = \varepsilon_{x_0}$. In der Tat: für die in X^* offene Menge $U = X^* \cap \complement\{x_0\}$ gilt ([15], p. 19, corollaire)

$$0 = \varepsilon_{x_0}(U) = \int^* \mu_x(U)\,d\mu(x),$$

woraus $\mu_x(U) = 0$ für μ-fast alle $x \in X$ folgt. Nun ist aber $\mu_x(U) = 0$ und $\int d\mu = 1$ gleichbedeutend mit $\mu_x = \varepsilon_{x_0}$. Daher ist $\mu_x(U) > 0$ für alle $x \neq x_0$ aus X. Wir erhalten somit $\mu\left(\complement\{x_0\}\right) = 0$, was zusammen mit $\int d\mu = 1$ die Gleichheit $\mu = \varepsilon_{x_0}$ liefert. Also ist damit gezeigt, daß jeder Punkt $x_0 \in X^*$ $\mathcal{H}$-extremal ist.

Wenn der Raum X (oder auch nur X^*) metrisierbar ist, läßt sich dieses Resultat verschärfen zu:

Satz 12. — *Ist jede Funktion aus $\mathcal{C}(X^*)$ $\mathcal{H}$-resolutiv und ist X^* metrisierbar, so ist jeder Punkt des Šilovschen Randes X^* $\hat{\mathcal{H}}$-exponiert.*

Beweis. Es sei x_0 in X^* beliebig gewählt. Nach Voraussetzung gibt es eine Funktion $f \in \mathcal{C}(X^*)$ mit $f(x) > f(x_0) = 0$ für alle $x \neq x_0$ aus X^*. Wir behaupten, daß dann für die Funktion $h \in \hat{\mathcal{H}}$ mit $h_{X^*} = f$ gilt: $h(x) > h(x_0) = f(x_0) = 0$ für alle $x \neq x_0$ aus X. Wegen $f \geqslant 0$ gilt zunächst $h \geqslant 0$. Es sei $x \in X$ mit $h(x) = 0$. Wir zeigen, daß dies $x = x_0$ zur Folge hat. Für das zu x gehörige $\mathcal{H}$-harmonische Maß μ_x gilt: $\int f\,d\mu_x = 0 = f(x_0)$. Hieraus folgt ([5], Hilfssatz 3), daß f auf dem Träger T_{μ_x} von μ_x gleich Null ist. Da x_0 die einzige Nullstelle von f ist, impliziert dies $T_{\mu_x} \subset \{x_0\}$. Zusammen mit $\int d\mu_x = 1$ ergibt dies: $\mu_x = \varepsilon_{x_0}$. Da $\mathcal{H}$ die Punkte von X trennt, muß dann schließlich $x = x_0$ sein.

§ 4. — Anwendung: Kennzeichnung gewisser Simplexe von G. CHOQUET.

4. 1. *Lineare und konkave Funktionen.* — Der bislang beliebige kompakte Grundraum X sei in diesem Paragraphen eine *konvexe, kompakte* Teilmenge eines *lokal-konvexen* topologischen Vektorraumes E (über R) ([9]). Mit $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(X)$ bezeichnen wir die Menge aller auf X eingeschränkten, stetigen, *affin-linearen* Funktionen auf E. Affin-linear auf E heißt dabei jede Funktion $f = l + \alpha$ auf E, wobei l eine Linearform auf E und α eine konstante reelle Funktion ist. Im folgenden überneh-me $\mathfrak{L}$ die Rolle des Vektorraumes $\mathcal{H}$ der allgemeinen Theorie. Dies ist möglich, da $\mathfrak{L}$ die Eigenschaften (2. 1)-(2. 3) besitzt. Die Eigenschaft (2. 3) ergibt sich dabei wie folgt: Sind x, y verschiedene Punkte aus X, so liegt y nicht in der abgeschlossenen Hülle N von $\{x\}$ in E, da X Hausdorffsch ist. Aus einem bekannten Trennungssatz ([12], p. 73, prop. 4) folgt dann die Existenz einer stetigen Linearform auf E, die N und $\{x\}$, also erst recht x und y trennt.

Wir interpretieren nun die wichtigsten Begriffe der allgemeinen Theorie in unserem Spezialfall. Wir beginnen mit der in 2. 5 definierten Menge $\mathcal{E}_{\mathfrak{L}}$.

Hilfssatz 6. — *$\mathcal{E}_{\mathfrak{L}}$ ist die Menge aller auf* X *definierten, konkaven, stetigen, reellen Funktionen.*

Beweis ([10]). Die Menge $\mathfrak{K}$ aller auf X konkaven, stetigen, reellen Funktionen ist eine abgeschlossene, inf-stabile Teilmenge von $\mathcal{C}(X)$ mit $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{K}$. Daher gilt $\mathcal{E}_{\mathfrak{L}} \subset \mathfrak{K}$. Für eine beliebige Funktion $u \in \mathfrak{K}$ zeigen wir, daß sie die untere Einhüllende aller $h \in \mathfrak{L}$ mit $h \geqslant u$ ist. Dann ist $\overline{Q}^x_x(u) = u(x)$ für alle $x \in X$,

([9]) Es ist also X, aber nicht notwendig E Hausdorffsch. Jedoch könnte man im folgenden E auch als Hausdorffsch voraussetzen, ohne dabei die Allgemeinheit wesentlich einzuschränken. Es bezeichne nämlich N die abgeschlossene Hülle von $\{0\}$ in E und $E_0 = E/N$ den zu E assoziierten Hausdorffschen lokal-konvexen Raum. Dann bildet die kanonische Abbildung $\varphi : E \to E_0$ den Raum X homöomorph auf $\varphi(X)$ ab. Durchläuft l alle stetigen Linearformen auf E_0, so durchläuft $l \circ \varphi$ alle stetigen Linearformen auf E.

([10]) Vgl. auch Klee [30], p. 99.

also $u \in \mathcal{E}_{\mathfrak{L}}$ nach Satz 7. Somit ergibt sich die behauptete Gleichheit: $\mathcal{E}_{\mathfrak{L}} = \mathfrak{K}$.

Es sei $u \in \mathfrak{K}$, $x_0 \in \mathrm{X}$ und $\gamma \in \mathrm{R}$ mit $u(x_0) < \gamma$. Zu zeigen ist die Existenz eines $h \in \mathfrak{L}$ mit $u \leqslant h$ und $h(x_0) < \gamma$. Hierzu betrachten wir im lokal-konvexen Raum $\mathrm{E}_1 = \mathrm{E} \times \mathrm{R}$ die Menge

$$\mathrm{A} = \{(x, \xi) : x \in \mathrm{X},\ \xi \leqslant u(x)\}.$$

Dann sind A und $\overline{\mathrm{A}}$ konvex in E_1, da u konkav ist. Der Punkt (x_0, γ) liegt nicht in $\overline{\mathrm{A}}$. Zu jeder Zahl γ' mit $u(x_0) < \gamma' < \gamma$ gibt es nämlich eine Umgebung V von x_0 in E mit $u(x) < \gamma'$ für alle $x \in \mathrm{V} \cap \mathrm{X}$; setzen wir noch $\mathrm{W} = \{\lambda \in \mathrm{R} : \lambda > \gamma'\}$, so ist $\mathrm{V} \times \mathrm{W}$ eine zu A fremde Umgebung von (x_0, γ) in E_1. Nach dem bereits zitierten Trennungssatz gibt es eine stetige Linearform f_1 auf E_1 mit:

$$(4.\ 1) \qquad \eta = \sup_{(x,\, \xi) \in \mathrm{A}} f_1(x, \xi) < f_1(x_0, \gamma).$$

Nun ist offenbar: $f_1(x, \xi) = f(x) + \tau\xi$ für alle $(x, \xi) \in \mathrm{E}_1$, wobei f eine stetige Linearform auf E und $\tau = f_1(0, 1)$ ist. Wegen $(x_0, u(x_0)) \in \mathrm{A}$ ist $f_1(x_0, u(x_0)) < f_1(x_0, \gamma)$, wegen $\gamma - u(x_0) > 0$ also $\tau > 0$. Bezeichnen wir mit h die Restriktion von $\tau^{-1}(\eta - f)$ auf X, so ist $h \in \mathfrak{L}$. Aus (4. 1) folgt $u \leqslant h$ und $h(x_0) < \gamma$.

Aus diesem Hilfssatz und dem Korollar 1 zu Satz 7 folgt nun die Interpretation der Menge $\hat{\mathfrak{L}}$ der *$\mathfrak{L}$-harmonischen* Funktionen:

Korollar. — *$\hat{\mathfrak{L}}$ ist die Menge aller auf* X *stetigen, affin-linearen Funktionen, d.h. die Menge der auf* X *stetigen, zugleich konkaven und konvexen Funktionen.*

Bemerkung. — Im allgemeinen ist $\hat{\mathfrak{L}} \neq \mathfrak{L}$; dies folgt aus einer Bemerkung von Choquet [21], p. 15.

4. 2. *Geometrische Extremalpunkte.* — Für jeden Punkt $x_0 \in \mathrm{X}$ und jede Menge $\mathrm{S} \in \mathfrak{S}(\mathfrak{L})$ wurde in Nr. 2. 5 die Menge $\mathcal{M}_{x_0}^{\mathrm{S}} = \mathcal{M}_{x_0}^{\mathrm{S}}(\mathfrak{L})$ von Maßen auf S definiert. Nach Bourbaki [14], p. 87 und Choquet [22], p. 236 ergibt sich im vorliegenden Spezialfall

folgende Interpretation: $\mathfrak{M}^{S}_{x_0}$ ist die Menge aller Maße $\mu \geqslant 0$ auf S mit der Gesamtmasse 1 und mit x_0 als *Schwerpunkt:*

$$(4.\ 2)\qquad \int d\mu = 1 \quad \text{und} \quad x_0 = \int x\, d\mu.$$

Umgekehrt existiert hier zu jedem Maß $\mu \geqslant 0$ auf S der Gesamtmasse 1 genau ein $x_0 \in X$ mit $\mu \in \mathfrak{M}^{S}_{x_0}$.

Nun soll gezeigt werden, daß die $\mathfrak{L}$-extremalen Punkte von X mit den Extremalpunkten von X identisch sind. Ein Punkt $x_0 \in X$ heißt bekanntlich ein Extremalpunkt oder, wie wir hier genauer sagen wollen, ein *geometrischer Extremalpunkt* von X, wenn die Menge $X \cap \complement \{x_0\}$ konvex ist.

Hilfssatz 7. — *Für jeden Punkt $x_0 \in X$ und jede Menge $S \in \mathfrak{S}(\mathfrak{L})$ sind folgende Aussagen gleichwertig:*

(*a*) *x_0 ist ein geometrischer Extremalpunkt von* X.

(*b*) $\mathfrak{M}^{S}_{x_0}(\mathfrak{L}) = \{\varepsilon_{x_0}\}$.

Beweis. $(a) \Longrightarrow (b)$: Es genügt offenbar den Fall $S = X$ zu behandeln, wenn man Satz 3 beachtet, wonach $\mathfrak{M}^{S}_{x_0}$ nicht leer ist. Dann aber hat man weiter nur zu zeigen, daß der Träger T_μ eines Maßes $\mu \in \mathfrak{M}_{x_0}$ keinen von x_0 verschiedenen Punkt enthalten kann. Wegen $\int d\mu = 1$ folgt hieraus nämlich $\mu = \varepsilon_{x_0}$; also ist $\mathfrak{M}_{x_0} = \{\varepsilon_{x_0}\}$. Angenommen für ein Maß $\mu \in \mathfrak{M}_{x_0}$ existiert ein Punkt $x_1 \neq x_0$ im Träger T_μ. Da $\mathfrak{L}$ die Punkte von X trennt, gibt es dann eine konvexe, kompakte Umgebung V von x_1 in X mit $x_0 \notin V$. Dann ist $c_1 = \mu(V) > 0$, da V Umgebung eines Punktes aus T_μ ist. Ferner ist $c_2 = 1 - \mu(V) > 0$, da V konvex und kompakt ist und aus $\mu(V) = 1$ somit $x_0 = \int x\, d\mu \in V$ folgen würde. Bezeichnet χ_A die charakteristische Funktion einer Menge $A \subset X$ bezüglich X, so sind $\mu_1 = c_1^{-1}\,(\chi_V \mu)$ und $\mu_2 = c_2^{-1}(1 - \chi_V)\mu$ positive Maße auf X der Gesamtmasse 1. Für die zugehörigen Schwerpunkte x_i^* aus X gilt:

$$x_0 = c_1 x_1^* + c_2 x_2^*, \quad c_1 > 0,\ c_2 > 0,\ c_1 + c_2 = 1.$$

Hieraus folgt $x_1^* = x_2^* = x_0$, da x_0 ein geometrischer Extremalpunkt ist. Dies aber kann nicht sein, da μ_1 von V getragen wird und somit x_1^* zu V gehört. Der Punkt x_0 liegt aber nicht

in V. Wir stoßen somit auf einen Widerspruch zu unserer Annahme: $T_\mu \cap \complement \{x\} \neq \emptyset$.

Non $(a) \Longrightarrow$ non (b): Ist x_0 kein geometrischer Extremalpunkt, so gibt es verschiedene Punkte $x_1, x_2, \in X$ und ein $\lambda \in R$ mit $x_0 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ und $0 < \lambda < 1$. Nach Satz 3 gibt es Maße $\mu_i \in \mathcal{M}^S_{x_i}$ $(i = 1, 2)$. Das Maß $\mu = \lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2$ liegt dann in $\mathcal{M}^S_{x_0}$ und ist ungleich ε_{x_0}. In der Tat: aus $\mu = \varepsilon_{x_0}$ folgt, daß $\{x_0\}$ der Träger von μ_1 und μ_2, also $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_{x_0}$ ist. Dies kann aber wegen $x_1 \neq x_2$ nicht sein.

Setzt man speziell $S = X$, so erhält man das angekündigte Resultat:

KOROLLAR. — *Die $\mathfrak{L}$-extremalen Punkte von X sind identisch mit den geometrischen Extremalpunkten von X.*

Folglich ist $\partial_{\mathfrak{L}} X$ die abgeschlossene Hülle $\overline{X_e}$ in X der Menge $X_e = X_e(\mathfrak{L})$ aller geometrischen Extremalpunkte von X. Dies ist ein bekanntes Resultat (vgl. MILMAN [33], ARENS-SINGER [1]).

3. 4. *Simplexe von Choquet.* — Nach den Resultaten der beiden letzten Nummern spezialisiert sich unser allgemeines Dirichletsches Problem hier auf die Aufgabe, notwendige und hinreichende Bedingungen dafür anzugeben, daß jede Funktion aus $\mathcal{C}(\overline{X_e})$ zu einer in X stetigen, affin-linearen Funktion fortgesetzt werden kann. Im folgenden kennzeichnen wir die konvexen kompakten Mengen X mit dieser Eigenschaft.

Hierzu erinnern wir zunächst an die von CHOQUET [21] gegebene Definition eines Simplex in einem Vektorraum F (über R): *Simplex* in F heißt jede konvexe Menge S in F mit der Eigenschaft, daß für je zwei positiv-homothetische Bilder $S_i = a_i + \lambda_i S$ $(a_i \in F,\ \lambda_i \in R,\ \lambda_i \geqslant 0)$ die folgende Alternative besteht: Entweder ist der Durchschnitt $S_1 \cap S_2$ die leere Menge oder selbst ein positiv-homothetisches Bild von S.

Die affine Natur dieser Begriffsbildung wird deutlich durch die folgende Behauptung, deren elementarer Beweis dem Leser überlassen werden kann. Im Vektorraum F sei V eine affin-lineare Mannigfaltigkeit und x_0 ein Punkt aus V; ferner sei S eine konvexe Teilmenge von V. Dann und nur dann ist S ein

Simplex in F, wenn der Durchschnitt je zweier Mengen $S_i = a_i + \lambda_i(S - x_0)$ mit $a_i \in V$ und $\lambda_i \geqslant 0 (i = 1, 2)$ entweder leer oder von der gleichen Gestalt $a + \lambda(S - x_0)$ mit $a \in V$ und $\lambda \geqslant 0$ ist.

Nunmehr behaupten wir:

Satz 13. — *Für jede konvexe, kompakte Teilmenge X eines lokal-konvexen Raumes E sind folgende Aussagen gleichwertig:*

(*a*) *Jede Funktion* $f \in \mathcal{C}(\overline{X_e})$ *ist* $\mathfrak{L}$*-resolutiv.*

(*b*) *Jeder Punkt aus X ist der Schwerpunkt genau eines Maßes aus* $\mathcal{M}(\overline{X_e})$ *mit Gesamtmasse* 1.

(*c*) *Die Menge* $\hat{\mathfrak{L}}$ *aller auf X stetigen, affin-linearen, reellen Funktionen ist ein Verband bezüglich der üblichen* $\leqslant$ *-Relation.*

(*d*) *Zu jeder auf X stetigen, konkaven, reellen Funktion existiert eine größte stetige, affin-lineare Minorante.*

(*e*) *X ist ein Simplex und* X_e *ist abgeschlossen in* X.

Beweis. Die Äquivalenz der Aussagen (*a*)-(*d*) folgt unmittelbar aus den allgemeinen Sätzen 9 und 10 sowie dem Korollar 1 zu Satz 10 bei Beachtung der Resultate von 4. 1. und 4. 2. Zu beweisen ist also noch die Äquivalenz von (*e*) mit z. B. (*b*).

(*e*) $\Longrightarrow$ (*b*): Dies folgt einerseits aus einem Eindeutigkeitssatz von Choquet [21], wonach sich jeder Punkt x eines kompakten Simplex X in E nur auf höchstens eine Weise als Schwerpunkt eines auf X_e konzentrierten Maßes $\nu \in \mathcal{M}(X)$ mit $\int d\nu = 1$ darstellen läßt. Da X_e in X abgeschlossen und somit gleich $\delta_{\mathfrak{L}} X$ ist, sichert andererseits Satz 3 die Existenz mindestens eines solchen Maßes ν.

(*b*) $\Longrightarrow$ (*e*): Wegen der bereits bewiesenen Äquivalenz von (*b*) und (*a*) besagt Satz 11, daß die Menge X_e abgeschlossen in X ist. Daß X ein Simplex ist, sieht man folgendermaßen ein: Es sei F der Vektorraum aller Radonschen Maße auf dem kompakten Raum X_e und V die affin-lineare Mannigfaltigkeit aller Maße $\mu \in F$ mit $\int d\mu = 1$. Jedem Maß $\mu \in V$ ordne man als Bild $\varphi(\mu)$ in E zu den Punkt $\varphi(\mu) = \int x\, d\mu^+ - \int x\, d\mu^- \in E$, wenn hierbei μ^+ bzw. μ^- den Positiv- bzw. Negativteil von μ

bezeichnet (11). Die so definierte Abbildung $\varphi : V \rightarrow E$ ist affin-linear; man hat hierbei nur zu beachten, daß

$$\varphi(\mu) = \int x\, d\mu_1 - \int x\, d\mu_2$$

ist für jedes Paar von Maßen $\mu_1 \geqslant 0$, $\mu_2 \geqslant 0$ auf X_e mit $\mu = \mu_1 - \mu_2$. Aus (*b*) folgt die Eineindeutigkeit von φ, wie man sofort nachrechnet. Daher ist φ ein affiner Isomorphismus von V auf die affin-lineare Mannigfaltigkeit $\varphi(V)$ in E. Es gilt offenbar $\varphi(Y) = X$, wenn Y die Menge aller positiven Maße aus V bezeichnet. Nun ist bekanntlich Y ein Simplex in F (vgl. Choquet [21], p. 14) (12). Aus der dem Satz vorangestellten Hilfsbehauptung und den festgestellten Eigenschaften von φ folgt dann, daß X ein Simplex in E ist.

Bemerkungen. — 1. Die Aussage « $(e) \Longrightarrow (a)$ » findet sich bereits bei Choquet [21].

2. Es wäre interessant zu wissen, ob ein beliebiges kompaktes Simplex in einem lokal-konvexen Raum durch zu (*a*)-(*d*) analoge Eigenschaften gekennzeichnet werden kann.

3. Aus den Sätzen 12 und 13 folgt, daß in einem kompakten, metrisierbaren Simplex X in E mit in X abgeschlossenem Choquetschen Rand X_e jeder geometrische Extremalpunkt auch $\hat{\mathfrak{L}}$-exponiert ist. Im Hinblick auf ein analoges Resultat von Bishop [9] über Funktionenalgebren wäre es interessant zu wissen, ob diese Eigenschaft jedes kompakte, metrisierbare Simplex besitzt. Eine beliebige konvexe, kompakte, metrisierbare Menge X in einem lokal-konvexen Raum E besitzt diese Eigenschaft im allgemeinen nicht, wie folgendes Gegenbeispiel zeigt: X = konvexe Hülle des Torus T^2 im R^3.

§ 5. — Ergänzungen zur allgemeinen Theorie.

5.1. *Einbettung von* X *in den Raum* $\mathcal{H}'$. — Wir kehren zurück zu der in den Paragraphen 2 und 3 betrachteten allgemeinen Situation. Gegeben sei also ein beliebiger kompakter

(11) Für ein Maß $\mu \geqslant 0$ auf X_e ist $\int x\, d\mu$ definitionsgemäß gleich 0, wenn $\mu = 0$ ist, und gleich αx_1, wenn $\alpha = \int d\mu > 0$ und $x_1 \in X$ der Schwerpunkt von $\alpha^{-1}\mu$ ist. Ist E ein Hausdorff-Raum, so ist dies der einzige Punkt $x_0 \in E$ mit $l(x_0) = \int l\, d\mu$ für jede stetige Linearform l auf E.

(12) Man hat nur zu beachten, daß F ein Rieszscher Raum und Y eine Basis des Kegels aller Elemente $\geqslant 0$ aus F ist.

Raum X und eine Menge $\mathcal{H}$ reeller Funktionen auf X mit den Eigenschaften (2.1.)-(2. 3). Wir versehen $\mathcal{H}$ mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf X und bezeichnen mit $E = \mathcal{H}'$ den mit der *schwachen Topologie* ausgestatteten topologischen *Dualraum* von $\mathcal{H}$. Die Menge $Y = Y_{\mathcal{H}}$ aller positiven Linearformen I auf $\mathcal{H}$ mit $I(1) = 1$ ist dann eine *konvexe, kompakte* Teilmenge von E (vgl. Bourbaki [13], chap. IV, § 5). Für jeden Punkt $x \in X$ ist $h \rightarrow h(x)$ ein Element I_x von Y; durch die Zuordnung $x \rightarrow I_x$ ist also eine kanonische Abbildung $\varphi : X \rightarrow Y$ definiert. Wir behaupten :

Hilfssatz 8. — *Die Abbildung* $\varphi : X \rightarrow Y$ *besitzt folgende Eigenschaften :*

(*a*) *Der Raum* X *wird durch* φ *homöomorph auf* $\varphi(X)$ *abgebildet.*

(*b*) *Die Menge* X_e *der* $\mathcal{H}$*-extremalen Punkte von* X *wird auf die Menge* Y_e *der geometrischen Extremalpunkte von* Y *abgebildet:* $Y_e = \varphi(X_e)$.

(*c*) *Ein positives Maß* μ *auf* $X^* = \partial_{\mathcal{H}} X$ *ist dann und nur dann ein zu einem Punkte* $x_0 \in X$ *gehöriges* $\mathcal{H}$*-harmonische Maß wenn das Bildmaß* $\varphi(\mu)$ *die Gesamtmasse* 1 *und* $\varphi(x_0)$ *zum Schwerpunkt hat.*

Beweis. *Zu* (*a*) : Da $\mathcal{H}$ die Punkte von X trennt, ist die Abbildung φ eineindeutig. Aus der Konvergenz eines Filters $\mathfrak{F}$ in X gegen einen Punkt $x_0 \in X$ folgt $\lim_{\mathfrak{F}} h(x) = h(x_0)$ also $\lim_{\mathfrak{F}} I_x(h) = I_{x_0}(h)$ für alle $h \in \mathcal{H}$. Also gilt $\lim_{\mathfrak{F}} \varphi(x) = \varphi(x_0)$ nach Definition der Topologie von E, was die Stetigkeit von φ beweist. Da X kompakt und E Hausdorffsch ist, so ist φ sogar eine Homöomorphie von X auf $\varphi(X)$.

Zu (*b*) : Für jedes $h \in \mathcal{H}$ ist $I \rightarrow I(h)$ eine stetige Linearform auf E; nach einem bekannten Satz (Bourbaki [13], p. 50, prop. 1) ist umgekehrt jede stetige Linearform von dieser Form. Hieraus folgt zunächst : $Y_e \subset \varphi(X)$. Die Existenz eines geometrischen Extremalpunktes $I_0 \in Y_e$, der nicht in $\varphi(X)$ liegt, führt nämlich wie folgt auf einen Widerspruch : Zunächst kann I_0 nicht in der abgeschlossenen konvexen Hülle Q von $\varphi(X)$ in E liegen. Sonst wäre nämlich I_0 ein geometrischer Extremalpunkt von Q, müßte also nach Bourbaki [12], p. 84, prop. 4 bereits in der kompakten Menge $\varphi(X)$ liegen. Folglich existiert nach einem bereits früher verwendeten Trennungssatz ([12],

p. 73, prop. 4) eine in E abgeschlossene Hyperebene, welche Q und $\{I_0\}$ streng trennt. Nach der einleitenden Bemerkung bedeutet dies die Existenz einer Funktion $h_0 \in \mathcal{H}$ mit $I(h_0) < I_0(h_0)$ für alle $I \in Q$, also speziell für alle $I \in \varphi(X)$. Somit gilt $h_0(x) < I_0(h_0)$ für alle $x \in X$. Setzen wir $\alpha = \sup_{x \in X} h_0(x)$, so ergibt sich: $\alpha < I_0(h_0)$. Andererseits folgt aber aus $h_0 \leqslant \alpha$ und $I_0 \in Y$ die Relation: $I_0(h_0) \leqslant I_0(\alpha) = \alpha$. Dies ist der angekündigte Widerspruch zu unserer Annahme. Damit ist gezeigt worden, daß Y_e in $\varphi(X)$ enthalten ist. — Hieraus folgt nun (b). In der Tat: Vermöge der Abbildung $\mu \to \varphi(\mu)$ entsprechen sich umkehrbar eindeutig die Maße $\mu \geqslant 0$ auf X der Gesamtmasse 1 und die Maße $\nu \geqslant 0$ auf $\varphi(X)$ der Gesamtmasse 1. Nach der einleitenden Bemerkung durchläuft $I \to I(h) = f(I)$ alle stetigen Linearformen f auf E, wenn h alle Funktionen aus $\mathcal{H}$ durchläuft. Somit gilt für jedes Maß $\mu \geqslant 0$ der Gesamtmasse 1 auf X:

$$\int f\, d\varphi(\mu) = \int f \circ \varphi\, d\mu = \int f(\varphi(x))\, d\mu(x) = \int f(I_x)\, d\mu(x)$$
$$= \int I_x(h)\, d\mu(x) = \int h\, d\mu.$$

Aus $\int h\, d\mu = h(x_0) = I_{x_0}(h) = \varphi(x_0)\,(h)$ für alle $h \in \mathcal{H}$ folgt daher $\int f\, d\varphi(\mu) = f(\varphi(x_0))$ für alle stetigen Linearformen f auf E und umgekehrt. Die Behauptung (b) ergibt sich daher jetzt aus Hilfssatz 7, wenn man dort $S = \varphi(X)$ setzt.

Zu (c)*:* Man beweist dies durch eine Überlegung, die zu derjenigen völlig analog ist, die wir soeben im zweiten Teil des Beweises von (b) durchgeführt haben. Man hat nur zu beachten, daß $\varphi(X^*)$ nach (a) und (b) gleich der abgeschlossenen Hülle von Y_e in Y ist.

Bemerkungen. — 1. Der in Hilfssatz 8 festgestellte Sachverhalt kann umgekehrt zu einem Beweis der Sätze 1 und 2 für $\mathcal{E} = \mathcal{H}$ verwendet werden. Vgl. hierzu Bishop-de Leeuw [8].

2. Aus der Behauptung (b) von Hilfssatz 8 und dem Satz von Krein-Milman folgt, daß Y gleich der abgeschlossenen konvexen Hülle Q von $\varphi(X)$ ist.

5. 2. *Ergänzungen zu* § 2 *und* § 3. — Nunmehr ergibt sich die Antwort auf eine bereits in Nr. 2. 1 angeschnittene Frage:

Satz 14. — *Ein Punkt $x_0 \in X$ ist genau dann $\mathcal{H}$-extremal, wenn ε_{x_0} das einzige zu x_0 gehörige $\mathcal{H}$-harmonische Maß ist.*

Beweis. Nach Hilfssatz 8 ist ε_{x_0} genau dann das einzige zu x_0 gehörige $\mathcal{H}$-harmonische Maß, wenn ε_{x_0} das einzige positive Maß auf $\varphi(X^*)$ der Gesamtmasse 1 mit $y_0 = \varphi(x_0)$ als Schwerpunkt ist. Da nach dem gleichen Hilfssatz $Y_e \subset \varphi(X^*)$ gilt, ist dies nach Hilfssatz 7 (mit $S = \varphi(X^*)$) gleichbedeutend mit der Aussage, daß $\varphi(x_0)$ ein geometrischer Extremalpunkt von Y ist. Abermals nach Hilfssatz 8 ist hiermit gleichwertig die Aussage, daß x_0 $\mathcal{H}$-extremal ist.

Ersetzt man in 5. 1 den Vektorraum $\mathcal{H}$ durch $\hat{\mathcal{H}}$, so gelangt man zum Raum $\hat{E} = \hat{\mathcal{H}}'$, zur konvexen kompakten Menge $\hat{Y} = Y_{\hat{\mathcal{H}}}$ in $\hat{E}$ und zur kanonischen Abbildung $\hat{\varphi}: X \to \hat{Y}$. Wir behaupten:

Satz 15. — *Dann und nur dann ist jede Funktion aus $\mathcal{C}(X^*)$ $\mathcal{H}$-resolutiv, wenn $\hat{Y}$ ein Simplex in $\hat{E}$ und die Menge $\hat{Y}_e$ seiner geometrischen Extremalpunkte abgeschlossen ist.*

Beweis. Es sei jede Funktion aus $\mathcal{C}(X^*)$ $\mathcal{H}$-resolutiv. Dann ist $\hat{\mathcal{H}}$ nach Satz 10 ein Rieszscher Raum, also (vgl. [14], p. 35) der konvexe Kegel $\hat{P}$ aller positiven Linearformen $I \in \hat{E}$ ein Verband bezüglich der durch $\hat{P}$ in $\hat{E}$ definierten Ordnungsrelation. Durch die Gleichung $I(1) = 1$ wird in $\hat{E}$ eine abgeschlossene Hyperebene definiert, welche jede Erzeugende von $\hat{P}$ in genau einem Punkt $\neq 0$ trifft. Der Durchschnitt von $\hat{P}$ mit dieser Hyperebene ist $\hat{Y}$. Somit ist $\hat{Y}$ eine Basis von $\hat{P}$, also $\hat{Y}$ ein Simplex in $\hat{E}$ nach Choquet [21]. Nach Satz 11 ist X_e in X, nach Hilfssatz 8 also $\hat{Y}_e = \hat{\varphi}(X_e)$ in $\hat{Y}$ abgeschlossen. (Bei der Anwendung von Hilfssatz 8 tritt $\hat{\mathcal{H}}$ an die Stelle von $\mathcal{H}$ und man hat (2. 18) zu beachten, wonach $X_e(\hat{\mathcal{H}}) = X_e(\mathcal{H})$ ist.)

Umgekehrt besitze $\hat{Y}$ die genannten Eigenschaften. Nach Satz 13 existiert dann zu jedem Punkt $y_0 \in \hat{Y}$ genau ein positives Maß auf $\hat{Y}_e$ der Gesamtmasse 1 mit y_0 als Schwerpunkt. Da mit $\hat{Y}_e$ auch $X_e = \hat{\varphi}^{-1}(\hat{Y}_e)$ abgeschlossen, also $X_e = X^*$ ist, folgt aus Hilfssatz 8, daß zu jedem Punkt $x_0 \in X$ nur genau

ein $\mathcal{H}$-harmonisches Maß gehört. Dann ist aber jede Funktion aus $\mathcal{C}(X^*)$ $\mathcal{H}$-resolutiv nach Satz 9.

Bemerkung. — Ein direkter Beweis von Satz 14, der also nicht die kanonische Einbettung $\varphi: X \to Y$ verwendet, wäre wünschenswert. Übrigens folgt aus Satz 14 leicht ein neuer Beweis von Satz 11.

5. 3. *Beziehungen zwischen* $\hat{Y}$ *und* Y. — Über die Beziehungen zwischen $\hat{E}$, $\hat{Y}$, $\hat{\varphi}$ einerseits und E, Y, φ andererseits behaupten wir abschließend:

HILFSSATZ 9. — *Die Abbildung* $\Phi: \hat{E} \to E$, *welche jeder Linearform aus* $\hat{E}$ *ihre Restriktion auf* $\mathcal{H}$ *zuordnet, besitzt folgende Eigenschaften:*

(*a*) Φ *ist eine stetige, lineare Abbildung von* $\hat{E}$ *auf* E.

(*b*) $\Phi(\hat{Y}) = Y$ *und* $\varphi = \Phi \circ \hat{\varphi}$.

(*c*) Φ *bildet* $\hat{\varphi}(X)$ *homöomorph auf* $\varphi(X)$ *ab.*

Beweis. *Zu* (*a*): Daß Φ linear und stetig ist, rechnet man sofort nach. Aus dem Satz von Hahn-Banach folgt, daß Φ eine Abbildung auf E ist.

Zu (*b*): Da die konstante Funktion 1 in $\mathcal{H}$ liegt und ein innerer Punkt des Kegels aller nicht-negativen Funktionen aus $\hat{\mathcal{H}}$ (bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz) ist, folgt die Gleichheit $\Phi(\hat{Y}) = Y$ aus dem Fortsetzungssatz von M. G. KREIN ([12], p. 75, prop. 6). Aus der Definition der Abbildungen φ, $\hat{\varphi}$, Φ folgt: $\varphi = \Phi \circ \hat{\varphi}$.

Zu (*c*): Nach Hilfssatz 8 ist φ eine homöomorphe Abbildung von X auf $\varphi(X)$ und $\hat{\varphi}$ eine homöomorphe Abbildung von X auf $\hat{\varphi}(X)$. Hieraus und aus $\varphi = \Phi \circ \hat{\varphi}$ folgt dann (*c*).

Bemerkung. — Im allgemeinen wird $\hat{Y}$ durch Φ nicht eineindeutig auf Y abgebildet. Dies zeigt das Beispiel 6. Wegen $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{C}(X)$ sind dort das Lebesguesche Maß λ auf $[0, 1]$ und das diskrete Maß $\mu = \frac{1}{6}\varepsilon_0 + \frac{4}{6}\varepsilon_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}\varepsilon_1$ zwei verschiedene Elemente aus $\hat{Y}$ mit $\Phi(\lambda) = \Phi(\mu)$.

§ 6. — Anwendung: Das klassische Dirichletsche Problem.

6. 1. *Reguläre Punkte.* — Wir betrachten im euklidischen Raum R^N von $N \geqslant 2$ Dimensionen eine *relativ kompakte, offene* Menge Ω; F sei der euklidische Rand von Ω im R^N. Der der allgemeinen Theorie zugrunde liegende kompakte Grundraum X sei jetzt speziell die abgeschlossene Hülle von Ω im R^N, also: $X = \overline{\Omega} = \Omega \cup F$. Der Funktionenraum $\mathcal{H}$ der allgemeinen Theorie sei jetzt die Menge aller Funktionen $h \in \mathcal{C}(X)$, deren Restriktion h_Ω auf Ω im üblichen Sinne harmonisch, also in Ω eine Lösung der *Laplaceschen Differentialgleichung* $\Delta h_\Omega = 0$ ist. Dann besitzt offenbar $\mathcal{H}$ die Eigenschaften (2. 1)-(2. 3); die allgemeine Theorie ist also anwendbar. Die Eigenschaft (2. 3) folgt aus der Bemerkung, daß die im R^N harmonischen Funktionen die Punkte des R^N trennen und eine in $\mathcal{H}$ gelegene Restriktion auf X besitzen.

Zunächst bestimmen wir den Raum $\hat{\mathcal{H}}$ aller $\mathcal{H}$-harmonischen Funktionen. Hierzu bezeichne $\mathcal{S}$ die Menge aller Funktionen $u \in \mathcal{C}(X)$, deren Restriktion auf Ω *superharmonisch* ist. Offenbar ist $\mathcal{S}$ in $\mathcal{C}(X)$ abgeschlossen und inf-stabil. Da ferner $\mathcal{H} = \mathcal{S} \cap (-\mathcal{S})$ ist, folgt aus dem Korollar 1 zu Satz 7:

$$\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H}. \tag{6. 1}$$

Also fällt hier $\hat{\mathcal{H}}$ mit $\mathcal{H}$ zusammen.

Zur Bestimmung aller $\mathcal{H}$-extremalen Punkte von X erinnern wir an die Definition der *verallgemeinerten Lösung* H_f des Dirichletschen Problems für Randfunktionen $f \in \mathcal{C}(F)$ [13]. Man betrachtet hierzu für jede stetige, reelle Funktion f auf F die Menge $\mathfrak{O}_f$ aller in Ω definierten superharmonischen Funktionen v mit der Eigenschaft:

$$\liminf_{x \to x_0,\, x \in \Omega} v(x) \geqslant f(x_0) \quad \text{für alle} \quad x_0 \in F. \tag{6. 2}$$

Man betrachtet ferner die Menge $\mathfrak{U}_f = -\mathfrak{O}_{-f}$ und zeigt, daß die untere Einhüllende von $\mathfrak{O}_f$ gleich der oberen Einhüllenden von $\mathfrak{U}_f$ ist. Die somit durch

$$H_f = \inf \mathfrak{O}_f = \sup \mathfrak{U}_f \tag{6. 3}$$

[13] Wegen der Einzelheiten sei auf Brelot [16] verwiesen.

für alle $f \in \mathcal{C}(\mathrm{F})$ in Ω definierte Funktion H_f ist harmonisch und heißt die verallgemeinerte Lösung des Dirichletschen Problems (nach Perron-Wiener).

Ein Punkt $x_0 \in \mathrm{F}$ wird *regulär* genannt, wenn gilt:

$$(6.4) \qquad \lim_{x \to x_0,\, x \in \Omega} \mathrm{H}_f(x) = f(x_0) \qquad \text{für alle} \qquad f \in \mathcal{C}(\mathrm{F}).$$

Besitzt für eine Funktion $f \in \mathcal{C}(\mathrm{F})$ das klassische Dirichletsche Problem eine Lösung u_f, ist also u_f eine in $\mathcal{H}$ gelegene Fortsetzung von f, so stimmt u_f auf Ω mit der verallgemeinerten Lösung H_f überein. Daher besitzt das klassische Dirichletsche Problem für jede Funktion $f \in \mathcal{C}(\mathrm{F})$ genau dann eine Lösung, wenn alle Punkte aus F regulär sind. In diesem Falle folgt aus einer Bemerkung in 3. 1 und Satz 11, daß die regulären Punkte mit den $\mathcal{H}$-extremalen Punkten zusammenfallen. Wir behaupten dies nun allgemein:

Satz 16. — *Die $\mathcal{H}$-extremalen Punkte von* $\mathrm{X} = \overline{\Omega}$ *fallen mit den regulären Punkten des euklidischen Randes* F *von* Ω *zusammen.*

Beweis. Wir bemerken zunächst, daß der Choquetsche Rand $\mathrm{X}_e = \mathrm{X}_e(\mathcal{H})$ in F enthalten ist. Dies folgt entweder aus dem Randmaximum-Prinzip der Potentialtheorie oder aus der Bemerkung, daß zu jedem Punkt $x_0 \in \Omega$ ein Maß $\mu \neq \varepsilon_{x_0}$ auf X existiert mit $\mu \in \mathcal{M}_{x_0}(\mathcal{H})$. Wegen der Mittelwerteigenschaft der harmonischen Funktionen genügt es für μ die auf einer in Ω enthaltenen Vollkugel mit Mittelpunkt x_0 « gleichmäßig verteilte Masse 1 » zu wählen.

Es sei nun x_0 ein $\mathcal{H}$-extremaler Punkt von X. Wegen $\mathrm{X}_e \subset \mathrm{F}$ gilt dann $\mathcal{M}^{\mathrm{F}}_{x_0}(\mathcal{H}) = \{\varepsilon_{x_0}\}$ nach 2. 2. Hieraus folgt nach Satz 3:

$$\underline{\mathrm{Q}}^{\mathrm{F}}_{x_0}(f) = \overline{\mathrm{Q}}^{\mathrm{F}}_{x_0}(f) \qquad \text{für jedes } f \in \mathcal{C}(\mathrm{F}).$$

Zu jeder Funktion $f \in \mathcal{C}(\mathrm{F})$ und jeder Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es daher Funktionen $h^1, h^2 \in \mathcal{H}$ mit folgenden Eigenschaften:

$$(6.5) \qquad h^1(x) \leqslant f(x) \leqslant h^2(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathrm{F};$$
$$(6.6) \qquad h^2(x_0) - h^1(x_0) \leqslant \varepsilon.$$

Für die Restriktionen h^i_Ω von h^i auf Ω ergibt sich nach (6. 5): $h^1_\Omega \in \mathfrak{U}_f$, $h^2_\Omega \in \mathfrak{O}_f$. Hieraus folgt nach (6. 3)

$$h^1_\Omega \leqslant \mathrm{H}_f \leqslant h^2_\Omega$$

und somit

$$(6.\ 7) \quad h^1(x_0) \leqslant \liminf_{x \to x_0,\ x \in \Omega} H_f(x) \leqslant \limsup_{x \to x_0,\ x \in \Omega} H_f(x) \leqslant h^2(x_0).$$

Nach (6. 5)-(6. 7) weichen also der obere und der untere Limes von $H_f(x)$ für $x \to x_0$ ($x \in \Omega$) von $f(x_0)$ um höchstens ε *ab*. Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, erhält man: $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0,\ x \in \Omega} H_f(x)$ für alle $f \in \mathcal{C}(F)$. Also ist der Punkt x_0 regulär.

Umgekehrt sei x_0 ein regulärer Randpunkt von Ω. Nach einem Lemma von Keldych [28] ist dann x_0 $\mathcal{H}$-exponiert, also x_0 auch $\mathcal{H}$-extremal nach 1. 3.

Aus den Sätzen 2 und 16 folgt nun, daß der Šilovsche Rand $X^* = \partial_{\mathcal{H}}X$ gleich der abgeschlossenen Hülle der Menge aller regulären Randpunkte von Ω ist. Im Anschluß an diese Bemerkung wäre es leicht möglich, X^* unter Heranziehung klassischer Resultate von Vasilesco [34] und Bouligand [10] mit Hilfe potentialtheoretischer Begriffsbildungen zu kennzeichnen. Wenn Ω speziell ein Gebiet ist, folgt z.B. aus den Resultaten der beiden zitierten Arbeiten, daß X^* die Menge aller Punkte $x \in F$ ist, in welchen F *lokal von positiver Kapazität* ist. In der Terminologie von [34] ist daher X^* mit dem *reduzierten Teil* von F identisch. Auf diese feineren Gesichtspunkte soll jedoch hier nicht eingegangen werden.

Bemerkungen. — 1. Für das am Schluß des Beweises von Satz 16 verwendete Lemma von Keldych hat Brelot [19] kürzlich einen einfachen Beweis gegeben. In der gleichen Arbeit wird das Lemma in geeigneter Form auch in Greenschen Räumen und allgemeiner im Rahmen der von Brelot [17], [18] entwickelten Axiomatik für das Dirichletsche Problem bewiesen. Diese Resultate und die Tatsache, daß der erste Teil des Beweises von Satz 16 nur einfache Schlüsse verwendet, gestatten es, Satz 16 auf allgemeineren Räumen zu beweisen. Wir kommen hierauf sowie auf die Beziehungen dieses Satzes zu Resultaten von Matsushita [31], [32] an anderer Stelle zurück.

2. Die Aussage, daß jeder $\mathcal{H}$-extremale Punkt regulär ist, bleibt richtig, wenn man die Laplacesche Differentialgleichung durch die Wärmeleitungsgleichung oder allgemeinere parabolische Differentialgleichungen ersetzt (vgl. hierzu Bauer [6]).

6. 2. *Minimal begrenztes* Ω. — Von besonderem Interesse ist der Fall, daß X^* mit dem euklidischen Rand F zusammenfällt. Dann liefern nämlich die Resultate von § 3 neuartige Kriterien für die uneingeschränkte Lösbarkeit des klassischen Dirichletschen Problems. Die Formulierung der Sätze in diesem Spezialfall kann dem Leser überlassen werden.

Notwendig und hinreichend für die Gleichheit $F = X^*$ ist nach Satz 16 die Bedingung, daß die regulären Punkte in F dicht liegen. Ein anderes Kriterium folgt aus den oben zitierten Resultaten von Bouligand-Vasilesco. Hier soll durch eine einfache Schlußweise gezeigt werden, daß F mit X^* sicher dann zusammenfällt, wenn Ω *minimal begrenzt* ist, d.h. wenn für das Innere $\mathring{X}$ von X gilt: $\mathring{X} = \Omega$.

Wir erinnern hierzu an die Definition des *Newtonschen Kerns* K auf $R^N \times R^N$:

$$K(x, y) = \begin{cases} \|x - y\|^{2-N}, & N \geqslant 3; \\ -\log \|x - y\|, & N = 2. \end{cases} \tag{6.8}$$

$\|...\|$ bezeichnet dabei die euklidische Norm.

Hilfssatz 10. — *Es sei* A *eine kompakte Teilmenge des* R^N *und* $(x_n)_{n=1,2,\ldots}$ *eine gegen einen Punkt* $x_0 \in \complement A$ *konvergente Folge von Punkten des* R^N. *Bezeichnet dann* f_i *die Restriktion auf* A *der Funktion* $x \rightarrow K(x, x_i)$ $(i = 0, 1, \ldots)$, *so konvergiert die Folge* $(f_n)_{n=1,2,\ldots}$ *auf* A *gleichmäßig gegen* f_0.

Beweis. Wir erbringen den Beweis nur für $N = 2$. Analoge Überlegungen führen für $N \geqslant 3$ zum Ziel. Da (x_n) gegen $x_0 \in \complement A$ konvergiert und $\complement A$ offen ist, kann o.B.d.A. angenommen werden, daß kein x_n zu A gehört. Die Menge B aller Punkte $x_0, x_1, \ldots$, ist dann kompakt und zu A fremd, also der Abstand δ von A und B positiv. Für jedes $x \in A$ und je zwei Zahlen $i, j = 0, 1, \ldots$ gilt:

$$f_i(x) - f_j(x) = \log \frac{\|x - x_j\|}{\|x - x_i\|} \leqslant \log \left(1 + \frac{\|x_i - x_j\|}{\|x - x_i\|}\right) \leqslant \log (1 + \delta^{-1}\|x_i - x_j\|).$$

Hieraus folgt: $|f_n(x) - f_0(x)| \leqslant \log (1 + \delta^{-1}\|x_n - x_0\|)$ für alle $x \in A$ und $n = 1, 2, \ldots$, also die gleichmäßige Konvergenz auf A von (f_n) gegen f_0.

Satz 17. — *Für den Šilovschen Rand* $X^* = \partial_{\mathscr{H}} X$ *gilt stets*:

$$F \cap \complement \dot{X} \subset X^*.$$

Beweis. Angenommen, es gibt einen Punkt

$$x_0 \in F \cap \complement \dot{X} \cap \complement X^*.$$

Wegen $x_0 \in \complement \dot{X}$ hat dann jede Umgebung von x_0 im R^N mit $\complement X$ einen Punkt gemeinsam. Also existiert eine gegen x_0 konvergente Folge von Punkten $x_n \in \complement X$. Wir bezeichnen mit h_i^* bzw. h_i die Restriktion auf X^* bzw. X der Funktion $x \to K(x, x_i)$ für $i = 0, 1, \ldots$. Wegen $x_n \notin X$ ist dann jede der Funktionen h_n ($n = 1, 2, \ldots$) ein Element von $\mathscr{H}$. Wegen $x_0 \notin X^*$ konvergiert die Folge (h_n^*) auf X^* gleichmäßig gegen h_0^* gemäß Hilfssatz 10. Da X^* der Šilovsche Rand $\partial_{\mathscr{H}} X$ ist, folgt hieraus die gleichmäßige Konvergenz von (h_n) gegen h_0 auf X. Somit liegt auch h_0 in $\mathscr{H}$. Dies kann aber nicht sein, da x_0 in F liegt und $h_0(x_0) = K(x_0, x_0) = +\infty$ ist. Unsere Annahme führt also zu einem Widerspruch; es gilt vielmehr $F \cap \complement \dot{X} \cap \complement X^* = \emptyset$ und damit die Behauptung.

Wie angekündigt folgt nun:

Korollar. — *Ist die Menge* Ω *minimal begrenzt, so gilt:* $X^* = F$.

Beweis. Es ist $\dot{X} = \Omega$ und somit

$$F \cap \complement \dot{X} = F \cap \complement \Omega = F \subset X^*.$$

Nach Satz 16 gilt außerdem: $X^* \subset F$.

§ 7. — Bemerkungen zum Dirichletschen Problem für diskrete harmonische Funktionen.

Im folgenden soll angedeutet werden, daß die in den ersten Paragraphen entwickelte Theorie selbst dann noch von Interesse ist, wenn der kompakte Raum X nur aus endlich vielen Punkten besteht.

Wir betrachten hierzu im $R^N (N \geqslant 1)$ eine endliche Menge X

von Punkten, deren sämtliche Koordinaten ganzzahlig sind *(Gitterpunkte)*. Dann ist X ein diskreter kompakter Raum. Für jeden Punkt $x \in X$ betrachten wir die Menge U_x seiner 2^N Nachbargitterpunkte y, welche von x den (euklidischen) Abstand 1 haben. Punkte $x \in X$ mit $U_x \subset X$ heißen dann *innere Punkte* von X; die Menge aller inneren Punkte von X soll mit X_i bezeichnet werden. Die Menge $X_r = X \cap \complement X_i$ heißt Menge der *Randpunkte* von X.

Jedem Punkt $x \in X_i$ ordnen wir das von U_x getragene Maß μ_x auf X zu, welches jeden Punkt von U_x mit der Masse 2^{-N} belegt. Dann sei $\mathcal{H}$ die Menge aller (stetigen) reellen Funktionen h auf X, welche auf X_i *diskret harmonisch* sind, d.h. welche der Bedingung genügen:

$$(7.\ 1) \qquad \int h\, d\mu_x = h(x) \quad \text{für jedes} \quad x \in X_i.$$

Dann besitzt $\mathcal{H}$ wieder die Eigenschaften (2. 1)-(2. 3). ($\mathcal{H}$ trennt die Punkte von X, da z.B. die Restriktion auf X jeder auf dem R^N affin-linearen Funktion in $\mathcal{H}$ liegt.)

Die Menge $\mathcal{E}$ aller auf X definierten, reellen Funktionen u, welche in X_i *diskret superharmonisch* sind, d.h. für jedes $x \in X_i$ der Ungleichung $\int u\, d\mu_x \leqslant u(x)$ genügen, ist eine in $\mathcal{C}(X)$ abgeschlossene inf-stabile Menge mit $\mathcal{H} = \mathcal{E} \cap (-\mathcal{E})$. Daher gilt $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H}$ nach dem Korollar 1 zu Satz 7.

Da für jeden inneren Punkt $x \in X_i$ offenbar $\mu_x \neq \varepsilon_x$ und nach (7. 1) ein Maß aus $\mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ ist, können $\mathcal{H}$-extremale Punkte von X nur Randpunkte sein: $X_e(\mathcal{H}) \subset X_r$. Der Satz 1 liefert also sofort das bekannte Resultat, wonach jede Funktion aus $\mathcal{H}$ eine in X_r gelegene Minimalstelle besitzt (vgl. Heilbronn [26], theorem 1).

Daß sogar $X_e = X_r = \partial_{\mathcal{H}} X$ gilt, folgt aus dem bekannten Satz ([26], theorem 2), wonach jede reelle Funktion f auf X_r zu einer Funktion aus $\mathcal{H}$ fortgesetzt werden kann. Dies kann übrigens auch sehr einfach und durchsichtig durch eine naheliegende Abwandlung der Methode von Perron-Wiener aus der Theorie des klassischen Dirichletschen Problems gezeigt werden (vgl. § 6). Man betrachte hierzu zu f die Menge $\mathfrak{D}_f$ aller reellen Funktionen φ auf X, welche auf X_r die Funktion f majorisieren und in X_i diskret superharmonisch sind. Entspre-

chend setzt man $\mathfrak{U}_f = -\mathfrak{O}_{-f}$. Dann prüft man ohne Mühe nach, daß $\sup \mathfrak{U}_f = \inf \mathfrak{O}_f$ die gesuchte Fortsetzung von f zu einer in X_t diskret harmonischen Funktion ist.

§ 8. — Bemerkungen über Funktionenalgebren.

8. 1. *Existenz des Šilovschen Randes.* — Im folgenden betrachten wir einen *kompakten* Raum X und eine *Unteralgebra* $\mathcal{A}$ der Algebra $\mathcal{C}(X, \mathbf{C})$ aller komplexwertigen stetigen Funktionen auf X. $\mathcal{A}$ *trenne die Punkte* von X und enthalte die *konstanten Funktionen* aus $\mathcal{C}(X, \mathbf{C})$ als Elemente.

Die Menge $\mathcal{H} = \mathfrak{R}(\mathcal{A})$ aller Realteile $\mathfrak{R}(f)$ von Funktionen $f \in \mathcal{A}$ besitzt dann die Eigenschaften (2. 1)-(2. 3). Für jeden Punkt $x \in X$ ist $\mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ die Menge aller Maße $\mu \geqslant 0$ auf X mit

$$(8.1) \qquad f(x) = \int f\, d\mu \qquad \text{für alle } f \in \mathcal{A}.$$

Wir setzen daher sinngemäß:

$$\mathcal{M}_x(\mathcal{A}) = \mathcal{M}_x(\mathcal{H}) \qquad \text{und} \qquad X_e(\mathcal{A}) = X_e(\mathcal{H}).$$

$X_e(\mathcal{A})$ soll auch der Choquetsche Rand von X bezüglich $\mathcal{A}$ genannt werden; die Punkte von $X_e(\mathcal{A})$ sollen $\mathcal{A}$-extremal heißen.

Es soll nun gezeigt werden, daß aus Satz 2 ein einfacher Beweis für die Existenz des Šilovschen Randes $\partial_{\mathcal{A}}X$ von X bezüglich $\mathcal{A}$ folgt, welcher zugleich wieder den Šilovschen Rand mit dem Choquetschen Rand verknüpft. $\partial_{\mathcal{A}}X$ ist bekanntlich die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X mit der Eigenschaft, daß der absolute Betrag $|f|$ einer jeden Funktion $f \in \mathcal{A}$ eine in $\partial_{\mathcal{A}} X$ gelegene Minimalstelle besitzt.

Satz 18. — *Für jedes $f \in \mathcal{A}$ besitzt die Funktion $|f|$ eine $\mathcal{A}$-extremale Maximalstelle. Der Šilovsche Rand $\partial_{\mathcal{A}}X$ existiert und ist gleich der abgeschlossenen Hülle des Choquetschen Randes $X_e(\mathcal{A})$.*

Beweis. Bezeichnet $\overline{\mathcal{A}}$ die abgeschlossene Hülle von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{C}(X, \mathbf{C})$ bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz, so ist $\overline{\mathcal{A}}$ wieder eine Unteralgebra von $\mathcal{C}(X, \mathbf{C})$ und aus (8. 1) folgt: $\mathcal{M}_x(\mathcal{A}) = \mathcal{M}_x(\overline{\mathcal{A}})$ für alle $x \in X$. Besitzt ferner jede

Funktion $|f|$ mit $f \in \mathcal{A}$ eine Maximalstelle in einer abgeschlossenen Menge $M \subset X$, so gilt dasselbe für jede Funktion $|f|$ mit $f \in \overline{\mathcal{A}}$. Daher kann für den Beweis $\mathcal{A}$ als in $\mathcal{C}(X, \mathbf{C})$ abgeschlossen vorausgesetzt werden.

Zunächst sei bemerkt, daß mit $\mathcal{A}$ auch die Menge $\mathcal{E}_0$ aller Funktionen $-|f|$ mit $f \in \mathcal{A}$ die Punkte von X trennt (vgl. auch [5]). Zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X$ gibt es nämlich ein $f \in \mathcal{A}$ mit $f(x) \neq f(y)$. Im Falle $|f(x)| \neq |f(y)|$ ist nichts zu zeigen. Ist jedoch $|f(x)| = |f(y)|$, so trennt $-|f + \alpha f^2|$ die beiden Punkte für $\alpha^{-1} = -f(x)$. Dann aber trennt auch die Menge $\mathcal{E}$ aller Funktionen $-\log|f|$ mit $f \in \mathcal{A}$ die Punkte von X; da $\mathcal{A}$ eine Algebra ist, enthält $\mathcal{E}$ mit je zwei Funktionen deren Summe. $\mathcal{E}$ besitzt somit die Eigenschaften (1. 4)-(1. 6). Nach Satz 2 existiert also $\partial_{\mathcal{E}}X$ und es ist $\partial_{\mathcal{E}}X = \overline{X_e(\mathcal{E})}$. Wegen der Isotonie von $\xi \to \log \xi$ auf der reellen Halbgeraden $\xi \geqslant 0$ existiert dann auch $\partial_{\mathcal{A}}X$ und es ist $\partial_{\mathcal{A}}X = \partial_{\mathcal{E}}X = \overline{X_e(\mathcal{E})}$.

Der Rest der Behauptung folgt so: Zunächst ist offenbar $\mathcal{M}_x(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}_x(\mathcal{E}_0)$ für jedes $x \in X$, wie durch Übergang zu den Absolutbeträgen in (8. 1) folgt; also ist $X_e(\mathcal{E}_0) \subset X_e(\mathcal{A})$. Nach Satz 1 besitzt dann jede Funktion $|f|$ mit $f \in \mathcal{A}$ eine $\mathcal{E}_0$-extremale, also auch $\mathcal{A}$-extremale Maximalstelle. Hieraus folgt weiter: $\partial_{\mathcal{A}}X \subset \overline{X_e(\mathcal{A})}$. Aus der Abgeschlossenheit von $\mathcal{A}$ folgt: $e^{-f} \in \mathcal{A}$ und somit $\mathcal{R}(f) = -\log|e^{-f}| \in \mathcal{E}$ für jedes $f \in \mathcal{A}$. Also ist $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}$, $\mathcal{M}_x(\mathcal{E}) \subset \mathcal{M}_x(\mathcal{H}) = \mathcal{M}_x(\mathcal{A})$ für alle $x \in X$ und somit: $X_e(\mathcal{A}) \subset X_e(\mathcal{E})$. Damit ist auch noch $\overline{X_e(\mathcal{A})} \subset \overline{X_e(\mathcal{E})} = \partial_{\mathcal{A}}X$ gezeigt.

Bemerkung. — Wenn $\mathcal{A}$ abgeschlossen und X metrisierbar ist, so existiert nach Bishop [9] zu jedem $\mathcal{A}$-extremalen Punkt x_0 sogar ein $f \in \mathcal{A}$ mit $|f(x)| < |f(x_0)|$ für alle $x \neq x_0$ aus X. Vgl. auch [8], p. 325.

8. 2. *Zwei Fragen.* — Die Unteralgebra $\mathcal{A}$ werde jetzt als abgeschlossen vorausgesetzt. Zu jedem Punkt $x \in X$ betrachten wir die Menge $\mathcal{M}_x^*$ aller zu x gehörigen $\mathcal{H}$-harmonischen Maße. Wegen $\mathcal{H} = \mathcal{R}(\mathcal{A})$ sind dies alle Maße $\mu \geqslant 0$ auf $X^* = \partial_{\mathcal{A}}X$ mit $f(x) = \int f_{X^*}\, d\mu$ für alle $f \in A$. In § 3 wurde gezeigt, daß zu jedem Punkt aus X dann und nur dann genau ein zugehöriges $\mathcal{H}$-harmonisches Maß existiert, wenn alle Funktionen

aus $\mathcal{C}(X^*)$ $\mathcal{H}$-resolutiv sind. Es wäre interessant zu wissen, welche Eigenschaften der Algebra $\mathcal{A}$ selbst hiermit gleichwertig sind. Vielleicht geben die schönen Resultate von Wermer [35], [36] einen Hinweis darauf, von welcher Natur diese gesuchten Eigenschaften sein könnten.

Im Anschluß an die in § 6 gewonnene Kennzeichnung der regulären Randpunkte einer offenen, relativ kompakten Teilmenge des $\mathbf{R}^N$ drängt sich weiter folgende Frage auf. Im Raum $\mathbf{C}^N$ von $N \geqslant 2$ komplexen Dimensionen sei Ω eine offene, relativ kompakte Menge. Man betrachte auf $X = \overline{\Omega}$ die Algebra $\mathcal{A}$ aller stetigen komplexwertigen Funktionen, welche in Ω holomorph sind. Welches ist dann der Choquetsche Rand $X_e(\mathcal{A})$? Wegen Satz 18 wäre mit dieser Frage auch die Frage nach dem Šilovschen Rand $\partial_{\mathcal{A}}X$ beantwortet, welche bereits durch Bremermann [20] Teilantworten gefunden hat.

LITERATUR

[1] R. Arens and I. M. Singer, Function values as boundary integrals, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 5, 1954, 735-745.

[2] G. Aumann, Über die Erweiterung von additiven monotonen Funktionen auf regulär geordneten Halbgruppen, *Arch. der Math.*, 8, 1957, 422-427.

[3] H. Bauer, Un problème de Dirichlet pour la frontière de Šilov d'un espace compact, *C. r. Acad. Sci. Paris*, 247, 1958, 843-846.

[4] H. Bauer, Frontière de Šilov et problème de Dirichlet, *Séminaire de Théorie du potentiel*, 3, 1958-1959, n° 7, 23 p. (Institut H. Poincaré, Paris).

[5] H. Bauer, Minimalstellen von Funktionen und Extremalpunkte II, *Arch. der Math.*, 11, 1960, 200-205.

[6] H. Bauer, Une axiomatique du problème de Dirichlet pour certaines équations aux dérivées partielles elliptiques et paraboliques, *C. r. Acad. Sci. Paris*, 250, 1960, 2672-2674.

[7] G. Birkhoff, Lattice theorie, *Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.*, 25, New York, 1948.

[8] E. Bishop and K. de Leeuw, The representations of linear functionals by measures on sets of extreme points, *Ann. Inst. Fourier*, 9, 1959, 305-331.

[9] E. Bishop, A minimal boundary for function algebras, *Pacific Journ. Math.*, 9, 1959, 629-642.

[10] G. Bouligand, Fonctions harmoniques. Principes de Picard et de Dirichlet, *Mém. Sci. Math.*, 11, Paris, 1926.

[11] N. Bourbaki, Algèbre, Chap. VI-VII, *Actual. sci. et industr.*, **1179**, Paris, 1952.

[12] N. Bourbaki, Espaces vectoriels topologiques, Chap. I-II, *Actual. sci. et industr.*, **1189**, Paris, 1953.

[13] N. Bourbaki, Espaces vectoriels topologiques, Chap. III-V, *Actual. sci. et industr.*, **1299**, Paris, 1955.

[14] N. Bourbaki, Intégration, Chap. I-IV, *Actual. sci. et industr.*, **1175**, Paris, 1952.

[15] N. Bourbaki, Intégration, Chap. V, *Actual. Sci. et industr.*, **1244**, Paris, 1956.

[16] M. Brelot, Familles de Perron et problème de Dirichlet, *Acta Szeged*, **9**, 1939, 133-153.

[17] M. Brelot, Une axiomatique générale du problème de Dirichlet dans les espaces localement compacts, *Séminaire de Théorie du potentiel*, **1**, 1956-1957, nº 6, 16 p. (Institut H. Poincaré, Paris).

[18] M. Brelot, Axiomatique des fonctions harmoniques et surharmoniques dans un espace localement compact, *Séminaire de Théorie du potentiel*, **2**, 1957-1958, nº 1, 40 p. (Institut H. Poincaré, Paris).

[19] M. Brelot, Sur un théorème de prolongement fonctionnel de Keldych concernant le problème de Dirichlet, *Journal d'Analyse Math.*, Jérusalem (erscheint demnächst).

[20] H. J. Bremermann, On a generalized Dirichlet problem for plurisubharmonic functions and pseudoconvex domains. Characterisation of Šilov boundaries, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **91**, 1959, 246-276.

[21] G. Choquet, Existence et unicité des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes, *Séminaire Bourbaki*, Déc. 1956, nº 139, 15 p. (Institut H. Poincaré, Paris).

[22] G. Choquet, Theory of capacities, *Ann. Inst. Fourier*, **5**, 1953, 131-295.

[23] G. Choquet et J. Deny, Ensembles semi-réticulés et ensembles réticulés de fonctions continues, *J. Math. pur. appl.*, **36** (9e série), 1957, 179-189.

[24] M. M. Day, Normed linear spaces, *Ergebnisse der Math.*, **21** (Neue Folge), Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958.

[25] I. Gelfand, D. Raikov and G. Šilov, Commutative normed rings, *Usp. Mat. Nauk SSSR*, N. S. **2**, 1946, 48-146.

[26] H. A. Heilbronn, On discrete harmonic functions, *Proc. Cambridge philos. Soc.*, **45**, 1949, 194-206.

[27] S. Kakutani, Concrete representation of abstract (M-)spaces, *Ann. of Math.*, **42**, 1941, 994-1024.

[28] M. V. Keldych, On the solubility and the stability of Dirichlet's problem (russisch), *Usp. Mat. Nauk SSSR*, **8**, 1941, 172-231.

[29] J. G. Kemeny and J. L. Snell, Semimartingales of Markov chains, *Ann. Math. Statistics*, **29**, 1958, 143-154.

[30] V. L. Klee jr., Extremal structure of convex sets II, *Math. Zeitschr.*, **69**, 1958, 90-104.

[31] S. Matsushita, Théorème de Krein-Milman et le balayage de mesures dans la théorie du potentiel I-III, *Proc. Japan. Acad.*, **31**, 1955, 643-647; **32**, 1956, 29-34; **32**, 1956, 125-130.

[32] S. Matsushita, On the foundation of balayage theory, *J. Inst. Polytech. Osaka City Univ.*, Ser. A, **9**, 1958, 59-86.

[33] D. P. Milman, Characteristics of extremal points of regularly compact sets (russisch), *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, N. S. **57**, 1947, 119-122.

[34] F. Vasilesco, Sur les singularités des fonctions harmoniques, *J. Math. pur. appl.*, **9** (9e série), 1930, 81-111.

[35] J. Wermer, On algebras of continuous functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4**, 1953, 866-869.

[36] J. Wermer, Subalgebras of the algebra of all complex-valued continuous functions on the circle, *Amer. J. Math.*, **78**, 1956, 225-242.

(Reçu le 22 juillet 1960.)

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
11 (1961), 137-178.

PROBLÈMES AUX LIMITES NON HOMOGÈNES (II)

par **J.L. Lions** (Nancy) **et E. Magenes** (Pavia).

INTRODUCTION

Cet article fait suite à l'article [16], mais nous avons divisé nos résultats de façon que ces deux articles puissent être lus indépendamment. D'autres articles suivront, conformément au programme indiqué dans l'introduction de [16].

Si $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = A$ désigne un opérateur elliptique d'ordre $2m$ dans un ouvert Ω de R^n (dans des articles ultérieurs de cette série, nous étudierons les problèmes analogues relatifs à des opérateurs non elliptiques) on appelle problème aux limites non homogène la recherche de u, situé dans un espace fonctionnel $\mathcal{F}$, vérifiant (*) $Au = f$, f donné dans un autre espace fonctionnel $\mathcal{G}$, avec les conditions aux limites (**) $B_j u = \varphi_j$, $j = 0, \ldots, m-1$, les B_j étant des opérateurs différentiels (convenables) sur la frontière Γ de Ω; les φ_j doivent être pris dans des espaces fonctionnels convenables, $\mathcal{T}_j$.

Voici grosso modo la méthode suivie :

1) Si l'on prend $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 = L^2(\Omega)$ (fonctions de carré sommable sur Ω) la méthode de prolongement des opérateurs non bornés (ou la méthode des projections) conduit naturellement à la résolution de problèmes du type (*), (**), avec $\varphi_j = 0$ (cas homogène), et u étant dans $\mathcal{F}_0$, dont les éléments vérifient en particulier la condition $D^p u \in L^2(\Omega)$ pour tout $|p| \leqslant m$. On passe ensuite au cas non homogène à l'aide de

théorèmes de trace. Puis l'on peut trouver d'autres classes $\{\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{T}\}$ à l'aide de théorèmes de régularité;

2) par transposition, on peut déduire de 1) de nouvelles classes $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1, \mathcal{T}_{1,j}\}$ où le problème (*), (**) est bien posé;

3) par utilisation de la théorie de l'interpolation, on en déduit des classes « intermédiaires » $\{\mathcal{F}_\theta, \mathcal{G}_\theta, \mathcal{T}_{\theta,j}\}$ où le problème (*), (**) est également bien posé.

Dans les étapes 1), 2) les espaces $\mathcal{T}_{0,}$ $\mathcal{T}_{j,1,j}$ font intervenir des dérivées fractionnaires; si donc, comme il est raisonnable, on veut considérer les problèmes (*), (**), avec des φ_j donnés dans des classes définies à l'aide des dérivations usuelles, il est utile (si l'on veut obtenir les meilleurs résultats possibles) de considérer l'étape 3), qui fournit (entre autres) des classes $\mathcal{T}_{\theta,j}$ définies par des propriétés portant sur les dérivées usuelles des φ_j (les classes $\mathcal{F}_\theta$ et $\mathcal{G}_\theta$ faisant alors intervenir des dérivations fractionnaires).

Ainsi, à tout résultat du type 1) correspond une théorie assez générale des problèmes non homogènes; on part ici des résultats de régularité dans les problèmes aux limites elliptiques faisant intervenir toutes les dérivées (alors que dans l'article (I) (cf. [16]) nous partions de résultats de régularité « partielle », par rapport à certaines variables privilégiées). L'étape 2) nécessite la mise au point de théorèmes de traces (N^os 2 à 5), les applications étant faites aux N^os 6 à 8; l'étape 3) occupe les N^os 9 à 11. Le N^o 12 considère d'autres problèmes aux limites et le N^o 13 donne une première application à des problèmes non elliptiques. [Cf. aussi [16 bis].]

L'article (III) de cette série paraîtra aux *Annali della Scuola Norm. Sup. di Pisa*.

TABLE DES MATIÈRES

I. — PRÉLIMINAIRES

On désigne par Ω un ouvert de R^n, de point générique $x = (x_1, \ldots, x_n)$. On supposera que Ω est borné, de frontière Γ une variété indéfiniment différentiable de dimension $n-1$ (il suffirait pour toute la suite que Γ soit « assez » différentiable), Ω étant d'un seul côté de Γ.

On utilisera les espaces suivants (pour détails on pourra consulter : [24] et [4], [11], [15], [16], [18]). L'espace des fonctions de carré sommable sur Ω (pour $dx = dx_1 \ldots dx_n$) étant désigné par $L^2(\Omega)$, on désigne par $H^m(\Omega)$, m entier > 0, l'espace des (classes de) fonctions $u \in L^2(\Omega)$ telles que $D^p u \in L^2(\Omega)$ pour $|p| \leqslant m$, les dérivées étant prises au sens des distributions sur l'ouvert Ω (cf. [21]). Muni de la norme

$$||u||_{H^m(\Omega)} = \Big(\sum_{|p| \leqslant m} ||D^p u||^2\Big)^{1/2}, \quad \text{où} \quad ||f|| = \Big(\int_\Omega |f(x)|^2\, dx\Big)^{1/2},$$

$H^m(\Omega)$ est *un espace de Hilbert.* Notons que $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

On désigne par $H_0^m(\Omega)$ l'adhérence dans $H^m(\Omega)$ du sous-espace $\mathfrak{D}(\Omega)$ des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω. On peut caractériser $H_0^m(\Omega)$ comme le sous-espace de $H^m(\Omega)$ formé des fonctions « nulles » sur Γ ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leqslant m-1$ [pour un énoncé précis, cf. Proposition 1. 2, (ii)].

A l'aide de systèmes de cartes locales, il n'y a pas de difficulté à définir de façon analogue les espaces $H^m(\Gamma)$ (cf. [19]); si par exemple Ω est l'ouvert $\{x_n > 0\}$, alors $\Gamma = \{x_n = 0\} \simeq R^{n-1}$ et $H^m(\Gamma) \simeq H^m(R^{n-1})$; on se ramène, dans le cas général, au cas précédent; lorsque Γ est bornée, il n'y a pas de difficulté. Comme Γ est « sans bord », l'espace $\mathfrak{D}(\Gamma)$ des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Γ est dense dans $H^m(\Gamma)$; donc $H_0^m(\Gamma) = H^m(\Gamma)$.

Toujours pour m entier > 0, on définit $H^{-m}(\Omega)$ [resp. $H^{-m}(\Gamma)$] comme le dual fort de $H_0^m(\Omega)$ [resp. de $H^m(\Gamma)$]; c'est un espace de distributions sur Ω (resp. Γ) (ces espaces ont été introduits dans [22]).

On a donc déjà défini $H^s(\Omega)$ et $H^s(\Gamma)$ pour s *entier* de signe quelconque. On aura besoin dans la suite de ces espaces pour s *réel* quelconque. On va en donner brièvement une définition utilisant l'interpolation des espaces de Hilbert [15 *bis*]. Si E et F sont deux espaces de Hilbert, $F \subset E$, F étant dense dans E, l'injection de F dans E étant continue, alors F est le domaine d'un opérateur auto-adjoint (non borné et non unique) strictement positif, soit B ($B = \Lambda^{1/2}$ dans les notations de [16]); on définit alors $F^{1-\theta}E^{\theta}$ comme le domaine de $B^{1-\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. Donc

$$F^{1-\theta}E^{\theta} = D(B^{1-\theta}),$$

avec le produit scalaire $(B^{1-\theta}u, B^{1-\theta}v)_E$, ce qui fait de $F^{1-\theta}E^{\theta}$ un espace de Hilbert; pour $\theta = 0$ (resp. 1) on retrouve F (resp. E). Ces espaces ont la propriété d'interpolation que voici : *soit* $\{F_1, E_1\}$ *un deuxième couple d'espaces de Hilbert ayant des propriétés analogues à celles du couple* $\{F, E\}$. *Soit* M *un opérateur linéaire continu de* E *dans* E_1 (soit μ_1 sa norme) *et également de* F *dans* F_1 (soit μ_0 sa norme); *alors* M *est un opérateur linéaire continu de* $F^{1-\theta}E^{\theta}$ *dans* $F_1^{1-\theta}E_1^{\theta}$ (sa norme μ_θ étant alors $\leqslant \mu_0^{1-\theta}\mu_1^{\theta}$), *pour chaque* $\theta \in]0, 1[$. Cf. [15 *bis*], et aussi [2], [7], [10]; d'autres espaces (et dans un certain sens « tous ») ayant la propriété précédente, ont été déterminés dans [6].

On pose maintenant la

Définition 1. 1. — Pour m entier > 0 (et Ω ouvert borné de frontière Γ indéfiniment différentiable de dimension $n - 1$) on pose

$$H^{(1-\theta)m}(\Omega) = (H^m(\Omega))^{1-\theta}(H^0(\Omega))^{\theta}, \tag{1. 1}$$

ce qui définit $H^s(\Omega)$ pour s réel $\geqslant 0$ [1].

Cette définition a besoin d'être justifiée pour (au moins) deux raisons : *a*) pour $(1 - \theta)m = q$ *entier* $\in [0, m]$, il faut que (1. 1) redonne l'espace $H^q(\Omega)$ introduit précédemment; *b*) si $\Omega = R^n$ on définit naturellement $H^s(R^n)$, pour tout s réel,

[1] Une autre définition équivalente a été donnée par Aronszajn [2], [2 *bis*].

comme l'espace des distributions u tempérées [21] dont la transformée de Fourier $\hat{u}$ vérifie

$$(1.2) \qquad (1 + |\xi|^2)^{s/2}\hat{u} \in L^2(R^n);$$

alors, dans le cas $\Omega = R^n$, (1. 1) doit redonner la définition précédente avec $s = (1 - \theta)m$.

La justification est fournie par la

Proposition 1. 1. — *L'ouvert Ω étant borné de frontière Γ indéfiniment différentiable,* $H^{(1-\theta)m}(\Omega)$ *coïncide avec l'espace des restrictions à Ω des éléments de* $H^{(1-\theta)m}(R^n)$ [défini par (1. 2) avec $s = (1 - \theta)m$].

Démonstration. — 1) Dans le cas $\Omega = R^n$ on vérifie la coïncidence de la définition (1. 1) avec (1. 2), $s = (1 - \theta)m$, en remontant à la définition de $F^{1-\theta}E^{\theta}$. (Cf. [16], Proposition 9. 1).

2) Soit r l'opérateur (restriction) qui à une distribution u sur R^n fait correspondre sa restriction ru à Ω. Alors r est un opérateur linéaire continu de $H^0(R^n)$ dans $H^0(\Omega)$ et de $H^m(R^n)$ dans $H^m(\Omega)$ donc d'après le théorème d'interpolation (avec $M = r$), d'après 1), et d'après la définition 1. 1, r est un opérateur linéaire continu de $H^{(1-\theta)m}(R^n)$ dans $H^{(1-\theta)m}(\Omega)$. Donc $H^{(1-\theta)m}(\Omega)$ est *toujours* (i.e. quel que soit Ω) contenu dans l'espace des restrictions à Ω des éléments de $H^{(1-\theta)m}(R^n)$.

3) Montrons maintenant l'inclusion inverse. Sous les hypothèses de la Proposition, il existe [3 *ter*] un opérateur linéaire P (prolongement) continu de $H^q(\Omega)$ dans $H^q(R^n)$, q entier $\in [0, m]$, tel que $Pu = u$ p.p. sur Ω pour $u \in H^q(\Omega)$. Appliquant le théorème d'interpolation à $M = P$, on voit que P est un opérateur linéaire continu de $H^{(1-\theta)m}(\Omega)$ dans $H^{(1-\theta)m}(R^n)$ d'où l'inclusion inverse.

Remarque 1. 1. — La démonstration précédente montre que la Proposition 1. 1 est vraie si Ω a la propriété de m-prolongement, *i. e.* : il existe un opérateur P ayant la propriété utilisée dans 3). Le résultat de la Proposition 1. 1 est inexact sans aucune hypothèse sur Ω : soit en effet Ω un ouvert de R^n, borné, tel que l'injection de $H^2(\Omega)$ dans $H^0(\Omega)$ soit compacte, l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $H^0(\Omega)$ n'étant pas compacte (de tels

ouverts existent; Gagliardo, non publié). Or, de façon générale si l'injection de F dans E est compacte, il en est de même de l'injection de $F^{1-\theta}E^{\theta}$ dans E, pour $\theta < 1$. Donc l'injection de $(H^2(\Omega))^{1/2}(H^0(\Omega))^{1/2}$ dans $H^0(\Omega)$ est compacte, de sorte que cet espace est *strictement* contenu dans $H^1(\Omega)$.

On a donc, sous les hypothèses de la Proposition 1. 1, défini $H^s(\Omega)$ pour s réel > 0. On définit ensuite $H_0^s(\Omega)$ comme l'adhérence dans $H^s(\Omega)$ de $\mathfrak{D}(\Omega)$, et enfin $H^{-s}(\Omega) = (H_0^s(\Omega))'$, dual fort de $H_0^s(\Omega)$.

On montre alors la propriété générale que voici :

$$(1.\ 3)\quad \begin{cases} (H^{\alpha}(\Omega))^{1-\theta}(H^{\beta}(\Omega))^{\theta} = H^{(1-\theta)\alpha+\theta\beta}(\Omega), \quad \text{pour } \alpha \text{ et } \beta \\ \quad \text{réels quelconques } (\geqslant 0 \text{ ou } < 0). \end{cases}$$

Même chose pour $H^s(\Gamma)$, s réel quelconque. Ceci permet d'énoncer le résultat suivant, fondamental pour la suite (ce résultat a été trouvé par un grand nombre d'auteurs [2]; c'est un cas particulier d'un résultat de [23], lui-même cas particulier de [13]). Avant d'énoncer le résultat, rappelons encore que $\mathfrak{D}(\overline{\Omega})$ (espace des fonctions indéfiniment différentiables dans $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$) est dense dans $H^m(\Omega)$. Alors

Proposition 1. 2. — *Soit m entier > 0. Pour $u \in \mathfrak{D}(\overline{\Omega})$, posons $\gamma_j u = \dfrac{\partial^j}{\partial n^j} u$* (dérivée normale sur Γ d'ordre j, n désignant le vecteur unitaire normal à Γ et dirigé vers l'intérieur), *et* $\gamma u = \{\gamma_0 u, \ldots, \gamma_{m-1} u\}$.

L'application $u \to \gamma u$ définie sur $\mathfrak{D}(\overline{\Omega})$ se prolonge par continuité en une application linéaire continue, encore notée $u \to \gamma u$, de $H^m(\Omega)$ dans $\prod_{j=0}^{j=m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma)$. En outre

(i) *l'application $u \to \gamma u$ est surjective;*

(ii) *le noyau de γ est $H_0^m(\Omega)$* [3].

[2] Cf. [2 *bis*], [3 *quarto*], [11], [19 *bis*].

[3] Par interpolation on en déduit que γ est une application linéaire continue de $H^s(\Omega)$ dans $\prod_{j=0}^{m-1} H^{s-j-1/2}(\Gamma)$, pour $s \geqslant m$. Cette démonstration est correcte si l'on démontre le théorème d'interpolation à l'aide des méthodes de fonctions de variable complexe; c'est illusoire si l'on utilise la démonstration de [15 *bis*] qui repose sur un théorème de traces plus général.

Introduisons maintenant les opérateurs différentiels que nous utiliserons dans la suite. Pour $u, v \in H^m(\Omega)$ on pose

$$(1.4) \qquad a(u, v) = \sum_{|p|, |q| \leq m} \int_\Omega a_{pq}(x) D^q u \overline{D^p v}\, dx,$$

où l'on suppose que a_{pq} est indéfiniment différentiable dans $\overline{\Omega}$ (là aussi on pourrait raffiner !). On définit ainsi une forme sesquilinéaire continue sur $H^m(\Omega)$. Comme dans [16] nous supposerons que

$$(1.5) \qquad |a(u, u)| \geqslant c\|u\|^2_{H^m(\Omega)}, \qquad c > 0, \qquad u \in H_0^m(\Omega) \text{ }(^4)$$

La forme $a(u, v)$ définit l'opérateur différentiel

$$(1.6) \qquad A = A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{|p|, |q| \leq m} (-1)^{|p|} D^p(a_{pq}(x)\, D^q).$$

La forme adjointe $a^*(u, v)$ est définie par

$$(1.7) \qquad a^*(u, v) = \overline{a(v, u)},$$

l'opérateur A^* correspondant étant

$$(1.8) \qquad A^* = A^*\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{|p|, |q| \leq m} (-1)^{|p|} D^p(\overline{a_{qp}} D^q).$$

Nous utiliserons *les formules de Green* que voici : de façon générale, on pose :

$$(f, g) = \int_\Omega f(x)\, \overline{g(x)}\, dx.$$

Alors, pour $u, v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$,

$$(1.9) \qquad (Au, v) = a(u, v) + \sum_{j=0}^{j=m-1} \int_\Gamma S_j u \overline{\gamma_j v}\, d\sigma,$$

$$(1.10) \qquad (A^*u, v) = a^*(u, v) + \sum_{j=0}^{j=m-1} \int_\Gamma T_j u \overline{\gamma_j v}\, d\sigma,$$

où les S_j et T_j sont des opérateurs différentiels d'ordre $2m - j - 1$, à coefficients indéfiniment différentiables (et $d\sigma$ désignant l'élément d'aire sur Γ). Plus précisément ([3], [20 *bis*]) :

$$(1.11) \qquad S_j = b_j \gamma_{2m-j-1} + \sum_{k=1}^{k=2m-j} S_j^k \gamma_{2m-j-k},$$

(4) Pour d'autres hypothèses, cf. plus bas, la Remarque 10. 5.

où b_j et $1/b_j$ sont dans $\mathcal{D}(\Gamma)$, les S_j^k étant des opérateurs tangentiels à Γ [15], d'ordre $\leqslant k-1$.

Même résultat pour T_j (5).

On peut maintenant énoncer le (cf. aussi [20 bis]) :

Lemme 1. 1. — *Soit* $\varphi=\{\varphi_0, \ldots, \varphi_{m-1}\}$, *avec* $\varphi_j \in H^{j+1/2}(\Gamma)$, *et* $\psi=\{\psi_0, \ldots, \psi_{m-1}\}$, *avec* $\psi_j \in H^{2m-j-1/2}(\Gamma)$. *Il existe alors* $w = w(\varphi, \psi) \in H^{2m}(R^n)$, *tel que*

$$\gamma_j w = \psi_j, \quad j=0, \ldots, m-1, \tag{1. 12}$$

$$S_j w = \varphi_j, \quad j=0, \ldots, m-1, \tag{1. 13}$$

l'application $\{\varphi, \psi\} \to w$ *étant continue de*

$$\prod_{j=0}^{m-1} H^{j+1/2}(\Gamma) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{2m-j-1/2}(\Gamma) \quad \text{dans} \quad H^{2m}(R^n).$$

Résultat analogue en remplaçant S_j *par* T_j.

Démonstration. — 1) Supposons que w vérifie (1. 12), et prenons (1. 13) avec $j=m-1$; utilisant (1. 11), cette équation s'écrit

$$b_{m-1}\gamma_m w = \varphi_{m-1} - \sum_{k\geqslant 2} S_{m-1}^k \gamma_{m+1-k} w;$$

comme $\gamma_{m+1-k} w = \psi_{m+1-k} \in H^{m-1+k-1/2}(\Gamma)$, et comme S_{m-1}^k est tangentiel, d'ordre $\leqslant k-1$, $S_{m-1}^k \gamma_{m+1-k} w \in H^{m-1/2}(\Gamma)$, donc l'équation (1. 13), pour $j=m-1$, équivant à

$$\gamma_m w = \psi_m, \ \psi_m \text{ donné dans } H^{m-1/2}(\Gamma)$$

(car $1/b_{m-1}$ est dans $\mathcal{D}(\Gamma)$). On vérifie alors facilement par récurrence que (1. 12) (1. 13) équivaut à (1. 12) et

$$\gamma_{m+j} w = \psi_{m+j} \in H^{2m-(m+j)-1/2}(\Gamma), j=0, \ldots, m-1. \tag{1. 14}$$

2) Posant $2m=\mu$, on est donc ramené à la construction de w dans $H^{\mu}(R^n)$ avec

$$\gamma_j w = f_j \in H^{\mu-j-1/2}(\Gamma), j=0, 1, \ldots, \mu-1, \tag{1. 15}$$

w dépendant continûment de f_j (la parité de μ n'intervient

(5) On montre que (1. 5) entraîne l'ellipticité de $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ dans $\overline{\Omega}$ (et même la forte ellipticité de $\exp(i\theta)\, A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ pour θ convenable) de sorte que les systèmes $\{\gamma, S_j\}$ et $\{\gamma, T_j\}$ sont normaux et des systèmes de Dirichlet, au sens de [3].

pas dans ce qui suit !). On utilise la Proposition 1. 2 : $w \to \gamma w$ est un isomorphisme de $H^{\mu}(\Omega)/H_0^{\mu}(\Omega)$ sur $\prod_{j=0}^{\mu-1} H^{\mu-j-1/2}(\Gamma)$; mais

$$H^{\mu}(\Omega) = H_0^{\mu}(\Omega) \oplus \mathcal{Z}^{\mu}(\Omega),$$

avec

$$u \in \mathcal{Z}^{\mu}(\Omega) \text{ si et seulement si } \sum_{|p| \leq \mu} (-1)^{|p|} D^{2p} u = 0.$$

Soit donc

$$(1.16) \qquad u = \gamma^{-1}(f), \qquad f = \{f_0, \ldots, f_{\mu-1}\} ;$$

si P est un opérateur linéaire continu de $H^{\mu}(\Omega)$ dans $H^{\mu}(R^n)$ tel que $Pu = u$ p.p. sur Ω (cf. Proposition 1. 1,3)), on peut prendre $w = Pu$; les équations (1. 15) sont alors vérifiées.

Remarque 1. 2. — On peut opérer un peu différemment dans le choix (1. 16) de u. Dans le cas où $\Omega = \{x_n > 0\}$, la démonstration de la Proposition 1. 2 fournit explicitement un élément u de $H^{\mu}(\Omega)$ dépendant linéairement et continûment de f, avec $\gamma u = f$. Par des cartes locales, on en déduit une construction de u, différente de (1. 16). Cette remarque est utile au N° 3.

2. OPÉRATEUR γ SUR $\mathcal{H}_A^0(\Omega)$.

Définition 2. 1. — On désigne par $\mathcal{H}_A^0(\mathcal{H})$ (resp. $D_A^0(\Omega)$, resp. $Z_A^0(\Omega)$) l'espace des éléments u de $H^0(\Omega)$ tels que

$$Au \in H^{-m}(\Omega) \quad (\text{resp. } Au \in H^0(\Omega), \quad \text{resp. } Au = 0).$$

Pour $u, v \in \mathcal{H}_A^0(\Omega)$, on pose

$$(u, v)_{\mathcal{H}_A^0(\Omega)} = (u, v) + (Au, Av)_{H^{-m}(\Omega)};$$

pour $u, v \in D_A^0(\Omega)$, on pose

$$(u, v)_{D_A^0(\Omega)} = (u, v) + (Au, Av);$$

munis de ces produits scalaires les espaces $\mathcal{H}_A^0(\Omega)$ et $D_A^0(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert.

Notons que $Z_A^0(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $H^0(\Omega)$.

Lemme 2. 1. — *Sous l'hypothèse* (1. 5) *l'espace* $\mathcal{H}_A^0(\Omega)$ *est somme directe topologique de et* $H_0^m(\Omega)$ *et de* $Z_A^0(\Omega)$:

$$(2.1) \qquad \mathcal{H}_A^0(\Omega) = H_0^m(\Omega) \otimes Z_A^0(\Omega).$$

Démonstration. — En effet sous l'hypothèse (1. 5), A est un isomorphisme de $H_0^m(\Omega)$ sur $H^{-m}(\Omega)$ (cf. [22]). Pour u donné dans $\mathcal{H}_A^0(\Omega)$ soit alors u_0 la solution dans $H_0^m(\Omega)$ de $Au_0 = Au$; la décomposition $u = u_0 + (u - u_0)$ fournit le résultat.

LEMME 2. 2. — *L'espace $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $\mathcal{H}_A^0(\Omega)$.*

Démonstration. — En vertu du Lemme 2. 1, et $\mathcal{D}(\Omega)$ étant dense dans $H_0^m(\Omega)$, il suffit de montrer que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $Z_A^0(\Omega)$. Or d'après [9], $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $D_A^0(\Omega)$ d'où le résultat [6].

On va maintenant démontrer le

THÉORÈME 2. 1. — *On suppose que Ω est un ouvert borné de frontière Γ indéfiniment différentiable, d'un même coté de Γ. On suppose que* (1. 5) *a lieu. Dans ces conditions, l'application $u \rightarrow \gamma u = \{\gamma_0 u, \ldots, \gamma_{m-1} u\}$, définie dans $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$, se prolonge par continuité en une application linéaire continue, encore notée $u \rightarrow \gamma u$, de $\mathcal{H}_A^0(\Omega)$ dans $\prod_{j=0}^{j=m-1} H^{-j-1/2}(\Gamma)$.*

Démonstration. — 1) Soit $\varphi = \{\varphi_0, \ldots, \varphi_{m-1}\}$ donné dans $\prod_{j=0}^{m-1} H^{j+1/2}(\Gamma)$. Considérons (cf. Lemme 1. 1) $v(\varphi)$, élément de $H^{2m}(R^n)$, avec

$$\text{(2. 2)} \quad \gamma_j v(\varphi) = 0, \qquad T_j v(\varphi) = \varphi_j, \quad j = 0, \ldots, m-1,$$

$v(\varphi)$ dépendant continûment de φ.

[6] Dans le cas actuel la démonstration du résultat de [9] est spécialement simple. Considérons A comme opérateur non borné dans $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$, de domaine $D_A^0(\Omega)$ et soit A_S la fermeture de $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ défini sur $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$. Il faut montrer que $A_S = A$; comme évidemment $A_S \subset A$, il suffit de montrer l'inclusion inverse, *i.e.* en passant aux adjoints : $A_S^* \subset A^*$. Soit donc u dans le domaine de A_S^*; si $A_S^* u = f$, on a $(u, A\varphi) = (f, \varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, d'où (*) $\mathcal{A}^* \tilde{u} = \tilde{f}$ (cf. page 148 pour $\mathcal{A}$ et pour $\tilde{f}$ et $\tilde{u}$); on peut toujours s'arranger pour que $\mathcal{A}^*$ soit elliptique au voisinage de $\overline{\Omega}$, donc (*) entraîne que $\tilde{u} \in H^{2m}(R^n)$, et comme $\tilde{u}$ est à support dans $\overline{\Omega}$, $u \in H_0^{2m}(\Omega)$ (appliquer la Proposition 1. 2). Comme on voit facilement que $H_0^{2m}(\Omega)$ est contenu dans le domaine de A^* (en fait c'est exactement ce domaine), on obtient l'inclusion désirée.

Soit par ailleurs $\mathcal{A} = \mathcal{A}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ défini par

$$(2.\ 3) \qquad \mathcal{A} = \sum_{|p|, |q| \leqslant m} (-1)^{|p|} D^p(\mathcal{A}_{pq}(x) D^q),$$

où les fonctions $\mathcal{A}_{pq}$ sont indéfiniment différentiables dans R^n, bornées ainsi que chacune de leurs dérivées, avec $\mathcal{A}_{pq} = a_{pq}$ sur Ω. On dit que $\mathcal{A}$ est un prolongement indéfiniment différentiable de A. Soit de même $\mathcal{A}^*$ un prolongement indéfiniment différentiable de A^*. Les opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^*$ ne sont plus nécessairement elliptiques dans tout l'espace, et $\mathcal{A}^*$ n'est pas nécessairement l'adjoint formel de $\mathcal{A}$.

Encore deux notations : si f est dans $H^0(\Omega)$, $\tilde{f}$ désigne le prolongement de f à R^n par 0 hors de Ω; si T est une distribution dans R^n, T_Ω désigne sa restriction à Ω.

Tout ceci posé, et u étant donné dans $\mathcal{H}^0_A(\Omega)$, définissons X^v_φ par

$$(2.\ 4) \qquad X^v_\varphi = \langle \mathcal{A}\tilde{u}, \overline{v(\varphi)} \rangle - \langle Au, \overline{v(\varphi)_\Omega} \rangle;$$

l'expression (2. 4) a un sens, d'après les remarques suivantes :

1) Comme $\tilde{u}$ est dans $H^0(R^n)$, et grâce aux hypothèses faites sur les $\mathcal{A}_{pq}$, $\mathcal{A}$ étant un opérateur linéaire continu de $H^\alpha(R^n)$ dans $H^{\alpha-2m}(R^n)$ le premier crochet dans (2. 4) désigne la dualité entre $H^{-2m}(R^n)$ et $H^{2m}(R^n)$;

2) comme $\gamma_j v(\varphi) = 0$ pour $j = 0, \ldots, m-1$, et d'après la Proposition 1. 2, (*ii*), $v(\varphi)_\Omega$ est dans $H^m_0(\Omega)$, de sorte que le deuxième crochet dans (2. 4) désigne la dualité entre $H^{-m}(\Omega)$ et $H^m_0(\Omega)$.

Naturellement $v(\varphi)$ n'est pas unique dans $H^{2m}(R^n)$ à vérifier (2. 2); mais X^v_φ est indépendant du choix de $v(\varphi)$; soit en effet v et v_1 deux choix, vérifiant tous deux les relations (2. 2); alors $(v - v_1)_\Omega$ est dans $H^{2m}_0(\Omega)$, de sorte que

$$\langle Au, \overline{(v - v_1)_\Omega} \rangle = \langle u, \overline{A^*(v - v_1)_\Omega} \rangle$$
$$= \langle u, \overline{\mathcal{A}^*(v - v_1)} \rangle = \langle \mathcal{A}u, \overline{v - v_1} \rangle,$$

donc $X^v_\varphi = X^{v_1}_\varphi$, d'où notre assertion. On écrira : $X^v_\varphi = X_\varphi$.

Comme on a choisi $v(\varphi)$ dépendant continûment de φ, on vérifie facilement que la forme semi-linéaire $\varphi \to X_\varphi$ est continue sur $\prod_{j=0}^{j=m-1} H^{j+1/2}(\Gamma)$, donc de la forme

$$(2.\ 5) \qquad X_\varphi = \sum_{j=0}^{j=m-1} \langle \sigma_j u, \overline{\varphi_j} \rangle, \qquad \sigma_j u \in H^{-j-1/2}(\Gamma),$$

les applications $u \to \sigma_j u$ étant continues de $\mathcal{H}^0_A(\Omega)$ dans $H^{-j-1/2}(\Gamma)$.

2) Pour achever la démonstration du Théorème il reste seulement (compte tenu du Lemme 2. 2) à vérifier que, pour u dans $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$, $\sigma_j u = \gamma_j u$.

Prenons φ_j dans $\mathcal{D}(\Gamma)$. On peut alors choisir $v(\varphi)$ dans $\mathcal{D}(R^n)$; posant $v(\varphi)_\Omega = v$, il vient

$$X_\varphi = (u, A^*v) - (Au, v),$$

où comme d'ordinaire, (f, g) désigne le produit scalaire dans $H^0(\Omega)$. Utilisant les formules de Green (1. 9) et (1. 10), on obtient, puisque $\gamma_j v = 0$, $j = 0, \ldots, m-1$;

$$X_\varphi = \sum_j \langle \gamma_j u, \overline{\varphi}_j \rangle,$$

donc $\langle \gamma_j u, \overline{\varphi}_j \rangle = \langle \sigma_j u, \overline{\varphi}_j \rangle$ pour tout φ_j dans $\mathcal{D}(\Gamma)$, donc $\sigma_j u = \gamma_j u$ ce qui achève la démonstration du théorème.

3. — L'OPÉRATEUR $\tilde{\gamma}_\rho$ SUR $\mathcal{H}^0_A(\Omega)$.

On introduit une famille Γ_ρ de variétés de dimension $n-1$, contenues dans Ω, $0 \leqslant \rho \leqslant \rho_0 < 1$, ces variétés tendant vers Γ lorsque $\rho \to 0$. De façon précise nous ferons l'hypothèse suivante [7] :

(3. 1) Il existe une famille finie d'ouverts $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_\nu$, dans R^n, tels que $\Gamma_\rho, \Gamma \subset \bigcup \mathcal{O}_i$; pour chaque $\mathcal{O}_i$ on suppose qu'il existe un isomorphisme g_i de $\overline{\mathcal{O}}_i$ sur

$$\overline{Q} = [-1, +1]^n,$$

($\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ est le point générique de $\overline{Q}$), tel que

$$g_i(\Gamma \cap \mathcal{O}_i) = \overline{Q} \cap \{\xi_n = 0\},$$
$$g_i(\Gamma_\rho \cap \mathcal{O}_i) = \overline{Q} \cap \{\xi_n = \rho\};$$

on suppose que les composantes de g_i et g_i^{-1} sont $2m$ fois continûment différentiables dans $\overline{\mathcal{O}}_i$ et $\overline{Q}$. On fait l'hypothèse habituelle de compatibilité : g_i et g_j coïncident sur $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j$.

[7] On suppose dans ce n° que Γ est seulement $2m$ fois continûment différentiable.

On posera $g_i(x) = \{g_{i1}(x), \ldots, g_{in}(x)\}$.

A l'aide du système $\{\mathcal{O}_i, g_i\}$ on définit un isomorphisme θ_ρ de Γ_ρ sur Γ par

(3. 2) $\theta_\rho x = g_i^{-1}(g_{i1}(x), \ldots, g_{i\,n-1}(x), 0)$ pour $x \in \Gamma_\rho \cap \mathcal{O}_i$

(donc $g_{in}(x) = \rho$).

Grâce à (3. 1), on a

(3. 3) $\left\{\begin{array}{l}\theta_\rho \text{ et } \theta_\rho^{-1} \text{ sont } 2m \text{ fois continûment différentiables} \\ \text{de } \Gamma_\rho \text{ sur } \Gamma \text{ (et } \Gamma \text{ sur } \Gamma_\rho\text{), leurs dérivées d'ordre} \\ \leqslant 2m \text{ étant bornées par des constantes indépen-} \\ \text{dantes de } \rho.\end{array}\right.$

Soit Ω_ρ l'ouvert contenu dans Ω de frontières Γ_ρ ([8]). Pour u dans $\mathcal{H}^0_A(\Omega)$, on sait (Friedrichs; cf. [18]) que u est localement dans H^m, donc

$$u \in H^m(\Omega_\rho);$$

on peut par conséquent définir

$$\gamma_{j,\rho} u = \frac{\partial^j}{\partial n_\rho^j} u, \qquad (n_\rho \text{ normale intérieure à } \Gamma_\rho)$$

élément de $H^{m-j-1/2}(\Gamma_\rho)$ en vertu de la Proposition 1. 2 ([9]).

Désignons par $\mathfrak{D}^{2m}(\Gamma_\rho)$ l'espace des fonctions $2m$ fois continûment différentiables sur Γ_ρ. On a le

LEMME 3. 1. — *Pour φ dans $\mathfrak{D}^{2m}(\Gamma_\rho)$ on définit $\theta_\rho^*\varphi$ par*

(3. 4) $$\theta_\rho^*\varphi(x) = \varphi(\theta_\rho^{-1}(x));$$

alors $\theta_\rho^*\varphi$ est dans $\mathfrak{D}^{2m}(\Gamma)$ et l'application $\varphi \to \theta_\rho^*\varphi$ se prolonge par continuité en une application linéaire continue $u \to \theta_\rho^* u$ de $H^\alpha(\Gamma_\rho)$ dans $H^\alpha(\Gamma)$, pour $0 \leqslant \alpha \leqslant 2m$; θ_ρ^* est un isomorphisme, dont l'inverse est le prolongement de $(\theta_\rho^*)^{-1}$ défini par

(3. 5) $$(\theta_\rho^*)^{-1}\psi(x) = \psi(\theta_\rho x).$$

En outre, ($\mathcal{L}(E; F)$ désignant l'espace des applications linéaires continues de E dans F) :

(3. 6) $$\|\theta_\rho^*\|_{\mathcal{L}(H^\alpha(\Gamma_\rho);\, H^\alpha(\Gamma))} \leqslant c_1,$$
(3. 7) $$\|(\theta_\rho^*)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^\alpha(\Gamma);\, H^\alpha(\Gamma_\rho))} \leqslant c_2,$$

les c_i étant des constantes indépendantes de ρ.

([8]) Tout ceci vaut lorsque Γ est composé de plusieurs variétés distinctes.
([9]) Qui est valable si Γ est seulement m fois continûment différentiable.

Démonstration. — 1) Il suffit de montrer le résultat pour $\alpha = 0$ et $\alpha = 2m$, le cas $0 < \alpha < 2m$ s'en déduisant ensuite par interpolation.

2) Pour $\alpha = 2m$, on note, en utilisant des cartes locales et (3. 3), que

$$\|\theta_\rho^* \varphi\|_{H^{2m}(\Gamma)} \leqslant c_1 \|\varphi\|_{H^{2m}(\Gamma_\rho)}, \qquad \text{pour} \qquad \varphi \in \mathcal{D}^{2m}(\Gamma_\rho),$$

c_1 étant indépendante de ρ. L'inégalité analogue étant valable pour $(\theta_\rho^*)^{-1}$, et ces inégalités étant immédiates dans le cas $\alpha = 0$, on en déduit le Lemme.

Grâce au Lemme précédent, on peut introduire, pour $u \in \mathcal{H}_A^0(\Omega)$,

$$\tilde{\gamma}_{j,\rho} u = \theta_\rho^* \gamma_{j,\rho} u; \tag{3. 8}$$

posons

$$\tilde{\gamma}_\rho u = \{\tilde{\gamma}_{0,\rho} u, \tilde{\gamma}_{1,\rho} u, \ldots, \tilde{\gamma}_{m-1,\rho} u\}; \tag{3. 9}$$

alors

$$\tilde{\gamma}_\rho \in \mathcal{L}\left(\mathcal{H}_A^0(\Omega); \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma)\right). \tag{3. 10}$$

On va maintenant démontrer le

THÉORÈME 3. 1. — *L'hypothèse* (3. 1) *ayant lieu ainsi que* (1. 5), *quel que soit u dans* $\mathcal{H}_A^0(\Omega)$, $\tilde{\gamma}_\rho u \to \gamma u$ *dans* $\prod_{j=0}^{m-1} H^{-j-1/2}(\Gamma)$ *lorsque* $\rho \to 0$.

Démonstration. — 1) On va d'abord démontrer que $\tilde{\gamma}_\rho$ demeure dans un ensemble borné de l'espace $\mathcal{L}\left(\mathcal{H}_A^0(\Omega); \prod_{j=0}^{m-1} H^{-j-1/2}(\Gamma)\right)$, lorsque $0 \leqslant \rho \leqslant \rho_0$. Posant

$$a_\rho(u, v) = \sum_{p,q} \int_{\Omega_\rho} a_{pq}(x) D^q u D^p \bar{v} \, dx,$$

on a

$$\int_{\Omega_\rho} A u \bar{v} \, dx = a_\rho(u, v) + \sum_{j=0}^{j=m-1} \int_{\Gamma_\rho} S_{j,\rho} u \gamma_{j\rho} \bar{v} \, d\sigma, \tag{3. 11}$$

les fonctions u et v étant, par exemple, $2m$ fois continûment différentiables dans $\overline{\Omega}_\rho$, les $S_{j,\rho}$ ayant des propriétés analogues aux S_j introduits au N° 1. On introduit de même $T_{j,\rho}$.

Notons maintenant ceci : soit

$$\varphi = \{\varphi_0, \ldots, \varphi_{m-1}\} \in \prod_{j=0}^{m-1} H^{j+1/2}(\Gamma_\rho);$$

on peut choisir $v_\rho(\varphi) \in H^{2m}(R^n)$ avec

(3. 12) $\gamma_{j,\rho} v_\rho(\varphi) = 0, \quad T_{j,\rho} v_\rho(\varphi) = \varphi_j, \quad j = 0, \ldots, m-1,$

de façon que

(3. 13) $$\|v_\rho(\varphi)\|_{H^{2m}(R^n)} \leqslant c_3 |||\varphi|||_\rho,$$

où

$$|||\varphi|||_\rho = \Big(\sum_j \|\varphi_j\|^2_{H^{j+1/2}(\Gamma_\rho)}\Big)^{1/2}.$$

En effet, d'après la démonstration du Lemme 1. 1, on se ramène à construire $w_\rho \in H^\mu(R^n)$ avec $\gamma_j w_\rho = f_j$, $j = 0, \ldots, \mu - 1$, pour f_j donnée dans $H^{\mu-j-1/2}(\Gamma_\rho)$, la norme de l'application $\{f_j\} \to w_\rho$ étant bornée par une constante indépendante de ρ. Pour cela on utilise la Remarque 1.2; à l'aide de cartes locales (qui dépendent de ρ, mais où les dérivées qui interviennent sont majorées par des constantes indépendantes de ρ), on se ramène au cas du demi-espace et le résultat suit.

Ceci étant posé, on peut écrire d'après (2. 5) (et en posant $u_{\Omega_\rho} = u_\rho$) :

(3. 14) $$\langle \mathcal{A}\tilde{u}_\rho, \overline{v_\rho(\varphi)}\rangle - \langle A u_\rho, \overline{v(\varphi)_{\Omega_\rho}}\rangle = \sum_{j=0}^{j=m-1} \langle \gamma_{j,\rho} u, \bar{\varphi}_j\rangle;$$

le premier crochet dans (3. 14) désigne la dualité entre $H^{-2m}(R^n)$ et $H^{2m}(R^n)$; comme $\tilde{u}_\rho$ demeure dans un ensemble borné de $H^0(R^n)$ $\mathcal{A}\tilde{u}_\rho$ demeure dans un ensemble borné de $H^{-2m}(R^n)$; d'après (3. 13) ce premier crochet est donc majoré par $c_4 |||\varphi|||_\rho$, c_4 indépendante de ρ; le deuxième crochet dans (3. 14) désigne la dualité entre $H^{-m}(\Omega_\rho)$ (et la norme Au_ρ dans $H^{-m}(\Omega_\rho)$ est bornée par une constante indépendante de ρ, puisque $Au \in H^{-m}(\Omega)$) et $H_0^m(\Omega_\rho)$; d'après (3. 13), ce deuxième crochet est majoré par $c_5 |||\varphi|||_\rho$, c_5 étant une constante indépendante de ρ. On déduit donc de (3. 14) que

(3. 15) $$\sum_j \|\gamma_{j,\rho} u\|^2_{H^{-j-1/2}(\Gamma_\rho)} \leqslant c_6, \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant \rho \leqslant \rho_0.$$

Mais $\tilde{\gamma}_{j,\rho} = \theta_\rho^* \gamma_{j,\rho}$,

d'où notre assertion en vertu de (3. 6).

2) Le Théorème est alors conséquence de 1) et de la remarque suivante (jointe à la densité de $\mathfrak{D}(\overline{\Omega})$ dans $\mathcal{H}_A^0(\Omega)$) :

(3. 16) $\left\{\begin{array}{l}\text{si } u \in \mathfrak{D}(\overline{\Omega}),\ \tilde{\gamma}_{j,\rho} u \to \gamma_j u \text{ dans l'espace des fonctions} \\ 2m \text{ fois continûment différentiables dans } \Gamma \\ \text{(pour la topologie de la convergence uniforme} \\ \text{des fonctions et de chacune de leurs dérivées).}\end{array}\right.$

4. — OPÉRATEUR S SUR $D_A^0(\Omega)$.

Pour $u \in \mathfrak{D}(\overline{\Omega})$, on pose

(4. 1) $$Su = \{S_0 u, S_1 u, \ldots, S_{m-1} u\},$$

où les S_j sont définis comme dans (1. 8).

THÉORÈME 4. 1. — *Sous les hypothèses du théorème* 2. 1, *l'application* $u \to Su$ *définie dans* $\mathfrak{D}(\overline{\Omega})$ *se prolonge par continuité en une application linéaire continue, encore notée* $u \to Su$, *de* $D_A^0(\Omega)$ *dans* $\prod_{j=0}^{m-1} H^{-(2m-j-1/2)}(\Gamma)$.

Démonstration. — Le principe de la démonstration est analogue à celui de la démonstration du théorème 2. 1. Soit $\psi = \{\psi_0, \ldots, \psi_{m-1}\}$, avec $\psi_j \in H^{2m-j-1/2}(\Gamma)$. Considérons (cf. Lemme 1. 1) $\varpi(\psi) \in H^{2m}(R^n)$ avec

(4. 2) $$\gamma_j \varpi(\psi) = \psi_j, \qquad T_j \varpi(\psi) = 0, \qquad j = 0, \ldots, m-1,$$

et $\varpi(\psi)$ dépendant continûment de ψ.

Pour u dans $D_A^0(\Omega)$ on pose

(4. 3) $$Y_\psi^\varpi = \langle \mathcal{A}\tilde{u}, \overline{\varpi(\psi)} \rangle - \langle Au, \overline{\varpi(\psi)_\Omega} \rangle,$$

le premier crochet désignant la dualité entre $H^{-2m}(R^n)$ et $H^{2m}(R^n)$, et le deuxième le produit scalaire dans $H^0(\Omega)$.

Vérifions maintenant que Y_ψ^ϖ est indépendant du choix de $\varpi(\psi) = \varpi$ avec (4. 2) ; soient en effet ϖ et ϖ_1 deux éléments de

$H^{2m}(R^n)$ vérifiant (4. 2); alors $(w - w_1)_\Omega$ est dans $H_0^{2m}(\Omega)$, donc

$$\langle \mathcal{A}\tilde{u}, \overline{w - w_1}\rangle = \langle \tilde{u}, (\mathcal{A})^*(w - w_1)\rangle = \langle u, \overline{A^*(w - w_1)_\Omega}\rangle$$
$$= \langle Au, \overline{(w - w_1)_\Omega}\rangle\ ^{(10)},$$

d'où $Y_\psi^w = Y_\psi^{w_1}$, et notre assertion. On écrit désormais $Y_\psi^w = Y_\psi$.

La forme semi-linéaire $\psi \to Y_\psi$ est continue sur

$$\prod_{j=0}^{m-1} H^{2m-j-1/2}(\Gamma)$$

donc

$$Y_\psi = \sum_{j=0}^{m-1} \langle \tau_j u, \overline{\psi_j}\rangle, \qquad \tau_j u \in H^{-(2m-j-1/2)}(\Gamma),$$

l'application $u \to \tau_j u$ étant continue de $D_A^0(\Omega)$ dans $H^{-(2m-j-1/2)}(\Gamma)$.

Comme $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $D_A^0(\Omega)$, il reste seulement à démontrer que, pour u dans $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$, $\tau_j u = S_j u$, ce qui se voit par utilisation des formules de Green.

Remarque 4. 1. — . — On reprend ici, en la précisant, une remarque de [15].

Désignons par $D_A^m(\Omega)$ l'espace des $u \in H^m(\Omega)$, tels que $Au \in H^0(\Omega)$. Muni du produit scalaire

$$(u, v)_{D_A^m(\Omega)} = (u, v)_{H^m(\Omega)} + (Au, Av),$$

c'est un espace de Hilbert.

Pour $\varphi = \{\varphi_0, \dots, \varphi_{m-1}\} \in \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma)$, soit $v(\varphi) \in H^m(\Omega)$, avec $\gamma_j v(\varphi) = \varphi_j$, $j = 0, \dots, m-1$, et $v(\varphi)$ dépendant continûment de φ. Pour u donné dans $D_A^m(\Omega)$, posons

$$Z_\varphi^v = (Au, v(\varphi)) - a(u, v(\varphi));$$

on vérifie que Z_φ^v est indépendant du choix de $v(\varphi) = v$ (car si v et v_1 sont deux choix possibles alors $v - v_1 \in H_0^m(\Omega)$).

On écrira $Z_\varphi^v = Z_\varphi$. On note que la forme $\varphi \to Z_\varphi$ est continue sur $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma)$, donc

$$(Au, v(\varphi)) - a(u, v(\varphi)) = \sum_{j=0}^{m-1} \langle \nu_j u, \overline{\varphi_j}\rangle, \quad \nu_j u \in H^{-m+j+1/2}(\Gamma).$$

(10) $(\mathcal{A})^*$, adjoint de $\mathcal{A}$, ne coïncide pas nécessairement avec $\mathcal{A}^*$; on peut aussi choisir $\mathcal{A}^* = (\mathcal{A})^*$.

Pour u dans $\mathfrak{D}(\overline{\Omega})$, on vérifie que $\nu_j u = S_j u$. Sous réserve de la vérification du

LEMME 4. 1. — *Sous les hypothèses du théorème* 2. 1, *l'espace* $\mathfrak{D}(\overline{\Omega})$ *est dense dans* $D_A^m(\Omega)$,
on a alors le

THÉORÈME 4. 2. — *Sous les hypothèses du théorème* 2. 1, *l'application* $u \to Su$ *définie dans* $\mathfrak{D}(\overline{\Omega})$ *se prolonge par continuité en une application linéaire continue* (*encore notée* $u \to Su$) *de* $D_A^m(\Omega)$ *dans* $\prod_{j=0}^{m-1} H^{-(m-j-1/2)}(\Gamma)$.

Démonstration du Lemme 4. 1. — Soit u dans $D_A^m(\Omega)$; comme A est un isomorphisme de $H_0^m(\Omega)$ sur $H^{-m}(\Omega)$, il existe w unique dans $H_0^m(\Omega)$ avec $Aw = Au$; alors w est dans $D_A^m(\Omega)$ et $\|w\|_{D_A^m(\Omega)} \leqslant c_1 \|Au\|_{H^0(\Omega)}$; soit $v = u - w$; on a : $\gamma v = \gamma u$, $Av = 0$ et comme $v \to \{Av, \gamma v\}$ est un isomorphisme de $H^m(\Omega)$ sur

$H^{-m}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma)$, on a $\|v\|_{H^m(\Omega)} \leqslant c_2 \sum_{j=0}^{m-1} \|\gamma_j u\|_{H^{m-j-1/2}(\Gamma)}$.

Considérons alors $\varphi_n \in \mathfrak{D}(\Omega)$, $\psi_{n,j} \in \mathfrak{D}(\Gamma)$, avec $\varphi_n \to Au$ dans $H^0(\Omega)$ et $\psi_{n,j} \to \gamma_j u$ dans $H^{m-j-1/2}(\Gamma)$. Soit w_n (resp. v_n) solution de $Aw_n = \varphi_n$ avec $w_n \in H_0^m(\Omega)$ (resp. $Av_n = 0$, $\gamma_j v_n = \psi_{j,n}$). D'après les majorations précédentes, $w_n \to w$ et $v_n \to v$ dans $D_A^m(\Omega)$ donc $v_n + w_n \to v$ dans $D_A^m(\Omega)$. Mais d'après la régularité de la solution du problème de Dirichlet [18 *bis*], w_n et v_n sont dans $\mathfrak{D}(\overline{\Omega})$, d'où le lemme.

COROLLAIRE 4. 1. — *Sous les hypothèses du théorème* 4. 2, *si u est dans* $D_A^m(\Omega)$ *et v dans* $H^m(\Omega)$, *on a :*

$$(Au, v) - a(u, v) = \sum_{j=0}^{m-1} \langle S_j u, \overline{\gamma_j v} \rangle,$$
$$S_j u \in H^{-(m-j-1/2)}(\Gamma), \qquad \gamma_j v \in H^{m-j-1/2}(\Gamma).$$

Remarque 4. 2. — De (1. 9) et (1. 10) on déduit, pour u, v dans $\mathfrak{D}(\overline{\Omega})$:

$$(4.4) \quad (u, A^* v) - (Au, v) = \sum_{j=0}^{m-1} \langle \gamma_j u, \overline{T_j v} \rangle - \sum_{j=0}^{m-1} \langle S_j u, \overline{\gamma_j v} \rangle.$$

Cette formule est valable, entre autres, dans les conditions suivantes :

Théorème 4. 3. — *Hypothèses du théorème* 2. 1. *Si l'une des hypothèses suivantes a lieu :*

(i) $u \in \mathcal{H}^0_A(\Omega)$, $\quad v \in H^{2m}(\Omega) \cap H^m_0(\Omega)$;

(ii) $u \in D^0_A(\Omega)$, $\quad v \in H^{2m}(\Omega)$;

alors (4. 4) *est vraie. Dans le cas* (*i*) *la formule s'écrit :*

$$(4.5) \qquad (u, A^*v) - \langle Au, \bar{v}\rangle = \sum_{j=0}^{m-1} \langle \gamma_j u, \overline{T_j v}\rangle.$$

Démonstration. — Il suffit de vérifier que les diverses expressions écrites ont un sens. Le résultat suit par prolongement par continuité. Dans le cas (*i*), $\langle Au, \bar{v}\rangle$ désigne la dualité entre $H^{-m}(\Omega)$ et $H^m_0(\Omega)$. Puis $\gamma_j u$ est dans $H^{-j-1/2}(\Gamma)$ (Théorème 2. 1) et $T_j v \in H^{j+1/2}(\Gamma)$ de sorte que $\langle \gamma_j u, \overline{T_j v}\rangle$ a un sens.

Dans le cas (*ii*), $\langle \gamma_j u, \overline{T_j v}\rangle$ a la même signification, et $S_j u \in H^{-(2m-j-1/2)}(\Gamma)$ (Théorème 4. 1) et $\gamma_j v \in H^{2m-j-1/2}(\Gamma)$, de sorte que $\langle S_j u, \overline{\gamma_j v}\rangle$ a un sens, d'où le théorème.

5. — OPÉRATEUR $\tilde{S}_\rho$ SUR $D^0_A(\Omega)$.

On se place dans le cadre du n° 3.

Soit u donné dans $D^0_A(\Omega)$; alors d'après le théorème de régularité locale de Friedrichs, u est dans $H^{2m}(\Omega_\rho)$, $\rho > 0$. Par conséquent, (et avec les notations du n° 3) :

$$(5.1) \qquad S_{j,\rho} u_\rho \in H^{j+1/2}(F).$$

On introduit ensuite

$$(5.2) \qquad \tilde{S}_{j,\rho} u = \theta^*_\rho S_{j,\rho} u_\rho;$$

on définit ainsi un opérateur linéaire continu de $D^0_A(\Omega)$ dans $H^{j+1/2}(\Gamma)$. Si l'on pose

$$(5.3) \qquad \tilde{S}_\rho = \{S_{0,\rho}, S_{1,\rho}, \ldots, S_{m-1,\rho}\},$$

alors

$$\tilde{S}_\rho \in \mathcal{L}\left(D^0_A(\Omega) ; \prod_{j=0}^{m-1} H^{j+1/2}(\Gamma)\right). \tag{5. 4}$$

THÉORÈME 5. 1. — *Hypothèses du théorème* 3. 1. *Alors, pour u dans* $D^0_A(\Omega)$, $\tilde{S}_\rho u \to Su$ *dans* $\prod_{j=0}^{m-1} H^{-(2m-j-1/2)}(\Gamma)$ *lorsque* $\rho \to 0$.

La démonstration, parallèle à celle du théorème 3. 1, n'est pas détaillée ici.

6. — RAPPELS SUR LES PROBLÈMES DE VISIK-SOBOLEV

Pour ce n° on pourra également consulter [26], [14], [11], [18].

De façon générale soit V un sous-espace vectoriel fermé de $H^m(\Omega)$ avec

$$H^m_0(\Omega) \subset V \subset H^m(\Omega). \tag{6. 1}$$

On supposera que

$$|a(v, v)| \geqslant c\|v\|^2_{H^m(\Omega)}, \quad c > 0, \qquad \text{pour tout} \quad v \in V. \tag{6. 2}$$

On désigne par N(V) (resp. N*(V)) l'espace des $u \in V$ tels que $Au \in H^0(\Omega)$, (resp. $A^*u \in H^0(\Omega)$), avec

$$(Au, v) = a(u, v) \qquad \text{pour tout} \quad v \in V. \tag{6. 3}$$

(resp.

$$(A^*u, v) = a^*(u, v) \qquad \text{pour tout} \quad v \in V). \tag{6. 4}$$

Muni du produit scalaire

$$(u, v)_{N(V)} = (u, v)_{H^m(\Omega)} + (Au, Av)$$

(resp. $(u, v)_{N^*(V)} = (u, v)_{H^m(\Omega)} + (A^*u, A^*v)$), c'est un espace de Hilbert.

Sous l'hypothèse (6. 2), A (resp. A*) est un isomorphisme de N(V) (resp. N*(V)) sur $H^0(\Omega)$ (cf. par ex. [11], [18]).

Par transposition on en déduit ceci :
sous l'hypothèse (6. 2), *si* $v \to L(v)$ *est une forme semi linéaire*

continue sur $N^*(V)$, *il existe un élément* u *de* $H^0(\Omega)$ *et un seul tel que*

$$(u, A^*v) = L(v) \text{ pour tout } v \in N^*(V), \tag{6. 5}$$

l'application $L \to u$ *étant continue, au sens suivant:*

$$\|u\|_{H^0(\Omega)} \leqslant c_1 |||L|||, \qquad \text{où} \qquad |||L||| = \sup.\ |L(v)|/\|v\|_{N^*(V)}\ \text{[11]}.$$

7. — APPLICATION AU PROBLÈME DE DIRICHLET

On va appliquer les remarques du n° 6 avec $V = H_0^m(\Omega)$, et sous les hypothèses du théorème 2.1. Alors

$$N(V) = N^*(V) = H_0^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega).$$

En effet d'après [18 *bis*], on sait que dans ces conditions

$$N^*(V) \subset H^{2m}(\Omega) \qquad (\text{et également } N(V) \subset H^{2m}(\Omega))$$

inclusion algébrique et topologique.

Soit alors f donné dans $H^{-m}(\Omega)$ et g_j dans $H^{-j-1/2}(\Gamma)$, pour $j = 0, \ldots, m-1$. Pour $v \in N^*(V)$, posons

$$L(v) = \langle f, \bar{v} \rangle + \sum_{j=0}^{j=m-1} \langle g_j, \overline{T_j v} \rangle; \tag{7. 1}$$

ceci a un sens : le premier crochet désigne la dualité entre $H^{-m}(\Omega)$ et $H_0^m(\Omega)$ (car $V = H_0^m(\Omega)$ et donc $N^*(V) \subset H_0^m(M)$); comme $N^*(V) \subset H^{2m}(\Omega)$ $T_j v$ est dans $H^{j+1/2}(\Gamma)$, de sorte que $\langle g_j, \overline{T_j v} \rangle$ désigne la dualité entre $H^{-(j+1/2)}(\Gamma)$ et $H^{(j+1/2)}(\Gamma)$. Par conséquent (7. 1) définit une forme semi-linéaire continue sur $N^*(V)$.

Par conséquent, d'après (6. 5), il existe un élément u de $H^0(\Omega)$ unique, vérifiant

$$\left\{\begin{array}{l} (u, A^*v) = \langle f, \bar{v} \rangle + \displaystyle\sum_{j=0}^{j=m-1} \langle g_j, \overline{T_j v} \rangle, \\ \quad \text{pour tout } v \in H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega). \end{array}\right. \tag{7. 2}$$

On en déduit (en prenant v dans $\mathfrak{D}(\Omega)$) :

$$Au = f, \tag{7. 3}$$

donc $u \in \mathcal{H}_A^0(\Omega)$.

[11] Sous des hypothèses convenables, on peut transformer (6. 5) en une équation où n'interviennent que des distributions sur R^n (cf. [11], [14], [18]). Mais ceci n'est pas indispensable pour la suite.

L'équation (7. 2) peut maintenant s'écrire :

$$(u, A^*v) - \langle Au, \bar{v}\rangle = \sum_{j=0}^{j=m-1} \langle g_j, \overline{T_j v}\rangle.$$

D'après (4. 5) on en déduit :

$$\gamma_j u = g_j, \quad j = 0, \ldots, m-1 \tag{7. 4}$$

et l'on peut énoncer le

Théorème 7. 1. — *Sous les hypothèses du théorème* 2. 1, *il existe u dans* $\mathcal{H}^0_A(\Omega)$ *unique, vérifiant* (7. 3) *et* (7. 4).

Ou encore :

L'opérateur $\{A, \gamma\}$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{H}^0_A(\Omega)$ *sur l'espace* $H^{-m}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{-(j+1/2)}(\Gamma)$ (¹²).

D'après le théorème 3. 1 les conditions aux limites (7. 4) ont lieu au sens suivant (sous les hypothèses du théorème 3. 1) :

$$\tilde{\gamma}_{j,\rho} u \to g_i \quad \text{dans} \quad H^{-(j+1/2)}(\Gamma) \quad \text{lorsque} \quad \rho \to 0. \tag{7. 5}$$

Le problème (7. 3) (7. 4) est un problème de Dirichlet non homogène.

Remarque 7. 1. — Il résulte du théorème 7. 1 que l'on peut apporter le complément suivant au théorème 2. 1 : *l'application* γ *de* $\mathcal{H}^0_A(\Omega)$ *dans* $\prod_{j=0}^{m-1} H^{-(j+1/2)}(\Omega)$ *est surjective.*

Ceci montre que dans le théorème 2. 1 l'espace $\prod_{j=0}^{m-1} H^{-(j+1/2)}(\Gamma)$ est le meilleur (*i.e.* le plus petit) possible.

Notons encore que le noyau de γ dans $\mathcal{H}^0_A(\Omega)$ est $H^m_0(\Omega)$. En effet soit u dans $\mathcal{H}^0_A(\Omega)$ avec $\gamma u = 0$. Soit u^* la solution dans $H^m_0(\Omega)$ de $Au^* = Au$. Alors $u - u^*$ est dans $\mathcal{H}^0_A(\Omega)$, et vérifie $A(u - u^*) = 0$ et $\gamma(u - u^*) = 0$, donc d'après le théorème 7. 1, $u - u^* = 0$, d'où le résultat.

Remarque 7. 2. — Soit u une distribution sur Ω vérifiant

$$Au \in H^{-m}(\Omega), \tag{7. 6}$$

(7. 7) $\tilde{\gamma}_{j,\rho} u$ est borné dans $H^{-(j+1/2)}(\Gamma)$ lorsque $\rho \to 0$, pour $j = 0, \ldots, m-1$.

(¹²) On peut vérifier directement que u vérifiant (7. 3) et (7. 4) dépend continûment de f et g_j, ou bien appliquer le théorème de Banach sur les isomorphismes.

(Cette condition a un sens, car d'après le théorème de régularité locale, la seule condition (7. 6) implique que $u \in H^m(\Omega_\rho)$ pour tout $\rho > 0$.)

On va montrer que (7. 7) *et* (7. 7) *entraînent* (sous les hypothèses des théorèmes 2. 1 et 3. 1) *que*

$$u \in H^0(\Omega) \quad ((\text{et donc } u \in \mathcal{H}^0_A(\Omega)). \tag{7. 8}$$

En effet (7. 7) entraîne:

$\gamma_{j,\rho} u_\rho = f_{j,\rho}$ est borné en norme dans $H^{-(j+1/2)}(\Gamma_\rho)$ par une constante indépendante de ρ.

Par conséquent u_ρ (restriction de u à Ω_ρ) est la solution du problème de Dirichlet (au sens du théorème 7. 1):

$$Au_\rho = (Au)_{\Omega_\rho}, \qquad \gamma_{j,\rho} u_\rho = f_{j,\rho}.$$

On en déduit:

$$\|u_\rho\|_{H^0(\Omega_\rho)} \leqslant c_1(\|Au\|_{H^0(\Omega)} + \Sigma\|f_{j,\rho}\|_{H^{-(j+1/2)}(\Gamma_\rho)}) \leqslant c_2.$$

où c_1 est indépendante de ρ. Pour cela, il suffit de vérifier que c_1 est indépendante de ρ. Or tout reposant sur le théorème de régularité de Nirenberg $(N^*(V) \subset H^{2m}(\Omega))$ et la transposition, il suffit de vérifier ceci:

soit $f \in H^0(\Omega_\rho)$ et v la solution dans $H^m_0(\Omega_\rho)$ de $Av = f$. Alors, v est dans $H^{2m}(\Omega_\rho)$ et

$$\|v\|_{H^{2m}(\Omega_\rho)} \leqslant c_3\|f\|_{H^0(\Omega_\rho)},$$

c_3 étant indépendante de ρ; ceci résulte de la démonstration du théorème de Nirenberg et des hypothèses du théorème 3. 1.

Comme $\|u\|_{H^0(\Omega_\rho)}$ est borné et fonction croissante de ρ, u est dans $H^0(\Omega)$, d'où notre assertion.

Remarque 7. 3. — Pour arriver au théorème 7. 1 on a pris la forme semi-linéaire particulière (7. 1). Étudions le cas le plus général. On montre (cf. [14], [11], [18]) que la forme semi-linéaire continue la plus générale sur $N^*(V) = H^{2m}(\Omega) \cap H^m_0(\Omega)$ est de la forme suivante:

$$L(v) = \langle f, \bar{v}\rangle + \langle g, \overline{Pv}\rangle, \tag{7. 9}$$

où $f \in H^{-m}(\Omega)$ (le premier crochet désignant la dualité entre $H^{-m}(\Omega)$ et $H^m_0(\Omega)$), et où $g \in H^{-2m}_{\overline{\Omega}}(R^n)$, P désignant un opérateur linéaire continu de $H^{2m}(\Omega)$ dans $H^{2m}(R^n)$ tel que $Pv = v$ *p.p.*

sur Ω; alors $\langle g, \overline{\mathrm{P}v}\rangle$ désigne le produit scalaire entre $\mathrm{H}^{-2m}(\mathrm{R}^n)$ et $\mathrm{H}^{2m}(\mathrm{R}^n)$, et le résultat est indépendant du choix de P.

Alors, il existe u dans $\mathrm{H}^0(\Omega)$ unique, avec

$$(7.10)\qquad (u, \mathrm{A}^*v) = \langle f, \overline{v}\rangle + \langle g, \overline{\mathrm{P}v}\rangle,$$

pour tout $v \in \mathrm{H}^{2m}(\Omega) \cap \mathrm{H}_0^m(\Omega)$.

Interprétons le problème ainsi résolu; soit g_Ω la restriction de g à Ω : $g_\Omega \in \mathrm{H}^{-2m}(\Omega)$; on déduit de (7.10) :

$$(7.11)\qquad \mathrm{A}u = f + g_\Omega.$$

Considérons maintenant sur $\mathrm{H}_0^{2m}(\Omega)$ le produit scalaire $(\mathrm{A}^*u, \mathrm{A}^*v)$; grâce au fait que $\|\mathrm{A}^*u\| \geqslant c_4\|u\|_{\mathrm{H}^{2m}(\Omega)}$ pour $u \in \mathrm{H}_0^{2m}(\Omega)$, on définit ainsi un produit scalaire équivalent à $(u, v)_{\mathrm{H}^{2m}(\Omega)}$. Par conséquent il existe u_0 unique dans $\mathrm{H}_0^{2m}(\Omega)$ vérifiant $(\mathrm{A}^*u_0, \mathrm{A}^*v) = \langle g_\Omega, \overline{v}\rangle$ pour tout $v \in \mathrm{H}_0^{2m}(\Omega)$, i. e.

$$(7.12)\qquad \mathrm{A}\mathrm{A}^*u_0 = g_\Omega.$$

Alors $\tilde{u}_0$ désignant le prolongement de u_0 à R^n par 0 hors de Ω ($\tilde{u}_0 \in \mathrm{H}^{2m}(\mathrm{R}^n)$), on voit que

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^*\tilde{u}_0 \in \mathrm{H}^{-2m}(\mathrm{R}^n) \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{A}\mathcal{A}^*\tilde{u}_0)_\Omega = g_\Omega.$$

Si donc l'on introduit

$$(7.13)\qquad h = g - \mathcal{A}\mathcal{A}^*\tilde{u}_0,$$

on a là une distribution de $\mathrm{H}^{-2m}(\mathrm{R}^n)$, à support dans Ω, et telle que $h_\Omega = 0$, *donc à support dans* Γ. Or on montre [9 *bis*] que toute distribution de $\mathrm{H}^{-2m}(\mathrm{R}^n)$ à support dans Γ peut s'écrire :

$$(7.14)\qquad \langle h, \overline{v}\rangle = \sum_{j=0}^{m-1}\langle g_j, \overline{\mathrm{T}_j v}\rangle + \sum_{j=0}^{m-1}\langle g_j^*, \overline{\gamma_j v}\rangle, \quad v \in \mathrm{H}^{2m}(\mathrm{R}^n),$$

où

$$(7.15)\qquad g_j \in \mathrm{H}^{-(j+1/2)}(\Gamma), \qquad g_j^* \in \mathrm{H}^{-(2m-j-1/2)}(\Gamma).$$

Finalement (7.10) est équivalent à

$$(7.16)\qquad (u, \mathrm{A}^*v) = \langle f, \overline{v}\rangle + \langle \mathcal{A}\mathcal{A}^*\tilde{u}_0, \overline{\mathrm{P}v}\rangle + \sum_{j=0}^{j=m-1}\langle g_j, \overline{\mathrm{T}_j v}\rangle,$$

pour $v \in \mathrm{H}^{2m}(\Omega) \cap \mathrm{H}_0^m(\Omega)$.

Mais

$$\langle \mathcal{A}\mathcal{A}^*\tilde{u}_0, \overline{P\nu}\rangle = \langle \mathcal{A}^*\tilde{u}_0, \overline{(\mathcal{A})^*P\nu}\rangle \text{ [13]}.$$

le deuxième crochet désignant le produit scalaire dans $H^0(R^n)$. Puis, u_0 étant dans $H_0^{2m}(\Omega)$, $A^*\tilde{u}_0 = (A^*u_0)^{\sim}$ et par conséquent $\langle \mathcal{A}^*\tilde{u}_0, \overline{(\mathcal{A})^*P\nu}\rangle = (A^*u_0, A^*\nu)$, et donc (7. 16) équivaut à

$$(7.17) \quad (u - A^*u_0, A^*\nu) = \langle f, \bar{\nu}\rangle + \sum_{j=0}^{m-1} \langle g_j, \overline{T_j\nu}\rangle,$$
$$\nu \in H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega).$$

Conclusion. — *On est ramené à l'équation* (7. 2) *avec* u *remplacé par* $u - A^*u_0$.

8. — APPLICATION AU PROBLÈME DE NEUMANN

On applique les remarques du n° 6 avec $V = H^m(\Omega)$. On fait l'hypothèse

$$(8.1) \quad |a(\nu, \nu)| \geq c\|\nu\|^2_{H^m(\Omega)}, \; c > 0, \quad \text{pour tout} \quad \nu \in H^m(\Omega) \text{ [14]}.$$

Alors (cf. [18 *bis*]) $N^*(V) \subset H^{2m}(\Omega)$ (et $N(V) \subset H^{2m}(\Omega)$), inclusion algébrique et topologique.

Nous prenons dans (6. 5) $L(\nu)$ donnée par

$$(8.2) \quad L(\nu) = (f, \nu) - \sum_{j=0}^{m-1} \langle g_j, \overline{\gamma_j\nu}\rangle, \quad \nu \in N^*(V),$$

où f est donnée dans $H^0(\Omega)$ et g_j dans $H^{-2m+j+1/2}(\Gamma)$.

Grâce au fait que $N^*(V) \subset H^{2m}(\Omega)$ on définit ainsi une forme semi-linéaire continue sur $N^*(V)$. Par conséquent, il existe u unique dans $H^0(\Omega)$ vérifiant

$$(8.3) \quad (u, A^*\nu) = (f, \nu) - \sum_{j=0}^{m-1} \langle g_j, \overline{\gamma_j\nu}\rangle \quad \text{pour tout} \quad \nu \in N^*(V).$$

On en déduit que

$$(8.4) \qquad Au = f,$$

donc $u \in D_A^0(\Omega)$. Alors (8. 3) s'écrit

$$(u, A^*\nu) - (Au, \nu) = - \sum_{j=0}^{m-1} \langle g_j, \overline{\gamma_j\nu}\rangle.$$

[13] Cf. [10].
[14] Pour d'autres hypothèses, cf. Remarque 11. 3

D'après (4. 4) (valable; cf. théorème 4. 3), et notant que $T_j\varphi = 0$ puisque $\varphi \in N^*(V)$, on voit que

$$S_j u = g_j, \quad j = 0, \ldots, m-1. \tag{8. 5}$$

On peut donc énoncer le

THÉORÈME 8. 1. — *Sous les hypothèses du théorème* 2. 1 *et avec* (8. 1), *il existe u dans* $D_A^0(\Omega)$ *unique, avec* (8. 4) *et* (8. 5) (15).

Ou encore :

L'opérateur $\{A, S\}$ *définit un isomorphisme de* $D_A^0(\Omega)$ *sur l'espace* $H^0(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{-(2m-j-1/2)}(\Gamma)$ (16).

Notons que, sous les hypothèses du théorème 3. 1 :

$$\begin{cases} \tilde{S}_{j,\rho} u \to g_j \quad \text{dans} \quad H^{-(2m-j-1/2)}(\Gamma), \quad \text{lorsque} \quad \rho \to 0, \\ \qquad j = 0, \ldots, m-1. \end{cases} \tag{8. 6}$$

On a des remarques analogues aux remarques 7. 1, 7. 2, 7. 3; énonçons-les brièvement :

Remarque 8. 1. — L'application S de $D_A^0(\Omega)$ dans

$$\prod_{j=0}^{m-1} H^{-(2m-j-1/2)}(\Gamma)$$

est *surjective*, de noyau $N(H^m(\Omega))$.

Remarque 8. 2. — Soit u une distribution sur Ω telle que

$$Au \in H^0(\Omega), \tag{8. 7}$$

(8. 8) $\tilde{S}_{j,\rho} u$ est borné dans $H^{-(2m-j-1/2)}(\Gamma)$ lorsque $\rho \to 0, \quad j = 0, \ldots, m-1$.

Dans ces conditions, on a

$$u \in H^0(\Omega) \quad (\text{donc } u \in D_A^0(\Omega)). \tag{8. 9}$$

Remarque 8. 3. — Si $\varphi \to L(\varphi)$ est une forme semi-linéaire continue sur $N^*(V)$, elle peut se prolonger à $H^{2m}(\Omega)$ (d'après le théorème de Hahn Banach) et donc

$$L(\varphi) = \langle g, \overline{P\varphi} \rangle, \tag{8. 10}$$

g et $P\varphi$ étant comme dans (7. 10), $\varphi \in H^{2m}(\Omega)$.

(15) Il s'agit du problème de Neumann non homogène *attaché à* $a(u, \varphi)$.
(16) Remarque analogue à celle de la note de bas de page (12).

Alors il existe u dans $H^0(\Omega)$, unique, avec

$$(8.11)\quad (u, A^*v) = \langle g, \overline{Pv}\rangle, \quad \text{pour tout} \quad v \in N^*(V).$$

Donc

$$(8.12)\quad Av = g_\Omega$$

On introduit encore $u_0 \in H_0^{2m}(\Omega)$, avec $AA^*u_0 = g_\Omega$, et

$$(8.13)\quad h = g - \mathcal{A}\mathcal{A}^*\tilde{u}_0.$$

On peut écrire h comme dans (7. 14), (7. 15) et (8. 11) peut alors s'écrire (en tenant compte du fait que $T_jv = 0$ pour $v \in N^*(V)$) :

$$(u, A^*v) = \langle \mathcal{A}\mathcal{A}^*\tilde{u}_0, \overline{Pv}\rangle + \sum_{j=0}^{m-1} \langle g_j^*, \overline{\gamma_j v}\rangle.$$

On est donc ramené à (8. 3) avec g_j remplacé par $-g_j^*$ et u par $u - Au^*_0$.

Remarque 8. 4. — Il résulte de (8. 1) qu'il existe u dans $H^m(\Omega)$ unique, vérifiant

$$(8.14)\quad a(u, v) = \mathcal{L}(v), \quad \text{pour tout} \quad v \in H^m(\Omega)$$

où $v \to \mathcal{L}(v)$ est une forme semi-linéaire continue sur $H^m(\Omega)$. Prenons

$$(8.15)\quad \mathcal{L}(v) = (f, v) - \sum_{j=0}^{j=m-1} \langle g_j, \overline{\gamma_j v}\rangle,$$

où

$$(8.16)\quad f \in H^0(\Omega) \quad \text{et} \quad g_j \in H^{-m+j+1/2}(\Gamma)$$

(de sorte que $v \to \mathcal{L}(v)$ est bien continue sur $H^m(\Omega)$). On a alors (8. 4) et (8.5), de sorte qu'en combinant avec le théorème 4. 2, il vient

Théorème 8. 2. — *Sous les hypothèses du théorème* 2. 1 *et avec* (8. 1), *l'opérateur* $\{A, S\}$ *est un isomorphisme de* $D_A^m(\Omega)$ (cf. Remarque 4. 1) *sur* $H^0(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{-m+j+1/2}(\Gamma)$.

9. UN RÉSULTAT D'INTERPOLATION

Soient $\{F, E\}$, $\{F_1, E_1\}$ deux couples d'espaces hilbertiens, comme au n° 1.

THÉORÈME 9. 1. — *Soient* M_ρ, $0 \leqslant \rho \leqslant \rho_0$, M, *des opérateurs linéaires continus de* E *dans* E_1 *et* F *dans* F_1, *tels que, lorsque* $\rho \to 0$,

$$M_\rho e \to Me \quad \text{dans } E_1 \text{ fort, pour tout} \quad e \in E, \tag{9. 1}$$

$$M_\rho f \to Mf \quad \text{dans } F_1 \text{ fort, pour tout} \quad f \in F. \tag{9. 2}$$

Dans ces conditions, pour $0 < \theta < 1$,

$$M_\rho g \to Mg \text{ dans } F_1^{1-\theta}E_1^\theta \text{ fort, pour tout } g \in F^{1-\theta}E^\theta. \tag{9. 3}$$

Démonstration. — Soit g dans $F^{1-\theta}E^\theta$; alors, d'après [15 *ter*] il existe une fonction $u_g(t) = u(t)$, dépendant linéairement de g, telle que

$$\int_0^\infty (\|t^\alpha u(t)\|_F^2 + \|t^\alpha u'(t)\|_E^2)dt \leqslant c_1\|g\|^2_{F^{1-\theta}E^\theta} \text{ ([17])}, \tag{9. 4}$$

où $1/2 + \alpha = \theta$, avec

$$u(0) = g. \tag{9. 5}$$

On introduit

$$v_\rho(t) = M_\rho(u(t)); \quad v(t) = M(u(t)); \tag{9. 6}$$

alors

$$v_\rho(0) = M_\rho g, \quad v(0) = Mg,$$

et d'après [15 *ter*] on aura (9. 3) si

$$t^\alpha v_\rho \to t^\alpha v' \quad \text{dans l'espace} \quad L^2(0, \infty; F) \text{ ([18])}, \tag{9. 7}$$

et

$$t^\alpha v'_\rho \to t^\alpha v' \quad \text{dans} \quad L^2(0, \infty; E), \tag{9. 8}$$

([17]) La fonction u définit une distribution sur $]0, \infty[$ (noté $(0, \infty)$ dans [16]), à valeurs dans F [22 *bis*], donc dans E et u' désigne la dérivée de u en t au sens distributions sur $]0, \infty[$ à valeurs dans E (cf. aussi [16]).

([18]) L^2 $(0, \infty; X)$, X espace de Bannach, désigne l'espace des (classes de) fonctions de carré sommable sur $]0, \infty[$ à valeurs dans X.

Mais les opérateurs M_ρ demeurant dans des ensembles bornés de $\mathcal{L}(F; F_1)$ et $\mathcal{L}(E; E_1)$, on a

$$\|t^\alpha v_\rho(t)\|_{F_1} \leqslant c_2\|t^\alpha u(t)\|_F, \quad \|tv'_\rho(t)\|_{E_1} \leqslant c_3\|t^\alpha u'(t)\|_E;$$

par ailleurs, d'après (9. 2) et (9. 1), $v_\rho(t) \to v(t)$ dans F_1 fort, et $v'_\rho(t) \to v'(t)$ dans E_1 fort. D'où (9. 7) et (9. 8) d'après le théorème de Lebesgue.

10. — APPLICATIONS DE L'INTERPOLATION : PROBLÈME DE DIRICHLET

Introduisons quelques nouveaux espaces.

Définition 10. 1. — On désigne par $\mathcal{H}^\alpha_A(\Omega)$ l'espace des (classes de) fonctions $u \in H^\alpha(\Omega)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant m$, telles que

$$Au \in H^{-m}(\Omega).$$

Muni du produit scalaire

$$(10.1) \quad (u, v)_{\mathcal{H}^\alpha_A(\Omega)} = (u, v)_{H^\alpha(\Omega)} + (Au, Av)_{H^{-m}(\Omega)},$$

c'est un espace de Hilbert.

Notons que $\mathcal{H}^m_A(\Omega) = H^m(\Omega)$, avec des structures hilbertiennes équivalentes (mais non identiques).

Définition 10. 2. — On pose

$$(10.2) \qquad h^{(1-\theta)m}_A(\Omega) = (\mathcal{H}^m_A(\Omega))^{1-\theta}(\mathcal{H}^0_A(\Omega))^\theta.$$

Proposition 10. 1. — *Sous les hypothèses de la proposition 10. 1, on a $h^\alpha_A(\Omega) \subset \mathcal{H}^\alpha_A(\Omega)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant m$, algébriquement et topologiquement* [19].

Démonstration. — Considérons l'application identité : $u \to u$, qui est linéaire continue de $\mathcal{H}^m_A(\Omega) \to H^m(\Omega)$ et de $\mathcal{H}^0_A(\Omega) \to H^0(\Omega)$; alors par application du théorème d'interpolation, elle est linéaire continue de $h^{(1-\theta)m}_A(\Omega)$ dans

$$(H^m(\Omega))^{1-\theta}(H^0(\Omega))^\theta = H^{(1-\theta)m}(\Omega)$$

[19] Une étude plus précise de $h^\alpha_A(\Omega)$ sera faite dans un des articles ultérieurs de cette série.

(Définition 1. 1). Donc $u \to u$ est linéaire continue de $h_A^\alpha(\Omega)$ dans $H^\alpha(\Omega)$.

On considère ensuite l'application linéaire $u \to Au$, continue de $\mathcal{H}_A^m(\Omega)$ et $\mathcal{H}_A^0(\Omega)$ dans $H^{-m}(\Omega)$, donc de $h_A^\alpha(\Omega)$ dans $H^{-m}(\Omega)$ d'où le résultat.

Comme $\{A, \gamma\}$ est un isomorphisme de $H^m(\Omega) = \mathcal{H}_A^m(\Omega)$ sur $H^{-m}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma)$, et comme, d'après le théorème 7. 1, $\{A, \gamma\}$ est un isomorphisme de $\mathcal{H}_A^0(\Omega)$ sur $H^{-m}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{-j-1/2}(\Gamma)$ on en déduit [20] :

THÉORÈME 10. 1. — *Sous les hypothèses du théorème* 2. 1, *pour* $0 \leqslant \alpha \leqslant m$, *l'opérateur* $\{A, \gamma\}$ *est un isomorphisme de* $h_A^\alpha(\Omega)$ *sur* $H^{-m}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{\alpha-j-1/2}(\Gamma)$.

De même, pour u dans $\mathcal{H}_A^m(\Omega)$, $\tilde{\gamma}_{j,\rho} u \to \gamma_j u$ dans $H^{m-j-1/2}(\Gamma)$ sous les hypothèses du théorème 3. 1 (immédiat), et pour $u \in \mathcal{H}_A^0(\Omega)$, $\tilde{\gamma}_{j,\rho} u \to \gamma_j u$ dans $H^{-j-1/2}(\Gamma)$ fort, tout ceci lorsque $\rho \to 0$ (théorème 3. 1); utilisant alors le théorème 9. 1, il vient :

THÉORÈME 10. 2. — *Sous les hypothèses des théorèmes* 2. 1 *et* 3. 1, *pour* u *donné dans* $h_A^\alpha(\Omega)$, *on a*

$$(10.3) \quad \tilde{\gamma}_{j,\rho} u \to \gamma_j u \quad \textit{dans} \quad H^{\alpha-j-1/2}(\Gamma) \quad \textit{fort}, \quad j = 0, \ldots, m-1,$$

lorsque $\rho \to 0$.

Par conséquent, pour f donné dans $H^{-m}(\Omega)$ et g_j donné dans $H^{\alpha-j-1/2}(\Gamma)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant m$, il existe u unique dans $H^\alpha(\Omega)$, avec

$$(10.4) \qquad Au = f,$$
$$(10.5) \qquad \gamma_j u = g_j, \quad j = 0, \ldots, m-1,$$

et (10. 5) s'interprétant par (10. 3).

Remarque 10. 1. — Prenons dans les théorèmes 10. 1 et 10. 2, $\alpha = m - 1/2$. Alors $g_j \in H^{m-j-1}(\Gamma)$ et la solution u est dans $H^{m-1/2}(\Omega)$. Ceci améliore le résultat de [5] (relatif à $m = 1$; cf. aussi [18′] où l'ouvert Ω est plus général) et de [17] ($m > 1$) où la solution est seulement trouvée dans $H^{m-1}(\Omega)$. Les méthodes sont complètement différentes; on verra dans un

[20] Notons que si M est un isomorphisme de E sur E_1 et de F sur F_1, c'est également un isomorphisme de $F^{1-\theta}E^\theta$ sur $F_1^{1-\theta}E_1^\theta$ (interpoler M et M^{-1}).

article ultérieur de cette série comment obtenir le théorème 10.1 par la méthode de [17] (cf. aussi Remarque 10.3 ci-après).

Il serait peut-être intéressant de compléter le théorème 10.1 en prenant le deuxième membre f dans un espace *plus grand* que $H^{-m}(\Omega)$; il faut en effet noter que dans le cas particulier $\Omega = \{x_n > 0\}$ le théorème 10.2 de [16] est meilleur que le théorème 10.1 actuel. (On doit dans [16] distinguer les variables « tangentielles » de la variable « normale »).

Remarque 10.2. — Soit u distribution sur Ω vérifiant

$$(10.6) \qquad Au \in H^{-m}(\Omega)$$

et

$$(10.7) \qquad \tilde{\gamma}_{j,\rho} u \text{ borné dans } H^{\alpha-j-1/2}(\Gamma),\ j = 0, \ldots, m-1,\ \rho \to 0.$$

Dans ces conditions :

$$(10.8) \qquad u \in H^{\alpha}(\Omega).$$

Même démonstration qu'à la Remarque 7.2.

Cette remarque est utile dans l'étude des espaces de Hardy (dans le cas L^2; on étudiera cela plus tard, à propos du cas L^p, $1 < p < \infty$).

Remarque 10.3. — Nous ne nous sommes pas intéressés aux hypothèses minima de régularité des coefficients de A sous lesquelles le théorème 10.1 relatif au cas α est vrai. Dans cette direction la méthode d'interpolation n'est pas favorable : pour obtenir le résultat pour $\alpha \in]0, m[$ il faut utiliser le résultat pour $\alpha = 0$ et $\alpha = m$, donc les hypothèses relatives au cas $\alpha = 0$, plus restrictives que celles relatives au cas $\alpha = m$; c'est dans cette direction notamment que la démonstration directe (sans interpolation) du théorème 10.1 sera utile.

Remarque 10.4. — On sait que $\{A, \gamma\}$ est un isomorphisme de $H^s(\Omega)$ sur $H^{s-2m}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{s-j-1/2}(\Gamma)$ pour s entier $\geqslant m$ — et, par interpolation, pour s *réel* $\geqslant m$. C'est la Proposition 3, p. 87 de [19]. (Où il n'est pas fait usage de l'interpolation.) Le Théorème 10.1 étend, dans un certain sens, ce résultat au cas $0 < s < m$ [21].

[21] On trouvera également dans [19] quelques indications (p. 84) sur le cas $0 < s < m$, $\Omega = \{x_n > 0\}$, A à coefficients constants, $A = 0$.

Remarque 10. 5. — Nos résultats sont vrais sous les hypothèses suivantes :

(i) $\left\{\begin{array}{l} A\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right) = A \text{ est un opérateur différentiel à coeffi-} \\ \text{cients dans } \mathcal{D}(\overline{\Omega}), \text{ d'ordre} \leqslant 2m, \text{ tel que les sys-} \\ \text{tèmes } \{\gamma_j, S_j\} \textit{ et } \{\gamma_j, T_j\} \text{ soient de Dirichlet;} \end{array}\right.$

(ii) A est un isomorphisme de $H_0^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega)$ sur $H^0(\Omega)$;

(iii) A est un isomorphisme de $H_0^m(\Omega)$ sur $H^{-m}(\Omega)$.

Nous avons supposé que

(10. 9) $\quad |a(v, v)| \geqslant c_1 \|v\|^2_{H^m(\Omega)}, \quad c_1 > 0, \quad$ pour tout $v \in H_0^m(\Omega)$,

ce qui entraîne (i), (ii), (iii). Du point de vue « algébrique », si l'opérateur A est *fortement elliptique*, alors, d'après [8], (10. 9) a lieu pour $a(v, v) + \lambda\|v\|^2$, $\lambda > 0$ assez grand.

Nous allons brièvement donner des conditions algébriques plus générales que l'ellipticité forte, et sous lesquelles (i), (ii) et (iii) sont encore vérifiées (en remplaçant éventuellement A par $A + \lambda$).

Supposons la dimension $n > 2$ (sinon il faut ajouter des hypothèses du type « properly elliptic », cf. par ex. [20], [20 *bis*]), et supposons $A\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ *elliptique*, i.e.

(10. 10) $\quad \sum\limits_{|p|, |q| = m} a_{pq}(x) \xi^{p+q} \neq 0 \quad$ pour $\quad \xi \in R^n, \quad \xi \neq 0.$

Si (10. 10) a lieu, on sait [20] que l'opérateur A de $H_0^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega)$ dans $H^0(\Omega)$ est surjectif si A^* est biunivoque sur $H_0^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega)$ et que ([1 *ter*], n° 12) si A est biunivoque sur $H_0^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega)$, il en est de même pour A^*. Par conséquent la condition (ii) sera réalisée pour A et A^* si

(10. 11) $\qquad$ A est biunivoque sur $H_0^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega)$.

Supposons maintenant que (ii) ait lieu pour A^*; par transposition il en résulte l'existence et l'unicité de u dans $H^0(\Omega)$, vérifiant

(10. 12) $\quad \langle u, \overline{A^* v} \rangle = \langle f, \bar{v} \rangle$ pour tout $v \in H_0^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega)$,

pour f donné dans $H^{-m}(\Omega)$ et u dépendant continûment de f. Mais (10. 10) ayant lieu, il résulte de (10. 12), d'après [1 *bis*], que u est dans $H^m(\Omega)$. Alors $Au = f$ et $\langle u, \overline{A^* v} \rangle = \langle Au, \bar{v} \rangle$,

i.e. par (4. 5) $\sum_{j=0}^{m-1} \langle \gamma_j u, T_j v\rangle = 0$ pour tout $v \in H_0^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega)$; l'application $v \to \{T_j v\}$ de $H_0^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega)$ dans $\prod_{j=0}^{m-1} H^{j+1/2}(\Gamma)$ étant surjective, il en résulte que $\gamma_j u = 0$, $j = 0, \ldots, m-1$, donc

$$u \in H_0^m(\Omega). \tag{10. 13}$$

D'après le Théorème du graphe fermé, l'application : $f \to u$ est alors continue de $H^{-m}(\Omega)$ dans $H_0^m(\Omega)$ et (iii) a lieu. En résumé : *sous les hypothèses* (10. 10) *et* (10. 11) *les conditions* (i), (ii) *et* (iii) *ont lieu.*

Supposons que A soit faiblement défini positif [1 *ter*], *i.e.*

$$\mathrm{Re} \sum_{|p|,|q|=m} a_{pq}(x)\xi^{pq} \geqslant 0, \quad \xi \in R^n, \quad x \in \Omega. \tag{10. 14}$$

Alors, d'après le Théorème 12. 8 de [1 *ter*], $A + \lambda$ et $A^* + \lambda$ sont biunivoques sur $H_0^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega)$ pour $\lambda \geqslant \lambda_0$, λ_0 assez grand (la démonstration de [1 *ter*] donne une évaluation de λ_0). On peut donc finalement énoncer le

Théorème 10. 3. — *Sous les hypothèses* (10. 10) *et* (10. 14), *la dimension n étant* > 2, *l'opérateur* $\{A + \lambda, \gamma\}$ *est un isomorphisme de* $h^\alpha_{A+\lambda}(\Omega)$ *sur* $H^{-m}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{\alpha-j-1/2}(\Gamma)$, $0 < \alpha < m$, λ *positif assez grand.*

Ajoutons qu'en utilisant [4 *bis*], [1 *ter*] et [1 *bis*] on voit de façon analogue que (ii) entraîne (iii) dans les espaces $H^{m,p}(\Omega)$ de Sobolev construits à partir de $L^p(\Omega)$, $p \neq 2$.

11. — APPLICATIONS DE L'INTERPOLATION : PROBLÈME DE NEUMANN

Définition 11. 1. — On désigne par $D^\alpha_A(\Omega)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2m$, l'espace des (classes de) fonctions $u \in H^\alpha(\Omega)$ telles que

$$Au \in H^0(\Omega).$$

Muni du produit scalaire

$$(u, v)_{D^\alpha_A(\Omega)} = (u, v)_{H^\alpha(\Omega)} + (Au, Av), \tag{11. 1}$$

c'est un espace de Hilbert.

Notons que $D_A^{2m}(\Omega)$ coïncide avec $H^{2m}(\Omega)$, avec des structures hilbertiennes équivalentes (mais non identiques).

DÉFINITION 11. 2. — On pose

$$d_A^{2(1-\theta)m}(\Omega) = (D_A^{2m}(\Omega))^{1-\theta}(D_A^0(M))^\theta. \tag{11. 2}$$

PROPOSITION 11. 1. — *On a l'inclusion algébrique et topologique* $d_A^\alpha(\Omega) \subset D_A^\alpha(\Omega)$ (22).

La démonstration est identique à celle de la Proposition 10. 1.

Comme l'opérateur $\{A, S\}$ est un isomorphisme de $D_A^{2m}(\Omega)$ sur $H^0(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{j+1/2}(\Gamma)$ et, par le théorème 8. 1, de $D_A^0(\Omega)$ sur $H^0(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{-2m+j+1/2}(\Gamma)$, il vient

THÉORÈME 11. 1. — *Sous les hypothèses du théorème* 8. 1, $\{A, S\}$ *est un isomorphisme de* $d_A^\alpha(\Omega)$ *sur* $H^0(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{\alpha-2m+j+1/2}(\Gamma)$, *pour* $0 \leqslant \alpha \leqslant 2m$.

En outre

THÉORÈME 11. 2. — *Sous les hypothèses du théorème* 8. 1 *et du théorème* 3. 1, *pour u donné dans* $d_A^\alpha(\Omega)$, $\tilde{S}_{j,\rho}u \to S_j u$ *dans* $H^{\alpha-2m+j+1/2}(\Gamma)$ *lorsque* $\rho \to 0$, $j = 0, \ldots, m-1$.

Remarque 11. 1. — Soit u une distribution sur Ω, telle que

$$Au \in H^0(\Omega), \tag{11. 3}$$

et

$$\begin{cases} \tilde{S}_{j,\rho}u \text{ soit borné dans } H^{\alpha-2m+j+1/2}(\Gamma), \text{ lorsque } \rho \to 0, \\ j = 0, \ldots, m-1. \end{cases} \tag{11. 4}$$

Dans ces conditions

$$u \in H^\alpha(\Omega). \tag{11. 5}$$

Remarque 11. 2. — En utilisant le Théorème 8. 2, on obtient par la méthode précédente le résultat suivant : $\{A, S\}$ est un isomorphisme de

$$(D_A^m(\Omega))^{1-\theta}(D_A^0(\Omega))^\theta \quad \text{sur} \quad H^0(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{-(1-\theta)m-2\theta m+j+1/2}(\Gamma).$$

(22) Une étude plus précise de $d_A^\alpha(\Omega)$ sera faite dans un article ultérieur.

Comparant au thèorème 11. 1, avec $\alpha = (1 - \theta)m$, on en déduit

$$(D_A^m(\Omega))^{1-\theta}(D_A^0(\Omega))^{\theta} = d_A^{(1-\theta)m}(\Omega), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

En particulier $(\theta = 0)$: $d_A^m(\Omega) = D_A^m(\Omega)$.

Remarque 11. 3. — Remarque analogue à la Remarque 10. 5. Tout est valable si

(j) $\left\{\begin{array}{l} A\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right) \text{ est à coefficients indéfiniment différen-} \\ \text{tiables dans } \overline{\Omega}, \text{ d'ordre } 2m, \text{ les systèmes } \{\gamma_j, S_j\} \\ \text{et } \{\gamma_j, T_j\} \text{ étant de Dirichlet;} \end{array}\right.$

(jj) $\left\{\begin{array}{l} A \text{ est un isomorphisme de } N(H^m(\Omega)) \cap H^{2m}(\Omega) \text{ sur} \\ H^0(\Omega). \end{array}\right.$

Les conditions algébriques sont ici plus compliquées ([1], [1 *bis*], [20 *bis*]).

Il y a une légère différence entre les cas « Dirichlet » et « Neuman », l'hypothèse (iii) de la Remarque 10. 5 n'ayant pas d'analogue ici. On peut en fait observer ceci : *a*) on a vu à la Remarque 10. 5 que (iii) est essentiellement conséquence de (ii); *b*) dans le cas Dirichlet on « interpole » entre le « transposé de (ii) » et (iii), tandis que dans le cas Neumann, on « interpole » entre le « transposé de (jj) » et (jj); mais dans le cas Dirichlet on pourrait aussi « interpoler » entre le « transposé de (ii) » et (ii) lui-même. On obtient ainsi un résultat un peu moins bon pour le deuxième membre; on bénéficie dans le cas Dirichlet du fait que $\mathfrak{D}(\Omega)$ est dense dans V, le dual de V étant alors un espace de distributions sur Ω.

12. — EXEMPLE DES PROBLÈMES DE DÉRIVÉE OBLIQUE

On remplace maintenant la forme sesquilinéaire $a(u, v)$ définie au N° 1, par la suivante :

$$(12.1) \quad a(u, v) = \sum_{|p|, |q| \leqslant m} \int_\Omega a_{pq}(x)\, D^q u \overline{D^p v}\, dx + \sum_{j=0}^{m-1} \langle \Lambda_j u, \overline{\gamma_j v} \rangle,$$

où Λ_j est un opérateur différentiel d'ordre $2m - j - 1$, $m - 1$

fois transversal à Γ (cf. par ex. [15]), à coefficients indéfiniment différentiables dans $\overline{\Omega}$. Alors

$$(12.\ 2) \qquad \Lambda_j \in \mathcal{L}(H^m(\Omega);\ H^{-(m-j-1/2)}(\Gamma)),$$

de sorte que (12. 1) définit une forme sesquilinéaire continue sur $H^m(\Omega)$ On suppose que

$$(12.\ 3) \qquad |a(v,\ v)| \geqslant c\|v\|^2_{H^m(\Omega)}, \qquad c > 0, \qquad v \in H^m(\Omega);$$

pour l'étude de relations de coercivité de ce type, cf. [1].

Avec les notations du N° 6, et $V = H^m(\Omega)$, on a encore [4], [18] : $N^*(V) \subset H^{2m}(\Omega)$ (et aussi $N(V) \subset H^{2m}(\Omega)$).

Par conséquent, pour f donné dans $H^0(\Omega)$, et g_j dans $H^{-2m+j+1/2}(\Gamma)$, il existe $u \in H^0(\Omega)$ unique avec

$$(12.\ 4) \qquad (u,\ A^*v) = (f,\ v) - \sum_{j=0}^{m-1} \langle g_j,\ \overline{\gamma_j v}\rangle,\ v \in N^*(V).$$

On en déduit

$$(12.\ 5) \qquad Au = f,$$

donc $u \in D^0_A(\Omega)$, et (12. 4) s'écrit

$$(u,\ A^*v) - (Au,\ v) = -\sum_{j=0}^{j=m-1} \langle g_j,\ \overline{\gamma_j v}\rangle,$$

d'où avec (4. 4) :

$$(12.\ 6) \qquad \sum_{j=0}^{m-1} \langle \gamma_j u,\ \overline{T_j v}\rangle = \sum_{j=0}^{m-1} \langle S_j u - g_j,\ \overline{\gamma_j v}\rangle,\ v \in N^*(V).$$

Traduisons maintenant le fait que v est dans $N^*(V)$, *i.e.* que $(A^*v,\ w) = a^*(v,\ w)$ pour tout w dans $H^m(\Omega)$; utilisant le corollaire 4. 1, on obtient la condition équivalente

$$(12.\ 7) \qquad \sum_{j=0}^{m-1} \langle T_j v,\ \overline{\gamma_j w}\rangle = \sum_{j=0}^{m-1} \langle \gamma_j v,\ \overline{\Lambda_j w}\rangle,\ w \in H^m(\Omega).$$

Notons maintenant que d'après le Théorème 2. 1, Λ_j est un opérateur linéaire continu de $D^0_A(\Omega)$ (et même $\mathcal{H}^0_A(\Omega)$) dans $H^{-2m+j+1/2}(\Gamma)$; on peut donc déduire de (12. 7) par prolongement par continuité que

$$(12.\ 8) \qquad \sum_{j=0}^{m-1} \langle T_j v,\ \overline{\gamma_j u}\rangle = \sum_{j=0}^{m-1} \langle \gamma_j v,\ \overline{\Lambda_j u}\rangle,\ v \in N^*(V).$$

De (12.6) et (12.8) on déduit

$$\sum_{j=0}^{m-1} \langle \Lambda_j u, \overline{\gamma_j v} \rangle = \sum_{j=0}^{m-1} \langle S_j u - g_j, \overline{\gamma_j v} \rangle,$$

pour tout v dans $N^*(V)$; mais $N^*(V)$ étant dense dans $H^m(\Omega)$ ([23]), il en résulte

$$(12.9) \quad S_j u - \Lambda_j u = g_j, \quad j = 0, \ldots, m-1.$$

C'est un problème de dérivées obliques régulier [15]. Posant

$$(12.10) \quad (S - \Lambda)u = \{(S_0 - \Lambda_0)u, \ldots, (S_{m-1} - \Lambda_{m-1})u\},$$

on a

Théorème 12.1. — *Sous les hypothèses du théorème* 2.1 *et* (12.3), *l'opérateur* $\{A, S-\Lambda\}$ *est un isomorphisme de* $D_A^0(\Omega)$ *sur* $H^0(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{-2m+j+1/2}(\Gamma)$.

Par interpolation on en déduit :

Théorème 12.2. — *Sous les hypothèses du théorème* 2.1 *et* (12.3), *l'opérateur* $\{A, S-\Lambda\}$ *est un isomorphisme de* $d_A^\alpha(\Omega)$ *sur* $H^0(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{\alpha-2m+j+1/2}(\Omega)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2m$.

13. — ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES OPÉRATIONNELLES

Avec les notations du N° 6, supposons que

$$(13.1) \quad \begin{cases} \operatorname{Re} a(v, v) + \xi_0 \int_\Omega |v(x)|^2 dx \geqslant c\|v\|^2_{H^m(\Omega)}, \; c < 0, \; v \in V, \\ \quad \text{pour } \xi_0 \text{ convenable.} \end{cases}$$

Alors, si $p = \xi + i\eta$, $A + p$ (resp. $A^* + p$) est un isomorphisme de $N(V)$ (resp. $N^*(V)$) sur $H^0(\Omega)$ pour $\xi \geqslant \xi_0$, et

$$(13.2) \quad \|(A+p)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^0(\Omega);\, N(V))} \leqslant \operatorname{pol}(|p|) \text{ ([24])}, \quad \xi \geqslant \xi_0$$

(majoration analogue pour $(A^* + p)^{-1}$).

Par transposition on en déduit ceci : si $v \to L(v)$ est une

([23]) Si $|a(v, v)| \geqslant c\|v\|^2_{H^m(\Omega)}$, $N(V)$ (et $N^*(V)$) est dense dans V.

([24]) Pol $(|p|)$ désigne un polynôme en $|p|$ (ici de degré 1).

forme semi linéaire continue sur $N^*(V)$, il existe $u(p) = u$ unique dans $H^0(\Omega)$ avec

$$(13.3) \quad (u, (A^* + \bar{p})v) = L(v) \quad \text{pour tout} \quad v \in N^*(V),$$

et

$$(13.4) \qquad \|u\| \leqslant \operatorname{pol}(|p|)\,|||L|||,$$

où $|||L||| = \sup . |L(V)|\, \|v\|_{N^*(V)}$.

Appliquons ces remarques au cas $V = H_0^m(\Omega)$ (problème de Dirichlet). Comme au N° 7 nous prenons

$$(13.5) \qquad L(v) = \langle f, \bar{v}\rangle + \sum_{j=0}^{m-1} \langle g_j, \overline{T_j v}\rangle,$$

f donné dans $H^{-m}(\Omega)$, g_j donné dans $H^{-j-1/2}(\Gamma)$; il en résulte (cf. N° 7) :

$$(13.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \{A + p, \gamma\} \text{ est un isomorphisme de } \mathcal{H}_A^0\}(\Omega) \text{ sur} \\ H^{-m}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{-j-1/2}(\Gamma) \text{ pour } \xi \geqslant \xi_0, \text{ d'inverse} \\ \text{majoré par un polynôme en } |p|. \end{array} \right.$$

Par ailleurs, $\{A + p, \gamma\}$ est un isomorphisme de $H^m(\Omega) = \mathcal{H}_A^m(\Omega)$ sur $H^{-m}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma)$, d'inverse majoré par un polynôme en p.

Utilisant le Théorème d'interpolation et la majoration des normes $(\mu_\theta \leqslant \mu_0^{1-\theta}\mu_1^\theta)$, on en déduit :

pour $\xi \geqslant \xi_0$, $\{A + p, \gamma\}$ est un isomorphisme de $h_A^\alpha(\Omega)$ sur $H^{-m}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{\alpha-j-1/2}(\Gamma)$, pour $0 \leqslant 0 \leqslant m$, d'inverse majoré par un polynôme en $|p|$.

On en déduit, par la méthode de la transformation de Laplace (cf. par ex. [12]. Chap XI) :

Théorème 13. 1. — *Sous les hypothèses du Théorème* 2. 1, *l'opérateur* $\left\{A + \frac{\partial}{\partial t}, \gamma\right\}$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{D}'_+(h_A^\alpha(\Omega))$ *sur* $\mathcal{D}'_+(H^{-m}(\Omega)) \times \prod_{j=1}^{m-1} \mathcal{D}'_+(H^{\alpha-j-1/2}(\Gamma))$[25].

[25] $\mathcal{D}'_+(X)$, X espace de Banach, désigne l'espace des distributions en t à valeurs dans X et à support limité à gauche. Cf. [22 *bis*].

Autrement dit : si f est une distribution en t à valeurs dans $H^{-m}(\Omega)$ à support limité à gauche et si g_j est une distribution en t à valeurs dans $H^{\alpha-j-1/2}(\Gamma)$, de support limité à gauche, il existe une distribution u et une seule à valeurs dans $h_A^\alpha(\Omega)$, de support limité à gauche, telle que

$$Au + \frac{\partial}{\partial t} u = f,$$

avec $\gamma_j u = g_j, \quad j = 0, \ldots, m-1$ (26).

Remarque 13. 1. — Sous les hypothèses du théorème 3. 1, on aura

$$\tilde{\gamma}_{j,\rho} u \to \gamma_j u \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'_+(H^{\alpha-j-1/2}(\Gamma)) \quad \text{lorsque} \quad \rho \to 0.$$

Remarque 13. 2. — On peut naturellement développer des considérations analogues pour le cas du problème de Neumann, des problèmes de dérivées obliques, etc...

Remarque 13. 3. — On peut étudier de même des opérateurs $A + \partial^2/\partial t^2$, $A + i\partial/\partial t$, etc. Cf. [12].

Remarque 13. 4. — La méthode précédente permet également d'étudier les problèmes de perturbation singulière, à partir des résultats de [25].

La généralisation de la théorie au cas où $A = A\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ est coefficients dépendant de t (cf. [12]) sera faite dans un article ultérieur. (Cf. déjà [16 *bis*]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Agmon. The coerciveness problem for integro differential forms, *Journal d'Analyse Math. Israel.* Vol. 6 (1958), pp. 183-223.

[1 *bis*] S. Agmon. The L_p approach to the Dirichlet problem I, *Annali Scuola Norm. Sup. Pisa.* III, 13 (1959) pp. 405-448.

[1 *ter*] S. Agmon, A. Douglis et L. Nirenberg. Estimates near the boundary, *Comm. Pure Applied Math.* Vol. XII (1959), pp.623-727.

[2] N. Aronszajn. Associated spaces, interpolation theorems and the regularity of solutions of differential problems, *Conférence de Berkeley*, 1960, à paraître.

(26) Il s'agit en fait de $(I \otimes \gamma_j)u$, où $I \otimes \gamma_j$ est un opérateur linéaire continu de $\mathcal{D}'_+ \hat{\otimes} h(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'_+ \hat{\otimes} H^{\alpha-j-1/2}(\Gamma)$ (produit tensoriel de l'application I = identité dans $\mathcal{D}'_+$, et de γ_j). Cf. [22 *bis*].

[2 *bis*] N. ARONSZAJN. Boundary value of functions with finite Dirichlet integral, *Tech. Report.* n. 14, *Univ. of Kansss*, (1955), pp. 77-94.

[3] N. ARONSZAJN et A. N. MILGRAM. Differential operators on Riemaniam manifolds, *Rend. Circ. Matem. Palermo*, Vol. 2 (1952), pp. 1-61.

[3 *bis*] N. ARONSZAJN et K. T. SMITH. A paraître.

[3 *ter*] BABITCH. Le problème du prolongement à la frontière, *Ouspechi Mat. Nauk*, t. 8 (1953), pp. 111-113.

[3 *quarto*] BABITCH-SLOBODETSKY. *Doklady Akad. Nauk.* t. 106 (1956), pp. 604-608.

[4] F. E. BROWDER. Modern methods in the theory of partial differential equations. A paraître aux *Eergebnisse der Math.*, Springer.

[4 *bis*] F. E. BROWDER. Estimates and existence theorems for elliptic boundary value problems. *Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A.* 45 (1959), pp. 365-372.

[5] G. CIMMINO. Nuovo tipo di condizioni al contorno e nuovo metodo di trattazione per il problema generalizzato di Dirichlet, *Rend. Circo. Mat. Palermo*, 61 (1937), pp. 177-224.

[6] C. FOIAS et J. L. LIONS. Sur certains théorèmes d'interpolation. A paraître aux *Acta Szeged.*

[7] E. GAGLIARDO. Interpolation d'espaces de Banach et applications, *C. R. Acad. Sci. Paris*, (I), (II), (III), Vol. 248 (1959), pp. 1912-1914; 3388-3390; 3517-3518.

[8] L. GÅRDING. Dirichlet's problem for linear elliptic partial differentiel equations, *Math. Scand.* 1, (1953), pp. 55-72.

[9] L. HÖRMANDER. Définitions of maximal differential operators, *Arkiv for Math.*, t. 3 (1958), p. 510-504.

[9 *bis*] L. HÖRMANDER et J. L. LIONS. Sur la complétion par rapport à une intégrale de Dirichlet, *Math. Scand.* 4 (1956), pp. 259-270.

[10] S. G. KREIN. Un théorème d'interpolation dans la théorie des opérateurs, *Doklady Akad. Nauk*, t. 130 (1959), pp. 1162-1165.

[11] J. L. LIONS. Lectures on elliptic differentiel equations, *Tata Institute of Fundamental Research.* Bombay, 1957.

[12] J. L. LIONS. Équations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites, *Grundlehren der mathem. Wissenschaften*, t. 111. Springer. A paraître.

[13] J. L. LIONS. Un théorème de traces; applications, *C. R. Acad. Sci., Paris*, t. 249 (1959), pp. 2259-2261.

[14] J. L. LIONS. Conditions aux limites de Visik Soboleff et problèmes mixtes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 244 (1957), pp. 1126-1128.

[15] J. L. LIONS. Sur les problèmes aux limites du types dérivée oblique, *Annals of Math.*, 64 (1956), pp. 208-239.

[15 *bis*] J. L. LIONS. Espaces intermédiaires entre espaces hilbertiens et applications, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. Roumanie.* 50 (1958), pp. 419-432.

[15 *ter*] J. L. LIONS. Théorèmes de trace et d'interpolation. (I), *Annali Scuola Norm. Sup. Pisa.* Vol. XIII (1959), pp. 389-403.

[16] J. L. LIONS et E. MAGENES : Problemi al contorno non omogenei. (I), *Annali Scuola Norm. Sup. Pisa*, Vol. XIV (1960), pp. 269-308.

[16 *bis*] J. L. LIONS et E. MAGENES. Remarque sur les problèmes aux limites pour opérateurs paraboliques. *C. R. Acad. Sc.* Paris, 1960.

[17] E. MAGENES. Sul problema di Dirichlet per le equazioni lineari ellittiche in due variabili, *Ann. Mat. Pura ed Appl.* IV, 48, (1959) pp. 257-279.

[18] E. MAGENES et G. STAMPACCHIA. I. problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico, *Annali Scuola Norm. Sup. Pisa,* III, 12 (1958), pp. 247-357.

[18′] J. NEČAS. Sur les solutions des équations elliptiques aux dérivées partielles du second ordre avec intégrale de Dirichlet non bornée, *Journal Tchecoslovque de Math.* t. 10 (85) (1960), pp. 283-298.

[18 *bis*] L. NIRENBERG. Remarks on strongly elliptic partial differential equations, *Comm. Pure Applied Math.*, 8 (1955), pp. 648-674.

[19] J. PEETRE. Théorèmes de régularité pour quelques classes d'opérateurs différentiels, *Lund Université*, 1959.

[19 *bis*] G. PRODI. Tracce di funzioni con derivata di ordine l..., *Rend. Sem. Mat. Padova,* 28 (1958), pp. 402-452.

[20] M. SCHECHTER. Solution of the Dirichlet problem for systems not necessarily strongly elliptic, *Comm. Pure Applied. Math.*, 12 (1959), pp. 241-247.

[20 *bis*] M. SCHECHTER. General boundary value problems for elliptic partial differential equations, *Comm. Pure Applied Math.* XV (1959), pp. 457-486.

[21] L. SCHWARTZ. *Théorie des distributions*, Paris, Hermann, t. I, 1950 (2e édition, 1957); t. II, 1951.

[22] L. SCHWARTZ. Les travaux de Gårding sur le problème de Dirichlet, *Séminaire Bourbaki*, mai 1952.

[22 *bis*] L. SCHWARTZ. Théorie des distributions à valeurs vectorielles (I), (II), *Annales Inst. Fourier*, t. VII (1957), pp. 1-139; t. VIII (1958), pp. 1-209

[23] L. N. SLOBODETSKII. Évaluations dans L^p des solutions de systèmes elliptiques, *Doklady Akad. Nauk.* t. 123 (1958), pp. 616-619.

[24] S. L. SOBOLEV. *Applications de l'analyse fonctionnelle à la Physique Mathématique*, Leningrad, 1950.

[25] I. M. VISIK et L. A. LUSTERNIK. Solution de certains problèmes de perturbation (I), *Ouspechi Mat. Nauk*, t. 15 (93) (1960), pp. 3-80.

[26] I. M. VISIK et S. L. SOBOLEV. Nouvelle formulation générale des problèmes aux limites, *Doklady Akad. Nauk*, t. 111 (1956), pp. 521-523.

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
11 (1961), 179-183.

SUR DES INVARIANTS INTÉGRAUX DE CHAMPS ENLACÉS

par Joseph WEIER (Fribourg Br.)

Étant donnés V une variété différentiable, f un champ de r-plans tangents et g un champ de s-plans tangents à V avec $r \geq s$, nous dirons que f et g sont « *enlacés* » s'il est impossible de déformer les champs f, g en des champs f', g' de manière que $g(p) \subset f(p)$ pour tous les points $p \in$ V. A quelles conditions les champs f et g sont-ils enlacés? C'est cette question que traite notre note. M. le Professeur R. Thom a bien voulu lire une première version de mon manuscrit et m'a suggéré différentes généralisations. Je lui en exprime ma très vive gratitude.

1. Un premier système invariant. — Soient R un espace numérique et r, n des entiers avec $1 \leq r < n$, V une n-variété différentiable compacte orientée plongée dans R, f un champ de r-plans tangents orientés et g un champ de directions tangentes à V.

On peut supposer: l'ensemble, A, de tous les points $p \in$ V satisfaisant $g(p) \subset f(p)$ est un r-polyèdre fini; l'ensemble, B, de tous $p \in$ V où $g(p)$ est orthogonal à $f(p)$ est un $(n\text{-}r)$-polyèdre fini. Par (A, f, g) est déterminé (voir la deuxième section) un r-cycle, z, à coefficients entiers, par (B, f, g) un $(n-r)$-cycle, ζ, de même à coefficients entiers. Si $z \not\sim 0$, alors les champs f et g sont sûrement enlacés. Il est donc impossible de déformer g en un champ g' tel que $g'(p) \subset f(p)$ pour tout point p.

Alors soit $z \sim 0$. Deux $(r+1)$-chaînes, x_1 et x_2, de V avec $\partial x_1 = \partial x_2 = z$ seront dites appartenir à la même classe d'équivalence par rapport à z si $x_1 - x_2 \sim 0$. Soient $X_1, X_2, \ldots$ les classes d'équivalence obtenues de cette manière. Alors toute paire (X_i, ζ) définit, univoquement modulo les cycles homologues à zéro, un 1-cycle d'intersection, $S(i)$.

Si maintenant $\omega_1, \omega_2 \ldots$, forment une base des 1-formes différentielles closes sur V, alors les nombres

$$\omega_{ij} = \int_{S(i)} \omega_i, \quad i = 1, 2, \ldots, j = 1, 2, \ldots,$$

sont univoquement déterminés par les classes d'homotopie de f et g au sens suivant : Si l'on déforme f, g en des champs f', g' et si ω'_{ij} sont des nombres appartenant à (f', g') qui correspondent aux ω_{ij}, alors on peut supposer les ω'_{ij} munies d'indices de façon que $\omega_{ij} = \omega'_{ij}$ pour toute paire (i, j) avec $i \leq m$ et que $\omega_{ij} = 0$, $\omega'_{ij} = 0$ pour $i > m$.

2. Une caractérisation numérique de l'enlacement. — Au lieu des classes d'homotopie de champs de directions envisagées ci-dessus, on peut aussi prendre pour base des classes d'homologies : Soient g, g' deux champs de direction tangents à V. Alors il existe une homotopie $\{g^\tau\}$ de g en g' telle que chacun des champs g^τ possède au plus un nombre fini de singularités et que l'ensemble de toutes les paires (p, τ), où p est singularité de g^τ, représente un 1-polyèdre fini, P. Ce dernier polyèdre est donc situé dans le cylindre ouvert $V \times (0,1)$. Soient s_i les 1-simplexes orientés d'une décomposition simpliciale de P, s_j un des s_i et t un n-simplexe situé en $V \times (0,1)$ orthogonal à s_j et orienté par $V \times (0,1)$ et s_j. Alors $g^\tau(p)$ est, pour tout point $(p\,\tau)$ de la $(n-1)$-sphère ∂t, un demi-rayon tangent à V. On obtient donc une transformation de la $(n-1)$-sphère ∂t dans la $(n-1)$-sphère de direction au point p. Soit b_j le degré de cette transformation. Alors $\Sigma b_i s_i$ est un 1-cycle. S'il existe une homotopie de g en g', dont le 1-cycle ainsi construit est homologue à zéro, alors nous dirons que g et g' appartiennent à la même classe d'homologie.

Pour définir le cycle z de la première section, soient de nouveau s_i les r-simplexes orientés d'une décomposition simpliciale de A, s_j un des s_i et t un petit $(n-r)$-simplexe en V

orthogonal à s_j et orienté par (V, s_j). Pour tout $p \in V$, soit $f^*(p)$ le $(n-r)$-plan orthogonal à $f(p)$ et tangent à V au point p. Soit $f^*(p)$ orienté par la paire $(V, f(p))$. Alors $g(p)$ est, pour tout $p \in \partial t$, non orthogonal à $f^*(p)$. C'est pourquoi la projection orthogonale, $g^*(p)$, de $g(p)$ sur $f^*(p)$ est un demi-rayon en $f^*(p)$, non pas un point. Le simplexe t étant suffisamment petit, on peut supposer que tous les plans $f(p)$ avec $p \in t$ sont parallèles l'un à l'autre. Par suite, $g^*|\partial t$ détermine une transformation de la $(n-r-1)$-sphère ∂t dans une $(n-r-1)$-sphère de vecteurs. Soit de nouveau b_j le degré de cette transformation. Alors on a $z = \Sigma b_i s_i$.

Le cycle ζ se définit de façon analogue.

3. Sur la structure plus fine de la situation mutuelle. — Comme plus haut, soient V une n-variété différentiable compacte orientée plongée dans un espace numérique, r un entier positif $< n$, f un r-champ orienté et g un 1-champ orienté tangent à V. Soient à nouveau l'ensemble de tous les points $p \in V$ avec $g(p) \subset f(p)$ un r-polyèdre, A, et l'ensemble de tous $p \in V$ satisfaisant $g(p) \perp f(p)$ un $(n-r)$-polyèdre, B. Comme plus haut, soient z le cycle défini par (A, f, g) et ζ celui déterminé par (B, f, g).

Soient A_1, A_2,... les composantes connexes du polyèdre A et z_h^* le cycle $z|A_h$. Deux z_h^*, désignés par z_i^* et z_j^*, seront dits appartenir à la même « *composante d'homotopie* » au sens de M. J. Nielsen (voir par exemple [2] et [3]) s'il existe un ensemble, W, ouvert par rapport à V satisfaisant à

$$A_i \cup A_j \subset W \qquad \text{et} \qquad (A_h \cup B) \cap \overline{W} = 0 \quad \text{pour tout} \quad h \neq i, j$$

tel que l'on peut, sans changement sur $V - W$, déformer f, g en des champs f', g' qui jouissent de la propriété : l'ensemble de tous les points $p \in W$ avec $g'(p) \subset f'(p)$ est un polyèdre fini connexe.

Soient z_1, z_2, ... les composantes d'homotopie de z et ζ_1, ζ_2, ..., les composantes d'homotopie de ζ. Soient z'_1, z'_2, ... celles des z_i homologues à zéro. Rangeons deux $(r+1)$-chaînes, x_1 et x_2, à coefficients entiers satisfaisant $\partial x_1 = \partial x_2 = z'_h$ dans la même classe d'équivalence par rapport à z'_h si $x_1 - x_2 \sim 0$. De cette manière, les $(r+1)$-chaînes x avec $\partial x = z'_h$ se décomposent

en des classes d'équivalence, X_{h1}, X_{h2}, ..., relativement à z'_h. Toute paire

$$(X_{hi}, \zeta_j)$$

définit, à des chaînes homologues à zéro près, un 1-cycle d'intersection, $S(h, i, j)$.

Soient ω_1, ω_2, ... les formes différentielles définies en la première section. Alors le système des nombres

$$\omega_{hijk} = \int_{S(h,i,j)} \omega_k,$$

$h = 1, 2, ..., i = 1, 2, ..., j = 1, 2, ..., k = 1, 2, ...$, est univoquement défini par les classes d'homotopie de f et g au sens suivant :

Si f' est homotope à f et g' homotope à g et si les ω'_{hijk} forment un système appartenant à (f', g'), alors on peut supposer les ω'_{hijk} munies d'indices tels que l'on a : $\omega'_{hijk} = \omega_{hijk}$ *pour tout quadruple* (h, i, j, k) *de façon que* ω_{hijk} *et* ω'_{hijk} *est définie,* $\omega_{hijk} = 0$ si ω'_{hijk} n'est pas définie, $\omega'_{hijk} = 0$ si ω_{hijk} n'est pas définie.

De plus soient α_h une forme différentielle duale à z_h au sens du théorème d'isoporphisme de M. G. DE RHAM [1] et β_i une telle duale à ζ_i. Alors les nombres

$$\Omega_{hi} = \int_V \alpha_h \wedge \beta_i$$

sont uniquement déterminés au sens suivant : les Ω'_{hi} étant des nombres d'espèce analogue appartenant à (f', g'), alors le système des Ω'_{hi} est, à des zéros et des permutations près, égal au système des Ω_{hi}.

Les champs f et g sont sûrement enlacés si $\omega_{hijk} \neq 0$ *pour au moins un quadruple* (h, i, j, k) *ou si* $\Omega_{hi} \neq 0$ *pour au moins une paire* (h, i).

Dans le cas général où g est un s-champ, on obtient, au lieu des cycles z et ζ définis plus haut, des cycles à coefficients locaux pris dans des groupes d'homotopie de variétés grassmanniennes (voir par exemple [4]). L'application du théorème d'isomorphisme de M. G. DE RHAM n'est plus possible maintenant sans constructions auxiliaires.

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. V. D. Hodge, The theory and applications of harmonic integrals, *Cambridge*, 87-101 (1952).
[2] J. Nielsen, Untersuchungen zur Topologie zweiseitiger Flächen I, II, *Acta Mathem.* 50, 189-358 (1927), 53, 1-76 (1929).
[3] J. Nielsen, Surface transformation classes of algebraically finite type, *Kgl. Dänische Akad. Wiss.* 21, 1-89 (1944).
[4] N. E. Steenrod, The topology of fibre bundles, *Princeton Mathem. Series* 12 (1957).

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
11 (1961), 185-200.

SUR LES STRUCTURES FEUILLETÉES DE CO-DIMENSION UN ET SUR UN THÉORÈME DE M. A. DENJOY

par **Georges REEB** (Grenoble).

INTRODUCTION

Dans son célèbre mémoire [1] A. DENJOY étudie, sur le tore T^2, les trajectoires de l'équation différentielle

$$(1) \qquad d\varphi - F(\varphi, \theta)\, d\theta = 0$$

où $\qquad F(\varphi + 1, \theta) = F(\varphi, \theta + 1) = F(\varphi, \theta).$

L'auteur rappelle la classification classique des trajectoires en *trajectoires propres*, *trajectoires (localement) partout denses* et *trajectoires exceptionnelles;* à la suite d'autres auteurs il indique des exemples d'équations (1) comportant des trajectoires exceptionnelles. Mais le résultat spectaculaire du mémoire [1] est le

THÉORÈME 1. — *Si la fonction* $F(\varphi, \theta)$ *est de classe* C_2, *l'équation* (1) *n'admet aucune trajectoire exceptionnelle.*

La démonstration de Denjoy reprise par SIEGEL [2] devient parfaitement concise et limpide, dépouillée de tout accessoire technique.

Si on veut étendre les notions ou les résultats précédents aux dimensions supérieures on est amené naturellement soit à l'étude des trajectoires d'un système ordinaire d'équations différentielles soit à l'étude des variétés intégrales d'une équation de Pfaff complètement intégrable (ou si on préfère, à l'étude d'une structure feuilletée de co-dimension 1). Or il est bien connu que la première généralisation proposée se heurte à des difficultés insurmontables. Par contre, dès que le pro-

blème est formulé, il apparaît avec évidence que les démonstrations de Denjoy et Siegel se transposent aux structures feuilletées de co-dimension un. L'objet du présent travail consiste précisément à étendre le théorème 1 à une classe de structures feuilletées de co-dimension un suffisamment générale, à notre avis, pour retenir l'attention.

Les feuilles d'une structure feuilletée de co-dimension un se classent naturellement en *feuilles propres*, *feuilles localement partout denses* et *feuilles exceptionnelles*. D'où la conjecture suivante : *une structure feuilletée de co-dimension un et de classe C_2 n'admet pas de trajectoires exceptionnelles.*

Nous sommes évidemment loin d'établir cette conjecture dans toute sa généralité ou de l'infirmer par la donnée d'un exemple approprié. Mais nous pensons qu'il y a quelque espoir de résoudre ce problème.

Pour souligner l'importance de la conjecture nous remarquerons ceci : si la conjecture se trouvait être vérifiée alors la forme suivante du théorème de Poincaré-Bendixon serait valable :

Toute feuille propre γ d'une structure feuilletée de classe C_2 et de co-dimension un, dont l'adhérence $\bar{\gamma}$ est compacte, contient une feuille compacte dans son adhérence [3, p. 109].

Afin d'éviter les détails techniques et pour suivre aussi fidèlement que possible l'exposé de Siegel nous porterons notre attention, dans les cinq premiers paragraphes, uniquement sur les structures feuilletées de type Γ, définies de la façon suivante :

On donne le tore T^2 à deux dimensions (repéré à l'aide des coordonnées habituelles θ, φ définies mod. 1) et l'intervalle $I = [0, 1]$ (repéré par l'abscisse x), on désigne par V_3 la variété à bords $V_3 = T^2 \times I$. La structure feuilletée Γ est définie par une équation de Pfaff complètement intégrable et de classe C_1 :

$$\omega \equiv dx + A(\theta, \varphi, x)\, d\theta + B(\theta, \varphi, x)\, d\varphi = 0 \tag{2}$$

où $A(\theta, \varphi, 0) = A(\theta, \varphi, 1) = B(\theta, \varphi, 0) = B(\theta, \varphi, 1) = 0$

et où A, B sont des fonctions périodiques, de période 1, par rapport à φ et θ.

Les bords $T^2 \times \{0\}$ et $T^2 \times \{1\}$ sont des feuilles de cette structure.

Les structures de type Γ correspondent à la situation la plus simple qui généralise, aux dimensions supérieures, la situation envisagée par Denjoy. Pour les structures de type Γ nos résultats sont faciles à énoncer et il est possible d'aller tout à fait au fond des choses. Les extensions à des situations plus générales sont immédiates et nous les exposerons à la fin de ce travail aux paragraphes 6 et 7.

Voici finalement une remarque banale, mais qui nous a servi de point de départ :

Considérons dans le produit topologique $V_{n-1} \times T$ d'une variété V_{n-1} compacte, dont le groupe de Poincaré est isomorphe au groupe additif Z des entiers rationnels, et du cercle trigonométrique T une structure feuilletée, de classe C_2, transversale aux fibres T. Dans ces conditions les démonstrations de Denjoy-Siegel montrent, *sans autre raisonnement*, que toutes les feuilles sont partout denses, à moins qu'il n'y ait au moins une feuille compacte, auquel cas toutes les feuilles sont propres. D'ailleurs si on supprime l'hypothèse d'après laquelle le groupe de Poincaré de V_{n-1} est isomorphe à Z, mais si on suppose que toutes les feuilles sont homéomorphes au revêtement universel, supposé non compact, de V_{n-1} alors on peut affirmer que toutes les feuilles sont partout denses.

On conviendra probablement que les deux résultats précédents, obtenus sans frais à partir des résultats de Denjoy étaient de nature à encourager les recherches exposées ici.

Un simple coup d'œil sur les formules du paragraphe 7. montre que nos démonstrations sont copiées textuellement sur [2]. Il d'ailleurs est à peu près indispensable de lire [2] avant d'aborder la lecture de nos démonstrations.

Le présent travail met une fois de plus en évidence le rôle privilégié qui revient aux structures feuilletées de co-dimension un dans la classe des structures feuilletées de co-dimension quelconque.

1. — Généralités sur les structures feuilletées de type Γ.

Reprenons l'étude des structures feuilletées de type Γ, définies par l'équation (2) de l'introduction, sur $T^2 \times I$. Appelons α et β deux générateurs du groupe de Poincaré G

de T. On pourra supposer que α admet comme représentant un chemin fermé $\bar{\alpha}$ tracé le long du méridien $\theta = 0$ et que β admet comme représentant un chemin fermé $\bar{\beta}$ tracé le long du parallèle $\varphi = 0$.

La construction suivante est classique :

A l'élément α associons l'homéomorphisme (α) de I sur I, qui laisse fixes $\{0\}$ et $\{1\}$, défini de la façon suivante :

$\{0, 0, t(\alpha)\}$ est l'extrémité du chemin tracé dans la feuille contenant $\{0, 0, t\}$ ayant $\{0, 0, t\}$ pour origine et se projetant selon $\bar{\alpha}$ par l'application canonique de $T^2 \times I$ sur T^2. Ici $t(\alpha)$ désigne le transformé de t par (α).

On associe de même à β un homéomorphisme (β) de I sur I.

Ces homéomorphismes (α) et (β) ne dépendent pas du choix des représentants $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ de α et β. Si à l'élément $\alpha^\lambda\beta^\mu$ de G nous associons l'homéomorphisme $(\alpha)^\lambda(\beta)^\mu = [\lambda, \mu]$ nous aurons défini G comme groupe (abélien) de transformations topologiques de I. Les propriétés topologiques des feuilles se reflètent dans les propriétés topologiques des trajectoires de ce groupe G de transformations.

Les notations suivantes sont commodes et classiques :

$p[\lambda, \mu]$ désigne le transformé du point p de I par

$$[\lambda, \mu] = (\alpha)^\lambda(\beta)^\mu.$$

pG désigne donc la trajectoire de p.

Si $\alpha \in G$ alors α' désigne l'inverse de α.

Les trajectoires pG sont habituellement classées dans les types suivants (cf. Introduction) :

(i) trajectoires propres (ou discrètes),

(ii) trajectoires localement partout denses,

(iii) trajectoires exceptionnelles.

(Rappelons que les *trajectoires exceptionnelles sont celles dont l'adhérence est un ensemble parfait totalement discontinu*).

Les feuilles sont classées en feuilles propres, localement partout denses ou exceptionnelles, selon que les trajectoires correspondantes appartiennent aux classes (i) (ii) ou (iii).

On désignera par Gp le sous-groupe de G qui laisse invariant le point p de I. La feuille γp contenant $(0, 0, p)$ est un revêtement de T^2, associé à la projection canonique π de $T^2 \times I$ sur T^2. On notera que Gp est le groupe qui caractérise le revêtement $(\gamma p, \pi)$ de T^2.

Une suite $p[n\lambda, n\mu]$ où p, λ, μ sont fixes, tandis que n décrit l'ensemble des entiers naturels $\mathbf{Z}$, est manifestement constante ou monotone (il s'agit là d'une propriété bien connue des itérés d'un homéomorphisme de I sur I). Il en résulte :

$\mathbf{G}p$ est isomorphe à $\{0\}$, $\mathbf{Z}$ ou $\mathbf{Z}^2$;

et d'une façon plus précise :

$\mathbf{G}p$ est soit le groupe $\{0\}$;
soit le groupe engendré par un seul élément $[\lambda, \mu]$; $\lambda, \mu \in \mathbf{Z}$ et (λ, μ) premiers entre eux;
soit le groupe $\mathbf{G}$.

Cette dernière propriété a pour corollaire :
Les feuilles sont homéomorphes :

soit au plan R^2;
soit au cylindre $\mathrm{R} \times \mathrm{T}$;
soit au tore T^2.

On désignera par pq, où $p, q \in \mathrm{I}$ et $p \neq q$, le segment d'extrémités p, q si $p < q$ et le complémentaire de ce segment si $p > q$. L'écriture $p/q/r$ signifie $q \in pr$ et $q \neq p$, $q \neq r$.

2. — Feuilles spéciales.
Structures feuilletées sans feuilles spéciales.

Définition 1. — *La trajectoire de* $p \in \mathrm{I}$ *est dite spéciale si pour tout* $[\lambda, \mu]$ *tel que* $p[\lambda, \mu] \neq p$ *il existe* $[\lambda', \mu']$ *tel que :*

$$p/p[\lambda', \mu']/p[\lambda, \mu].$$

Il convient de remarquer que la notion de trajectoire spéciale ne dépend pas du choix particulier du point p sur cette trajectoire.

Une feuille est dite spéciale si elle correspond à une trajectoire spéciale.

Une feuille non propre est spéciale. Une feuille propre peut être une feuille spéciale.

On remarquera que si $\mathbf{G}p$ est isomorphe à $\mathbf{Z}$ alors la trajectoire de p n'est pas spéciale.

Définition 2. — *Une trajectoire ou une feuille est dite cyclique, si cette trajectoire ou cette feuille n'est pas spéciale.*

Théorème 2. — *Soit q un point de* I, *dont la trajectoire* $q\mathrm{G}$ *est cyclique et tel que* $\mathrm{G}q = 0$; *il existe un point p de* I, *contenu dans l'adhérence* $\overline{q\mathrm{G}}$ *de* $q\mathrm{G}$ *tel que* $\mathrm{G}p$ *soit isomorphe à* $\mathbf{Z}$.

Corollaire 1. — *Une structure feuilletée* (*de type* Γ) *qui contient une feuille* γ *cyclique homéomorphe à* R^2, *contient une feuille* ε *homéomorphe à* $\mathrm{R} \times \mathrm{T}$ *et contenue dans l'adhérence de* γ.

Corollaire 2. — *Une structure feuilletée* (*de type* Γ) *vérifiant la condition* $\mathrm{G}p = 0$ *pour tout point p de* I, *autre que* $\{0\}$ *ou* $\{1\}$, *ne contient que des feuilles spéciales.*

La démonstration du théorème est fort simple. Il suffit d'examiner le cas où les bords $\mathrm{T}^2 \times \{0\}$ et $\mathrm{T}^2 \times \{1\}$ sont les seules feuilles compactes. Soit p un point tel que $\mathrm{G}p = \{0\}$. Si $p\mathrm{G}$ est cyclique on peut associer à tout point q de $p\mathrm{G}$ un point q' de $p\mathrm{G}$ $(q \neq q')$ tel qu'il n'y ait aucun autre point q'' appartenant à $p\mathrm{G}$ et situé entre q et q'. Il existe $[\lambda, \mu] \in \mathrm{G}$ tel que $q' = q[\lambda, \mu]$. La suite $q[n\lambda, n\mu]$, $n \in \mathbf{Z}$ est strictement monotone. Si cette suite converge vers r, $r \in \mathrm{I}$, $(r \neq 0$ et $r \neq 1)$ alors $r[\lambda, \mu] = r$ et par conséquent $\mathrm{G}r \neq 0$. Comme $r\mathrm{G} \neq r$ la conclusion du théorème en résulte. Si la suite $q[n\lambda, n\mu]$ converge vers 0 ou 1, cette suite épuise $p\mathrm{G}$ et par conséquent le groupe quotient $\mathrm{G}/\mathrm{G}p$ est engendré par l'élément associé à $[\lambda, \mu]$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $\mathrm{G}p = 0$.

On construit facilement des exemples de structures feuilletées (de type Γ), de classe C_∞, ne contenant que des feuilles cycliques, dont certaines feuilles sont homéomorphes à R^2. Le théorème 5 ci-dessous affirme qu'il n'existe pas de structure feuilletée analytique ayant cette propriété.

Le théorème 3 est une réciproque à peu près évidente du théorème 2. Nous ne démontrerons pas cette réciproque.

Théorème 3. — *Soit une structure feuilletée* (*de type* Γ) *contenant au moins une feuille homéomorphe au cylindre* $\mathrm{R} \times \mathrm{T}$, *mais ne contenant pas de feuille compacte* (*autre que* $\mathrm{T}^2 \times \{0\}$ et $\mathrm{T}^2 \times \{1\}$). *Toutes les feuilles de cette structure sont cycliques.*

On remarquera que les théorèmes 2 et 3 ont leurs analogues dans la situation étudiée par Denjoy. (Dans ce dernier cas l'existence d'une feuille compacte est équivalente au fait que toutes les feuilles sont cycliques).

3. — Lemme préparatoire.

Lemme 1. — *Considérons un segment pq dont l'extrémité p appartienne à une trajectoire spéciale et tel que* $pq \cap p\mathrm{G} = \{p\}$ *et* $pq \cap q\mathrm{G} = \{q\}$. *A tout entier* $\mathrm{N}(\mathrm{N} > 0)$ *on peut associer un élément* $[\lambda, \mu]$ *de* G *tel que* (i) $|\lambda| + |\mu| > \mathrm{N}$ *et* (*ii*) *les segments* $p\omega q[\lambda, \mu]\omega$ *soient deux à deux disjoints lorsque* ω *parcourt la suite finie* $\{[\eta, 0], \ldots, [-\lambda, 0], [-\lambda, \bar{\eta}], \ldots, [-\lambda, -\mu]\}$ *les éléments de cette suite seront notés (sans ambiguïté)*: $[1]$, $[2]$, $\ldots$, $[n]$ *où* $n = |\lambda| + |\mu|$. *(Ici,* $|\eta| = |\bar{\eta}| = 1$ *et* η, $\bar{\eta}$ *ont respectivement le même signe que* $-\lambda$ *et* $-\mu$*)*.

Pour établir ce lemme considérons les segments $pp[\alpha, \beta]$ où $|\alpha| + |\beta| \leqslant \mathrm{N}$ et choisissons parmi ces segments le plus court (il n'y a aucune ambuiguïté); soit pps ce segment ($s \in \mathrm{G}$). Comme la trajectoire de p est spéciale il existe des éléments $[\sigma, \theta]$ tels que :

$$p/p[\sigma, \theta]/ps.$$

On désignera par $[\lambda, \mu]$ celui de ces éléments $[\sigma, \theta]$ pour lequel $|\sigma| + |\theta|$ est le plus petit (il peut y avoir ambiguïté, mais dans ce cas $[\lambda, \mu]$ sera l'un de ces éléments). L'élément $[\lambda, \mu]$ a bien les propriétés énoncées au lemme 1; en effet $|\lambda| + |\mu| = n > \mathrm{N}$ d'après la définition de ps. Si les segments $p[k]q[\lambda, \mu]\,[k]$ $(k = 1, \ldots, n)$ n'étaient pas disjoints deux à deux, il existerait $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$ tels que :

$$(1) \qquad p[i]/p[j]/q[\lambda, \mu]\,[i].$$

Désignons par $[i]'$ l'inverse de $[i]$, la relation (1) implique

$$(2) \qquad p/p[j][i]'/q[\lambda, \mu]$$

et (2) implique à son tour

$$(3) \qquad p/p[j][i]'/p[\lambda, \mu]$$

car les segments $p\sigma q\sigma$, ($\sigma \in \mathrm{G}$) sont disjoints (à moins qu'ils ne soient confondus). Or la relation (3) est en contradiction avec la définition de $[\lambda, \mu]$ puisque $[j][i]' = [\alpha, \beta]$ où

$$|\alpha| + |\beta| < n.$$

Ceci établit le lemme.

4. — Le lemme fondamental.

Lemme fondamental. — *L'existence d'un segment pq dont l'extrémité p appartienne à une trajectoire spéciale et tel que* $pq \cap p\mathrm{G} = \{p\}$ *et* $pq \cap q\mathrm{G} = \{q\}$ *est incompatible avec l'hypothèse suivante* : (H) *la structure feuilletée étudiée est de classe* C_2.

Pour démontrer ce lemme on remarquera d'abord que l'hypothèse (H) implique : les homéomorphismes (α) et (β) sont de classe C_2. On désignera par $D(\varphi, p)$ la dérivée de la fonction φ en p; la fonction réciproque de φ est notée φ'. Soit δ_0 la longueur du segment pq et $\delta\omega (\omega \in \mathrm{G})$ la longueur du segment $p\omega q\omega$. Les deux segments $p\omega q\omega$ et $p\overline{\omega} q\overline{\omega}$ sont disjoints si $p\omega \neq p\overline{\omega}$ ou $q\omega \neq q\overline{\omega}$. Les segments $p\alpha q\alpha$, $\alpha \in \mathrm{G}$ forment une famille infinie de segments deux à deux disjoints. La somme des longueurs de ces segments est inférieure à 1. On peut donc trouver une suite d'éléments $[\lambda_1, \mu_1], \ldots, [\lambda_r, \mu_r] \ldots$ ou λ_r et μ_r sont positifs, telle que ces éléments $\omega_r = [\lambda_r, \mu_r]$ vérifient les conclusions du lemme 1 de 3, c'est-à-dire telle que les segments $p\omega q[\lambda_r, \mu_r]\omega$ soient disjoints si ω parcourt la suite $[-1, 0], \ldots, [-\lambda_r, 0], [-\lambda_r, -1], \ldots, [-\lambda_r, -\mu_r]$ (suite notée $[1], \ldots, [n_r]$ où $n_r = |\lambda_r| + |\mu_r|$).

Or d'après le théorème des accroissements finis :

$$\mathrm{Log}\, \delta_0/\delta[\lambda_r, \mu_r] = -\sum_{1}^{n_r} \mathrm{Log}\, D(\varphi_k, \varepsilon[k-1]') + \mathrm{Log}\, \delta_0,$$

où $\varphi_k = (\alpha)$ si $[k]$ est de la forme $[\sigma, 0]$ et $\varphi_k = (\beta)$ si $[k]$ est de la forme $[\sigma, \overline{\sigma}]$ ($|\overline{\sigma}| > 0$), et où $\varepsilon \in pq$; de plus $[0]$ désigne l'élément neutre de G.

De même :

$$\mathrm{Log}\, \delta_0/\delta[-\lambda_r, -\mu_r] = -\sum_{0}^{n_r-1} \mathrm{Log}\, D(\varphi'_{n_r-k}, \overline{\varepsilon}[k]) + \mathrm{Log}\, \delta_0$$

où $\overline{\varepsilon} \in pq$.

Compte tenu de la relation

$$D(h', \eta) . D(h, h'(\eta)) = 1$$

on en déduit

$$(1) \quad \mathrm{Log}\, \delta_0^2/\delta[\lambda_r, \mu_r] . \delta[-\lambda_r, -\mu_r]$$
$$= \sum_{0}^{n_r-1} [\mathrm{Log}\, D(\varphi_{n_r-k}, \overline{\varepsilon}[k+1]) - \mathrm{Log}\, D(\varphi_{n_r-k}, \varepsilon[\lambda_r, \mu_r][n_r-(k+1)])].$$

Il résulte du lemme 1 que le second membre de (1) est borné, en module; par la somme de variations totales des dérivées logarithmiques de (α) et (β). Le premier membre de (1) est susceptible de prendre des valeurs arbitrairement grandes; cette incompatibilité établit le lemme 1.

5. — Applications du lemme fondamental.

Théorème 4. — *Une structure feuilletée* (de type Γ) *de classe* C_2 *n'admet aucune feuille exceptionnelle.*

Il est clair qu'il existe des structures feuilletées (de type Γ) de classe C_0 admettant des feuilles exceptionnelles.

Corollaire. — *Une structure feuilletée (de type* Γ*) de classe* C_2 *dont toutes les feuilles autres que les bords* $T_2 \times \{0\}$ *et* $T^2 \times \{1\}$, *sont homéomorphes à* R^2 *ne comporte que des feuilles partout denses (à l'exception des deux bords).*

Le théorème 4 résulte du lemme fondamental. En effet si la structure feuilletée admettait une trajectoire exceptionnelle il existerait un point r de I tel que l'adhérence $\overline{rG}$ de la trajectoire rG soit un ensemble parfait totalement discontinu. Il existerait un segment pq (dont les extrémités p et q soient distinctes de 0 et 1) tel que $pq \cap \overline{rG} = \{p, q\}$. De plus on peut supposer que la trajectoire de p est spéciale; (en effet d'après le théorème 3 l'ensemble des points de I admettant une trajectoire spéciale est un ouvert). Il suffit d'appliquer le lemme fondamental pour établir le théorème 4.

Les résultats précédents peuvent être précisés de bien des manières, en voici quelques exemples. Soit une structure feuilletée (de type Γ) possédant une feuille homéomorphe à $R \times T$; il y a donc un point p de I tel que Gp soit engendré par un seul élément $[\lambda, \mu] \neq 0$; on peut d'ailleurs se ramener au cas où $[\lambda, \mu]$ est précisément $[1, 0]$ par un choix convenable des générateurs de G. La suite des points $p[0, n]$ tend vers un point limite p'. Le groupe $Gp[0, n]$ est également engendré par $[1, 0]$. Si on suppose maintenant que la structure feuilletée est analytique, les homéomorphismes (α) et (β) sont également analytiques. La transformation $p \rightarrow p[0, 1]$ est l'identité au

voisinage de p', car elle a une infinité de points fixes au voisinage de p'. On en déduit le

THÉORÈME 5. — *Une structure feuilletée (de type* Γ*) analytique admettant des feuilles homéomorphes à* R^2 *possède des feuilles localement partout denses.*

En particulier une structure feuilletée (de type Γ) analytique, n'admettant pas d'autres feuilles compactes que les bords $T^2 \times \{0\}$ et $T^2 \times \{1\}$, admet uniquement des feuilles partout denses (à l'exception des bords) à moins que toutes les feuilles ne soient homéomorphes à $R \times T$.

6. — Extension des résultats précédents. (Groupe fondamental abélien).

Il va sans dire que *tous* les résultats précédents restent valables moyennant quelques légères modifications, d'ailleurs évidentes, des énoncés mais sans qu'il y ait lieu d'apporter une modification quelconque aux démonstrations si on remplace T par une variété compacte V_n ayant le même groupe de Poincaré que T^2 et si on étudie dans $V_{n+1} = V_n \times I$ une structure feuilletée de co-dimension un vérifiant la propriété suivante Δ :

(Δ) $V_n \times \{0\}$ et $V_n \times \{1\}$ sont deux feuilles de la structure. Les feuilles sont transversales aux fibres $\{x\} \times I$.

D'ailleurs au prix de légères modifications on peut abandonner l'hypothèse d'après laquelle V_n est compacte.

Il est clair comment il convient de procéder pour étendre les résultats précédents à des structures feuilletées de type Δ sur $V_n \times I$ dans le cas où le groupe de Poincaré $\pi(V_n)$ de V_n est abélien (et admet un nombre fini de générateurs). Faisant opérer $\pi(V_n)$ sur I conformément à la construction expliquée en 1. le sous-groupe de torsion $\pi''(V_n)$ de $\pi(V_n)$ opère trivialement sur I. On est donc ramené au cas où le groupe qui opère sur I est un groupe abélien libre (ayant un nombre fini de générateurs); ce groupe sera désigné maintenant par G.

On définira, comme ci-dessus, Gp comme étant le sous-groupe de G laissant invariant p et on démontre le résultat

suivant, par un raisonnement analogue à celui qui établit le théorème 2 :

Si toutes les feuilles sont cycliques il existe une suite de points $p_1 \dots p_r$ tels que les sous-groupes $Gp_1, \dots, Gp_r$ aient respectivement $1, 2, \dots, r$ générateurs; où r est le maximum du rang des groupes Gp; de plus $Gp_1 \subset Gp_2 \subset \dots \subset Gp_r$. Le théorème 4 (et sa démonstration) s'étendent au cas envisagé. Le théorème 5 se généralise également.

Par contre lorsque le groupe de Poincaré $\pi(V_n)$ n'est pas abélien, les démonstrations précédentes sont compromises. Cependant on peut étendre à cette situation quelques-uns des résultats antérieurs. Nous en donnerons des exemples au prochain paragraphe en nous bornant à quelques cas essentiels.

7. — Extension au cas où G n'est pas un groupe abélien.

On étudie ici dans $V_n \times I$ une structure feuilletée de type Δ envisagé en 6; mais on ne supposee plus que le groupe de Poincaré $\pi(V_n)$ de V_n soit abélien. Le groupe $\pi(V_n)$ opère sur I. On désignera par $\pi'(V_n)$ le sous-groupe invariant de $\pi(V_n)$ qui laisse fixes tous les points de I. Le groupe quotient $\pi(V_n)/(\pi'(V_n)$ sera désigné par G (cette notation diffère légèrement de la notation adoptée antérieurement). Nous remarquerons que G opère dans I et qu'il ne contient aucun élément d'ordre fini; le groupe G a un nombre fini de générateurs si $\pi(V_n)$ a un nombre fini de générateurs, donc en particulier si V_n est compacte.

THÉORÈME 6. — *Supposons que la structure feuilletée étudiée soit de classe C_2 et que $Gp = 0$ pour tout point p de I ($p \neq 0$ et $p \neq 1$). Si G n'est pas un groupe cyclique alors toutes les feuilles (autres que $V_n \times \{0\}$ et $V_n \times \{1\}$) sont partout denses.*

Le groupe G opère sur I et les opérations de G sont de classe C_2. Pour établir le théorème 6, on reprendra pas à pas les démonstrations des paragraphes 3 et 4 en y apportant les modifications nécessitées par la non commutativité de G.

On introduira d'abord un système fini de générateurs Σ de G. (Le système Σ n'est pas nécessairement minimal.) Les éléments de Σ sont supposés rangés dans un ordre alphabétique.

Un élément σ de G peut se mettre sous la forme :

$$(1) \qquad \sigma = a_1 \ldots a_n \qquad a_i \in \Sigma \quad \text{ou} \quad a'_i \in \Sigma$$

et cette décomposition (1) est unique si on convient de choisir parmi toutes les décompositions possibles celles pour lesquelles l'entier r est le plus petit possible et en sélectionnant parmi ces dernières la première dans l'ordre lexicographique.

La suite des éléments a_i qui figure au second membre de (1) est désignée par $L(\sigma)$ tandis que l'entier n est désigné par $n(\sigma)$.

Étant donné un élément σ de G on pose les définitions suivantes, un peu différentes de celles qui ont été utilisées plus haut :

$$[i] = a_1 \ldots a_i \qquad [-i] = a'_n . a'_{n-1} \ldots a'_{n-i+1}$$

où $n(\sigma) = n$ et $L(\sigma) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Les hypothèses du théorème 1 impliquent : toutes les feuilles pG, $p \neq 0$ et $p \neq 1$, sont spéciales. (La démonstration est analogue à la démonstration du corollaire 2 du théorème 2).

Voici un lemme analogue au lemme 1 :

Lemme 1'. — *Soit pq un segment tel que $0 < p < q < 1$ et $pq \cap pG = \{p\}$ et $pq \cap pG = \{q\}$ A tout entier $N (N > 0)$ on peut associer un élément σ de G tel que $n(\sigma) = n > N$ et tel que les segments $p[-i]q[n-i]$ $(i = 1, \ldots, n)$ soient deux à deux disjoints.*

On considère les segments $pp\alpha$ ($\alpha \in G$ *et* $n(\alpha) \leqslant N$), ces segments sont en nombre fini ; on choisit le plus court de ces segments, soit pps ($s \in G$). Comme la trajectoire de p est spéciale il existe des éléments λ de G tels que

$$p/p\lambda/ps.$$

On désignera par σ celui de ces éléments λ pour lequel l'entier $n(\lambda)$ est le plus petit possible. L'élément σ a les propriétés énoncées au lemme 1'. En effet $n(\sigma) > N$ d'après la définition de ps. Si les segments $p[-i]q[n-i]$ n'étaient pas deux à deux disjoints il existerait $i, j (i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j)$ tels que

$$(1) \qquad p[-i]/p[-j]/q[n-i].$$

La relation (1) implique :

(2) $$p/p[-j][-i]'/q[n],$$

car $[n-i][i]' = [n] = \sigma$.

La relation (2) implique à son tour :

(3) $$p/p[-j][-i]'/p[n]$$

car les segments $p\alpha q\alpha$ sont distincts.

Le parallélisme avec la démonstration du lemme 1 cesse ici, en effet s'il est clair que $n([-i]'[-j]) < n$, il n'est pas du tout sûr que

(4) $$n([-j][-i]') \leqslant n.$$

En tout cas si (4) est vérifié, la relation (3) est en contradiction avec la définition de $p[n]$ et la conclusion du lemme 1′ est établie. Or (4) est vérifié si $i+j \leqslant n$.

Supposons maintenant $i + j > n$. Dans ce cas :

$$[-j][-i]' = a_n' \ldots a_{n-j+1}' a_{n-i+1} \ldots a_n = \sigma'\mu\sigma$$

où :

$$\mu = a_1 \ldots a_{n-j} a_{n-i}' \ldots a_1'.$$

Par conséquent :

(5) $$n(\mu) \leqslant n - i + n - j = 2n - (i+j) < n.$$

Or

$$p/p\sigma'\mu\sigma/p\sigma$$

implique :

(6) $$p\sigma'/p\sigma'\mu/p\sigma'\sigma$$

et (6) implique

(7) $$p/p\mu/p\sigma$$

en vertu de l'hypothèse $Gt = 0$ si $0 < t < 1$.

Mais (7) est en contradiction avec la définition de $p\sigma$, ce qui achève la démonstration du lemme 1′.

La démonstration du théorème 6 s'achève en remarquant qu'elle se ramène à la démonstration du lemme fondamental énoncé au paragraphe 4. La démonstration de ce lemme fondamental, dans le cas présent est analogue à la démonstration donnée au paragraphe 4. On pourra trouver une suite

$\sigma_1 \ldots \sigma_n \ldots$ d'éléments de G, telle qu'avec des notations évidentes calquées sur les notations du paragraphe 4, on ait les propriétés suivantes :

$$\delta(\sigma_n) \to 0 \quad \text{et} \quad \delta(\sigma'_n) \to 0 \quad \text{si} \quad n \to +\infty$$

chaque σ_n vérifie les conclusions du lemme 1′.

Le théorème des accroissements finis implique les égalités :

$$\operatorname{Log} \delta_0/\delta\sigma_r = -\sum_1^{n_r} \operatorname{Log} D((a_k)\varepsilon[k-1]) + \operatorname{Log} \delta_0$$

$$\operatorname{Log} \delta_0/\delta\sigma'_r = -\sum_0^{n_r-1} \operatorname{Log} D((a'_{n-k}),\ \bar{\varepsilon}[-k]) + \operatorname{Log} \delta_0.$$

Il en résulte :

$$\operatorname{Log} \delta_0^2/\delta\sigma_r.\delta\sigma'_r = -\sum_0^{n_r-1} \{\operatorname{Log} D((a'_k),\ \bar{\varepsilon}[n-k]) - \operatorname{Log} D((a'_k), \varepsilon[-k])\}.$$

On déduit de cette égalité, tout comme au paragraphe 4, une contradiction qui établit le théorème 6.

8. — Exemples.

Nous indiquons ici quelques exemples illustrant les résultats précédents.

Exemple 1. — On considère dans $V_n \times I$ une structure feuilletée de type Γ définie par l'équation :

$$r(r-1)\omega + dr = 0,$$

où ω est une forme fermée du type

$$\omega = df + \sum_{i=1}^{m} a_i\omega_i \qquad m \geqslant 2,$$

où les ω_i constituent une base du groupe de cohomologie de dimension 1 de V_n à coefficients entiers et où les a_i sont des coefficients réels rationnellement indépendants. (On pourra par exemple considérer le cas où $V_n = T^2$ et où $\omega = \alpha\, d\varphi + \beta\, d\theta$ où les nombres réels α et β sont incommensurables.)

Dans cet exemple toutes les feuilles, autres que $V_n \times \{0\}$ et $V_n \times \{1\}$ sont partout denses.

Exemple 2. — Dans $T^2 \times I$ nous considérons la structure feuilletée de type Γ définie par l'équation :

$$\omega \equiv \pi\, dr + (\sin \pi r)^2 [\sin(\theta + \cot \pi r)\, d\varphi - d\theta] = 0.$$

(On constate que ω est effectivement complètement intégrable car : $\dfrac{\omega}{(\sin \pi r)^2} \equiv -(dR + d\theta) + \sin(R + \theta)\, d\varphi$ où $R = \cot \pi r$).

Toutes les feuilles de cette structure sont cycliques, et certaines de ces feuilles sont homéomorphes à R^2. (Il y a donc, comme on le vérifie facilement, des feuilles homéomorphes à $R \times T$). On vérifie, conformément aux remarques antérieures, que la forme ω n'est pas analytique.

Exemple 3. — On part de l'exemple classique des trajectoires exceptionnelles sur le tore T^2. Ces trajectoires admettent une représentation paramétrique globale :

$$\varphi = \Phi(\theta, \varphi_0)$$

où Φ est une fonction continue définie, par exemple, dans le carré $0 \leqslant \dfrac{\varphi}{\theta_0} \leqslant 1$ et où $\Phi(0, \varphi_0) = \varphi_0$. Les surfaces définies dans $T^2 \times I$ par l'équation paramétrique :

$$\cot \pi r = \varphi - \Phi(\theta, \varphi_0)$$

sont les feuilles d'une structure de type Γ_1 admettant des feuilles exceptionnelles.

Exemple 4. — Les développements antérieurs suggèrent la question suivante :

On donne la variété $V_n \times I$ et dans le groupe de Poincaré $\pi(V_n)$ de V_n un sous-groupe invariant G' contenant en particulier les éléments d'ordre fini de $\pi(V_n)$. Existe-t-il une structure feuilletée de type Γ dans $V_n \times I$ telle que $Gp = G'$ pour tout p, $0 < p < 1$?

L'exemple 1 convenablement modifié montre que la réponse à cette question est affirmative si $G = \pi(V_n)/G'$ est abélien.

Mais la réponse à cette question est beaucoup plus difficile dans le cas général. Cependant il serait utile d'avoir par exemple une structure feuilletée de type Γ sur $V_2 \times I$ (où V_2 est une surface compacte orientable, de genre $k \geqslant 2$) dont toute les feuilles, à l'exception des bords, soient homéomorphes au revêtement universel R^2 de V_2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Denjoy, Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore. *J. Math. pures appl.* (9), 11, (1933), 333-375.

[2] C. L. Siegel, Note on differential equations on the torus. *Ann. of Math.*, 46, 423-428.

[3] G. Reeb, Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées. *Thèse Strasbourg* (1948). *Actualités scientifiques et industrielles*, 1183. Hermann, Paris (1952).

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
11 (1961), 201-312.

HOMOLOGIE NICHT-ADDITIVER FUNKTOREN. ANWENDUNGEN

von Albrecht DOLD und Dieter PUPPE.
(Columbia University, New York; Universität Saarbrücken)

EINLEITUNG

In dieser Arbeit sollen die in einer Note [11] angekündigten Ergebnisse ausführlicher dargestellt werden. Es wird also im Rahmen semi-simplizialer (= s.s.) Begriffsbildungen die Theorie der *derivierten Funktoren* (oder *Satelliten*) von additiven (s. [7]) auf beliebige Funktoren (zwischen abelschen Kategorien) verallgemeinert. Die wichtigsten Eigenschaften dieser Derivierten ergeben sich aus dem *Einhängungshomomorphismus* und der *Bar-Konstruktion*; das sind Konstruktionen, die wir aus der Topologie übertragen und verallgemeinern. Unsere Anwendungen, die in [11] noch nicht enthalten sind, liegen auf dem Gebiet der Topologie : *Homologieeigenschaften Eilenberg-MacLanescher Komplexe, Homotopie und Homologie symmetrischer Produkte.*

Im Gegensatz zu [11], wo wir uns auf Moduln beschränken, legen wir hier *beliebige abelsche Kategorien* zugrunde. Dies hat vor allem den Vorteil, daß wir im wesentlichen nur *kovariante* Funktoren *einer* Variablen und nur *Links*derivierte zu betrachten brauchen : Funktoren mehrerer Variabler bezw. kontravariante Funktoren und Rechtsderivierte werden durch Übergang zur Produktkategorie bezw. zur dualen Kategorie darauf zurückgeführt.

Im einzelnen ist die Arbeit wie folgt aufgeteilt. Die ersten drei Paragraphen enthalten Vorbereitungen und Hilfsmittel. In § 1 definieren wir *s.s. Homotopien* (allgemeiner einen *Funk-*

tionalkomplex) für s.s. Morphismen über einer beliebigen Kategorie $\mathfrak{C}$. Anwenden eines (kovarianten) Funktors $T : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ führt dann Homotopien in Homotopien über; dies ist eine leichte Verallgemeinerung eines Ergebnisses von D. Kan [19]. § 2 bringt eine Verallgemeinerung des Satzes von Eilenberg-Zilber, die wir Herrn P. Cartier verdanken. Diese Verallgemeinerung zeigt z.B., daß man im Satz von Eilenberg-Zilber das Tensorprodukt durch einen beliebigen (kovarianten) Funktor zweier Variabler ersetzen kann (s. 2. 10, i). Im 3. Paragraphen geben wir einen neuen und auf abelsche Kategorien verallgemeinerten Beweis für die Äquivalenz zwischen Kettenkomplexen und FD-Komplexen vgl. ([18], [9]).

Derivierte Funktoren, *Einhängung* und *Bar-Konstruktion* werden in § 4-9 behandelt. Kurz gesagt erhält man die Derivierten LT eines (evtl. nicht-additiven) Funktors T einfach so, daß man in der Konstruktion für den additiven Fall (s. [7]) alle Begriffe und Beweise durch ihre s.s. Analoga ersetzt; d.h. man nehme eine projektive s.s. Auflösung X von A und setze $L_qT(A) = H_q(TX) = q$—*te* Homologie von TX. Hierbei wird die Äquivalenz aus § 3 benutzt (und § 1). Es ist zu beachten, daß der Randoperator in TX von der Form

$$\Sigma(-1)^i T(\partial_i), \qquad \partial_i = \text{i-ter Seitenoperator in X},$$

ist und daher im nicht-additiven Fall i.a. *nicht gleich*

$$T(\Sigma(-1)^i\partial_i) = T(\partial)$$

wie in [7], IV. 5.

Im nicht-additiven Fall erscheint es angebracht, dem Objekt A einen Grad $n \geqslant 0$ zu geben und dann für X eine s.s. Auflösung zu nehmen, die in der Dimension n beginnt (nicht in der Dimension 0 wie üblich). Man spricht dann von einer *Auflösung von* (A, n) und von derivierten Funktoren *n-ter Stufe* $L_qT(A, n) = H_q(TX)$. Für additive T ist

$$L_{q+1}T(A, n+1) \cong L_qT(A, n);$$

für nicht-additive T dagegen gilt das i.a. nur im *stabilen Bereich* $q < 2n$. Es besteht jedoch immer eine gewisse Verbindung zwischen diesen beiden Funktoren, der *Einhängungshomomorphismus* $\sigma : L_qT(A, n) \to L_{q+1}T(A, n+1)$. Dies ist ein Spezialfall des in § 5 untersuchten Einhängungshomomorphismus $\sigma : H_q(TY) \to H_{q+1}(TSY)$ (s. 5. 9), der für einen

beliebigen Funktor T (mit $T(0) = 0$) und beliebigen FD-Komplex Y definiert ist. Der aus der Topologie bekannte *Einhängungsfunktor* S (s. 5. 1) besteht ungenau gesagt darin, daß man alle Dimensionen um eins erhöht.
Die Abbildung σ hat ähnliche Eigenschaften wie in der Topologie: Sie annulliert *zusammengesetzte* Elemente und ihr Bild ist *primitiv* (s. 5. 25); sie ist isomorph im *stabilen* Bereich (s.6. 12) usw. Die einfacheren dieser Eigenschaften werden in § 5 bewiesen, die tieferen (vom Whiteheadschen Typ; s. 6. 11) mit Hilfe der Bar-Konstruktion in § 6.

Die *Bar-Konstruktion* (§ 6) liefert, unter Benutzung der Eilenberg-MacLaneschen *Mischeffekt*-Funktoren (crosseffects, s. [13], 9), einen Übergang von TX zu TSX. Die Bezeichnung «Bar-Konstruktion» haben wir gewählt, weil in zwei Beispielen (T^1 = Gruppenring, T^2 = symmetrische Algebra) diese Konstrukton im wesentlichen mit der Eilenberg-MacLaneschen Bar-Konstruktion übereinstimmt (s. 6. 26). Die Derivierten $L_qT(A, n)$ sind in diesen Beispielen gerade die Eilenberg-MacLaneschen Gruppen $H_q(A, n)$ (s. 4. 15).

In § 7 diskutieren wir Besonderheiten, die bei Funktoren mehrerer Variabler auftreten, insbesondere eine *partielle* Einhängung und Bar-Konstruktion. § 8 bringt Spezialisierungen von § 5-7 auf s.s. Auflösungen Y, d.h. auf die derivierten Funktoren. Schließlich werden in § 9, dem letzten Paragraphen des allgemeinen Teils, verschiedene Dualisierungen auseinandergesetzt: *Kontravariante Funktoren, Rechtsderivierte, Kobar-Konstruktion.*

Die Anwendungen in § 10-11 beruhen i. w. auf den Ergebnissen von § 5, die in § 12 außerdem auf der Bar-Konstruktion aus § 6. In § 10-11 beweisen wir Sätze über primitive und zusammengesetzte Elemente in der Homologie der symmetrischen Produkte und der Eilenberg-MacLaneschen Komplexe. Als einfach zu formulierendes Beispiel erwähnen wir hier (s. 11. 12): *Außer den Koeffizientenhomomorphismen und den Bocksteinoperatoren gibt es keine additiven Kohomologieoperationen der Ordnung* p^2, $p > 1$.

Etwas schwieriger zu beweisende Resultate über Homologie und Homotopie symmetrischer Produkte sind am Anfang von § 12 zusammengestellt; das geometrisch interessanteste darunter ist der Satz 12. 11.

INHALT

1. — HOMOTOPIE SEMI-SIMPLIZIALER MORPHISMEN

Wir erklären eine Homotopierelation für s.s. Morphismen über einer beliebigen Kategorie $\mathfrak{C}$ und zeigen, daß diese Relation bei Anwendung eines beliebigen (kovarianten) Funktors $T : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ erhalten bleibt (vgl. [19]). Allgemeiner kann für beliebige s.s. Objekte X, Y über $\mathfrak{C}$ der « Funktionalkomplex » Y^X definiert werden (s. 1.11); die s.s. Morsphismen $X \to Y$ bezw. die Homotopien zwischen ihnen sind dann die 0-Simplexe bezw. 1-Simplexe von Y^X. Jeder kovariante Funktor $T : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ induziert eine s.s. Abbildung $Y^X \to TY^{TX}$.

Es bezeichne $[n]$ die Menge der ganzen Zahlen $0, 1, \ldots, n$. Eine Abbildung $\alpha : [m] \to [n]$ ist *monoton*, wenn aus $i \leqslant j$ stets $\alpha(i) \leqslant \alpha(j)$ folgt.

1.1. Definition ([19]). — Es sei $\mathfrak{C}$ eine beliebige Kategorie. $X_0, X_1, \ldots$, sei eine Folge von Objekten aus $\mathfrak{C}$, und für jede monotone Abbildung $\alpha : [m] \to [n]$ sei $X_\alpha : X_n \to X_m$ ein Morphismus aus $\mathfrak{C}$. Wir sprechen von einem *s.s. Objekt* X (*über* $\mathfrak{C}$), falls

(i) $\quad X_{\iota[n]} = \iota(X_n), \qquad$ wo $\qquad \iota =$ Identität,
(ii) $\quad X_{\alpha \circ \beta} = X_\beta \circ X_\alpha, \qquad$ wo $\qquad \beta : [q] \to [m]$.

Sind X, Y s.s. Objekte, dann ist ein *s.s. Morphismus* (*über* $\mathfrak{C}$) eine Folge $f_n : X_n \to Y_n$, $n = 0, 1, \ldots$, von Morphismen aus $\mathfrak{C}$ mit $f_m \circ X_\alpha = Y_\alpha \circ f_n$.

Ein s.s. Objekt ist, mit anderen Worten, ein kontravarianter Funktor X aus der Kategorie der monotonen Abbildungen in die Kategorie $\mathfrak{C}$; ein s.s. Morphismus ist eine natürlicheTransformation zwischen solchen Funktoren.

1. 2. Wir betrachten die speziellen monotonen Abbildungen (für $i = 0, 1, \ldots, q$)

$$\begin{array}{llll} \varepsilon^i = \varepsilon^i_q : & [q-1] \to [q]; & \varepsilon^i(j) = j & \text{für} \quad j < i, \\ & & \varepsilon^i(j) = j+1 & \text{für} \quad j \geq i, \\ \eta^i = \eta^i_q : & [q+1] \to [q]; & \eta^i(j) = j & \text{für} \quad j \leq i, \\ & & \eta^i(j) = j-1 & \text{für} \quad j > i. \end{array}$$

Die Morphismen X_{ε^i} bezw. X_{η^i} heißen auch *Seiten-* bezw. *Ausartungsoperatoren* von X und werden mit ∂_i^X bezw. s_i^X (oder auch einfach ∂_i, s_i) bezeichnet. Zwischen diesen Operatoren bestehen die bekannten s.s. Identitäten (s. [12], 2. 3-2. 5).

Ein Produkt ε von Abbildungen ε^i ist stets injektiv ([1]), ein Produkt η von Abbildungen η^i stets surjektiv ([1]). Jede monotone Abbildung α kann in eindeutiger Weise in der Form $\alpha = \varepsilon\eta$ geschrieben werden. Ein s.s. Objekt X ist demnach bestimmt, wenn man X_n, $n = 0, 1, \ldots$, und die Operatoren ∂_i^X, s_i^X kennt. Dies wird gelegentlich zur Definition von s.s. Objekten benutzt (vgl. [12], 2).

1. 3. *Beispiele.* — (i) Die s.s. Objekte bezw. Morphismen über der Kategorie der Mengen sind die üblichen *s.s. Komplexe* bezw. *s.s. Abbildungen* (s. [14]). Wir werden in diesem Falle von *s.s. Mengen* sprechen.

(ii) Die *FD-Komplexe* aus [12], 2 sind die s.s. Objekte über der Kategorie der abelschen Gruppen.

Eine Homotopie zwischen s.s. Morphismen $X \to Y$ wird üblicherweise als s.s. Morphismus $I \times X \to Y$ erklärt, wo I das Standard-1-Simplex ist. Hier steht uns ein Objekt $I \times X$ nicht zur Verfügung (und nur insofern sind die Betrachtungen dieses Paragraphen allgemeiner als [19]); nichtsdestoweniger kennen wir « seine Morphismen », wie wir nun zeigen werden. Betrachten wir dazu eine beliebige s.s. Menge K (s. 1. 3 (i)). Ein hypothetischer s.s. Morphismus $F : K \times X \to Y$ müßte der Relation

$$(1.\,4) \quad F(K_\alpha\sigma, X_\alpha x) = Y_\alpha F(\sigma, x), \qquad \sigma \in K_n, \qquad \text{« } x \in X_n \text{ »}$$

genügen. Definieren wir Morphismen

$$F(\sigma) : X_n \to Y_n, \qquad F(\sigma)x = F(\sigma, x) \qquad \text{für jedes} \qquad \sigma \in K_n,$$

([1]) Injektiv = eineindeutig in, surjektiv = auf.

dann können wir statt 1. 4 auch schrebien

$$F(K_\alpha\sigma)\circ X_\alpha = Y_\alpha\circ F(\sigma).$$

Diese Gleichung hat Sinn in $\mathfrak{C}$ und führt zur

1. 5. Definition. — Es seien X, Y s.s. Objekte und K eine s.s. Menge. Eine Funktion F, die jedem Simplex $\sigma \in K_n$, $n = 0, 1, \ldots$, einen Morphismus $F(\sigma) : X_n \to Y_n$ zuordnet, heißt *s.s. Morphismus von* $K \times X$ in Y, in Zeichen

$$F : K \times X \to Y,$$

wenn

(1. 6) $$F(K_\alpha\sigma)\circ X_\alpha = Y_\alpha\circ F(\sigma)$$

gilt für alle $\sigma \in K_n$ und alle α wie in 1. 1.

1. 7. *Beispiele.* — (i) Sei $K = \Delta[0]$ das Standard-0-Simplex ($= K[0]$ in [12], 2). Jedes K_n enthält nur ein Element τ_n. Die s.s. Morsphismen $F : \Delta[0] \times X \to Y$ entsprechen umkehrbar eindeutig den s.s. Morphismen $f : X \to Y$ vermöge der Beziehung $f_n = F(\tau_n)$.

(ii) Sei $K = I = \Delta[1]$ das Standard-1-Simplex ($= K[1]$ in [12], 2). Ein s.s. Morphismus $\Theta : I \times X \to Y$ heißt *Homotopie.*

Die s.s. Morphismen der Definition 1. 5 lassen sich in analoger Weise zusammensetzen wie gewöhnliche Morphismen. Sind z.B. L, K s.s. Mengen, $a : L \to K$ eine s.s. Abbildung und $F : K \times X \to Y$ ein s.s. Morphismus, dann erhält man durch Zusammensetzen einen s.s. Morphismus

(1. 8) $$F\cdot a : L \times X \to Y, \qquad (F\cdot a)(\sigma) = F(a(\sigma)), \qquad \sigma \in L.$$

Entsprechend kann man mit s.s. Morphismen $X' \to Y$ oder $Y \to Y'$ zusammensetzen.

Insbesondere betrachten wir die beiden «Ecken» des Standard-1-Simplexes

(1. 9) $$\varepsilon^i : \Delta[0] \to I = \Delta[1], \quad i = 0, 1, \quad (= \delta_i \text{ in [6], Exp. 3. 1}).$$

Ist $\Theta : I \times X \to Y$ eine Homotopie, dann sind

$$f^i = \Theta\cdot\varepsilon^i : \Delta[0] \times X \to Y, \qquad i = 0, 1,$$

s.s. Morphismen, die wir nach 1. 7 (i) auch als s.s. Morphismen $f^i : X \to Y$ betrachten können. Wir sagen dann, Θ sei eine *Homotopie zwischen* f^0 *und* f^1. Sind umgekehrt f^0, f^1 gegeben,

dann heißt f^0 *homotop zu* f^1, in Zeichen $f^0 \simeq f^1$, wenn es ein solches Θ gibt.

Auf Grund der heuristischen Betrachtung, die der Definition 1. 5 vorausging, ist es klar, daß diese Homotopierelation in den Beispielen 1. 3 mit den dort üblichen Homotopierelationen übereinstimmt (vgl. [17], 8). Beispiel 1. 3 (i) zeigt, daß die Relation $\simeq$ im allgemeinen weder symmetrisch noch transitiv ist. Dagegen ist stets $f \simeq f$, wie die Homotopie

$$\Theta(\sigma) = f_n, \qquad \sigma \in \mathrm{I}_n$$

zeigt.

1. 10. Bemerkung. — Wie in [6], Exp. 3 kann für je zwei s.s. Objekte X, Y die s.s. Menge Y^{X} (der « Funktionalkomplex ») definiert werden (vgl. auch [17], 3) : Die Menge $(\mathrm{Y}^{\mathrm{X}})_n$ seiner n-Simplexe besteht aus den s.s. Morphismen $s_n : \Delta[n] \times \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$, wobei $\Delta[n]$ das Standard-n-Simplex bezeichnet. Ist

$$\alpha : \Delta[m] \to \Delta[n]$$

eine s.s. Abbildung (das ist im wesentlichen dasselbe wie eine monotone Abbildung $\alpha : [m] \to [n]$; s. [12], 2), dann ist $(\mathrm{Y}^{\mathrm{X}})_\alpha(s_n) = s_n \cdot \alpha$ (s. 1. 7). Die 0-Simplexe von Y^{X} sind nach 1. 6 (i) s.s. Morphismen $\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$, die 1-Simplexe sind die Homotopien zwischen ihnen.

1. 11. Es sei jetzt $\mathfrak{C}'$ eine zweite Kategorie und $\mathrm{T} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ ein (kovarianter) Funktor. Der Definitionsbereich von T kann in natürlicher Weise auf s.s. Objekte X und s.s. Morphismen f über $\mathfrak{C}$ ausgedehnt werden : TX bezw. Tf ist ein s.s. Objekt bezw. s.s. Morphismus über $\mathfrak{C}'$, und zwar gilt

$$(1.\ 12) \qquad (\mathrm{TX})_n = \mathrm{T}(\mathrm{X}_n), \qquad (\mathrm{TX})_\alpha = \mathrm{T}(\mathrm{X}_\alpha), \qquad (\mathrm{T}f)_n = \mathrm{T}(f_n).$$

Aber auch auf die s.s. Morphismen der Definition 1. 5 kann T angewendet werden : Ist $\mathrm{F} : \mathrm{K} \times \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ gegeben, dann definieren wir

$$(1.\ 13) \qquad \mathrm{TF} : \mathrm{K} \times \mathrm{TX} \to \mathrm{TY}, \qquad (\mathrm{TF})(\sigma) = \mathrm{T}(\mathrm{F}(\sigma)), \qquad \sigma \in \mathrm{K}.$$

Anwenden von T auf die Gleichung 1. 6 ergibt die entsprechende Gleichung für TF. — Diese Definition könnte theoretisch zu Verwechslungen führen, wenn $\mathrm{K} \times \mathrm{X}$ selbst s.s. Objekt über $\mathfrak{C}$ ist. Im folgenden wird aber aus dem Zusammenhang stets hervorgehen, was gemeint ist.

Ist $a : L \to K$ eine s.s. Abbildung, dann ist (in der Bezeichnung von 1. 8)

(1. 14) $\qquad \mathrm{T}(\mathrm{F}\cdot a) = (\mathrm{TF})\cdot a : \mathrm{L} \times \mathrm{TX} \to \mathrm{TY}.$

Beweis. — $\mathrm{T}(\mathrm{F}\cdot a)(\sigma) = \mathrm{T}((\mathrm{F}\cdot a)(\sigma)) = \mathrm{T}(\mathrm{F}(a(\sigma)))$
$= \mathrm{TF}(a(\sigma)) = (\mathrm{TF}\cdot a)(\sigma).$

Wenden wir 1. 14 auf die Situation unter 1. 9 an, so erhalten wir

1. 15. Satz. — *Ist* $\Theta : \mathrm{I} \times \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *eine Homotopie zwischen* f^0 *und* $f^1 : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$, *dann ist* $\mathrm{T}\Theta : \mathrm{I} \times \mathrm{TX} \to \mathrm{TY}$ (*s.* 1. 13) *eine Homotopie zwischen* $\mathrm{T}f^0$ *und* $\mathrm{T}f^1 : \mathrm{TX} \to \mathrm{TY}$. *Aus* $f^0 \simeq f^1$ *folgt also* $\mathrm{T}f^0 \simeq \mathrm{T}f^1$, *d.h.* T *erhält die Homotopierelation.*

Beweis. — *Aus* 1. 14 *folgt* $(\mathrm{T}\Theta)\cdot\varepsilon^i = \mathrm{T}(\Theta\cdot\varepsilon^i) = \mathrm{T}f^i$, qed.

1. 16. Bemerkung. — Ist $s_n : \Delta[n] \times \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ ein n-Simplex des Funktionalkomplexes Y^{X} (s. 1. 10), dann ist $\mathrm{T}(s_n) : \Delta[n] \times \mathrm{TX} \to \mathrm{TY}$ ein n-Simplex von $\mathrm{TY}^{\mathrm{TX}}$. *Die Zuordnung* $s_n \to \mathrm{T}(s_n)$ *ist*, wie man leicht aus 1. 14 folgert, *eine s.s. Abbildung* $\mathrm{Y}^{\mathrm{X}} \to \mathrm{TY}^{\mathrm{TX}}$. Diese Aussage enthält 1. 15 (vgl. den letzten Satz unter 1. 10).

1. 17. Bemerkung. — Der Satz 1. 15 kann auf c.s.s. Funktoren im Sinne von Kan [19], Definition (5. 2) verallgemeinert werden und ergibt dann das Analogon zu Thm 5. 3 in [19].

1. 18. Bemerkung. — Ohne weiteres übertragen sich die vorstehenden Betrachtungen auf (kovariante) Funktoren T mehrerer, etwa zweier Variabler $\mathrm{C} \in \mathfrak{C}$, $\mathrm{D} \in \mathfrak{D}$, da man T stets als Funktor einer Variablen (C, D) der Produktkategorie $\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$ interpretieren kann:

Sind X, Y s.s. Objekte über $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, dann erhält man wie folgt ein s.s. Objekt (X, Y) über $\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$

(1. 19) $\quad (\mathrm{X}, \mathrm{Y})_n = (\mathrm{X}_n, \mathrm{Y}_n), \qquad (\mathrm{X}, \mathrm{Y})_\alpha = (\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{Y}_\alpha);$

entsprechend für Paare $f : \mathrm{X} \to \mathrm{X}'$, $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{Y}'$ von s.s. Morphismen über $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$

(1. 20) $\quad (f, g) : (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \to (\mathrm{X}', \mathrm{Y}'), \qquad (f, g)_n = (f_n, g_n).$

Ist Θ eine Homotopie zwischen f_0 und $f_1 : X \to X'$ und H eine Homotopie zwischen g_0 und $g_1 : Y \to Y'$, dann ist

$$(1.21) \qquad \begin{aligned}&(\Theta, H) : I \times (X, Y) \to (X', Y'),\\ &(\Theta, H)(\sigma) = (H(\sigma), H(\sigma)), \qquad \sigma \in I,\end{aligned}$$

eine Homotopie zwischen (f_0, g_0) und (f_1, g_1) also

$$(f_0, g_0) \simeq (f_1, g_1).$$

Insbesondere gilt

$$(1.22) \qquad \begin{aligned}&f_0 \simeq f_1 \Rightarrow (f_0, g) \simeq (f_1, g)\\ &g_0 \simeq g_1 \Rightarrow (f, g_0) \simeq (f, g_1),\end{aligned}$$

denn $f \simeq f$, $g \simeq g$.

Interpretiert man nun T als Funktor einer Variablen $(C, D) \in \mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$, so erhält man nach 1.1-1.16 die folgenden Begriffsbildungen und Beziehungen

$$(1.23) \qquad T(X, Y) \quad \text{mit} \quad \begin{aligned}&T(X, Y)_n = T(X_n, Y_n),\\ &T(X, Y)_\alpha = T(X_\alpha, Y_\alpha)\end{aligned}$$

$$(1.24) \qquad T(f, g) : T(X, Y) \to T(X', Y') \quad \text{mit} \quad T(f, g)_n = T(f_n, g_n)$$

$$(1.25) \qquad f_0 \simeq f_1,\ g_0 \simeq g_1 \Rightarrow T(f_0, g_0) \simeq T(f_1, g_1)$$

insbesondere

$$(1.26) \qquad \begin{aligned}&f_0 \simeq f_1 \Rightarrow T(f_0, g) \simeq T(f_1, g),\\ &g_0 \simeq g_1 \Rightarrow T(f, g_0) \simeq T(f, g_1).\end{aligned}$$

2. — DER VERALLGEMEINERTE SATZ VON EILENBERG-ZILBER

Wir betrachten s.s. Doppelobjekte V (s. 2. 2) über einer additiven Kategorie $\mathfrak{A}$ (s. [16], 1. 3). Mit jedem solchen Doppelobjekt sind zwei (Ketten-) Komplexe über $\mathfrak{A}$ assoziiert: der *totale Komplex* tV und der *diagonale Komplex* dV (s. 2. 5-2. 7). Der verallgemeinerte Satz von Eilenberg-Zilber besagt, daß diese beiden Komplex in universeller Weise homotopie-äquivalent sind (s. 2. 9). Wir verdanken diesen Satz Herrn P. Cartier.

Wie schon bemerkt, legen wir eine *additive* Kategorie $\mathfrak{A}$ zugrunde. Dann können wir jedes s.s. Objekt X über $\mathfrak{A}$ in bekannter Weise als *Komplex* über $\mathfrak{A}$ (²) auffassen; der Randoperator ist

$$(2.\ 1) \qquad \partial = \partial^q : X_q \to X_{q-1}, \qquad \partial^q = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \partial_i,$$

wo ∂_i den i-ten Seitenoperator (s. 1. 2) bezeichnet. Wir schreiben auch kX für diesen Komplex, wenn es angebracht ist, ihn von X zu unterscheiden.

2. 2. Definition. — Es sei $V_{p,q}$, $p, q = 0, 1, \ldots$, eine Doppelfolge von Objekten aus $\mathfrak{A}$. Für jedes Paar monotoner Abbil-

(²) Ein Komplex über $\mathfrak{A}$ ist eine Folge von Objekten X_q und Morphismen (« Randoperatoren ») $\partial^q : X_q \to X_{q-1}$ aus $\mathfrak{A}$ mit der Eigenschaft $\partial^q \partial^{q+1} = 0$ für alle ganzen Zahlen q. Begriffe wie Kettenabbildung (= Kettenmorphismus), Homotopie usw. sind genau wie in [7], IV. 3 zu definieren. Vgl. auch [16], 2. 1. Wenn wir im folgenden X_q nur für $q \geqslant 0$ definieren, so ist $X_q = 0$ für $q < 0$ zu setzen (positiver Komplex).

dungen $\alpha:[r]\to[p]$, $\beta:[s]\to[q]$ (s. § 1) sei ein Morphismus $V_{\alpha,\beta}:V_{p,q}\to V_{r,s}$ gegeben, und es gelte

(i) $\quad V_{\iota[p],\iota[q]}=\iota(V_{p,q}),\quad$ wo $\quad \iota=$ Identität;

(ii) $\quad V_{\alpha\circ\alpha',\beta\circ\beta'}=V_{\alpha',\beta'}\circ V_{\alpha,\beta},$

wo $\quad \alpha':[t]\to[r],\quad \beta':[u]\to[s].$

Dann sprechen wir von einem *s.s. Doppelobjekt* V (über $\mathfrak{A}$). Beispiele finden sich unter 2. 10. Ein s.s. Morphismus $g:V\to W$ zwischen s.s. Doppelobjekten V, W ist eine Doppelfolge $g_{p,q}:V_{p,q}\to W_{p,q}$ von Morphismen, die den Gleichungen

$$g_{r,s}\circ V_{\alpha,\beta}=W_{\alpha,\beta}\circ g_{p,q}$$

genügen.

2. 3. Für jedes q ist die Folge $V_{0,q}, V_{1,q}, V_{2,q}, \ldots$ mit den Morphismen $V_{\alpha,\iota[q]}$ ein s.s. Objekt $V_{*,q}$ im Sinne von 1. 1, ebenso für festes p die Folge $V_{p,0}, V_{p,1}, \ldots$ mit den Morphismen $V_{\iota[p],\beta}$; daher der Name s.s. *Doppel*objekt. Ferner gilt nach (ii)

$$V_{\alpha,\iota[s]}\circ V_{\iota[p],\beta}=V_{\alpha,\beta}=V_{\iota[r],\beta}\circ V_{\alpha,\iota[q]}, \tag{2. 4}$$

d.h. $V_{\iota[*],\beta}:V_{*,q}\to V_{*,s}$ ist ein s.s. Morphismus, ebenso $V_{\alpha,\iota[*]}:V_{p,*}\to V_{r,*}$.

2. 5. Wie man jedes s.s. Objekt als Komplex (s. 2. 1), so kann man jedes s.s. Doppelobjekt als *Doppelkomplex* (s. [7], IV, 4) auffassen: der erste Randoperator ∂' ist der der Komplexe $V_{*,q}$, der zweite ∂'' der der Komplexe $V_{p,*}$, d.h.

$$\begin{aligned} \partial' &= {}'\partial^{p,q}:V_{p,q}\to V_{p-1,q}, & {}'\partial^{p,q} &= \sum_{i=0}^{p}(-1)^i V_{\varepsilon^i,\iota[q]} \\ \partial'' &= {}''\partial^{p,q}:V_{p,q}\to V_{p,q-1}, & {}''\partial^{p,q} &= \sum_{i=0}^{q}(-1)^i V_{\iota[p],\varepsilon^i} \end{aligned} \tag{2. 6}$$

(ε^i wie in 1. 2).

Aus 2. 4 folgt, daß die beiden Randoperatoren vertauschbar sind, $\partial'\partial''=\partial''\partial'$. Wir haben es also mit einem Doppelkomplex im Sinne von [7], IV, 4, [16], S. 146 zu tun; mit dem *totalen* Randoperator ∂,

$$\partial|V_{p,q}={}'\partial^{p,q}+(-1)^{p}{}''\partial^{p,q},$$

wird die Folge $\bigoplus_{p+q=i}V_{p,q}$, $i=0,1,\ldots$, zu einem gewöhnlichen Komplex tV, dem *totalen Komplex des s.s. Doppelobjektes* V.

2. 7. Das *diagonale s.s. Objekt* dV des s.s. Doppelobjektes V ist die Folge

$$(dV)_p = V_{p,p}$$

mit den Morphismen

$$(dV)_\alpha = V_{\alpha,\alpha} : (dV)_p \to (dV)_r, \qquad \text{wo} \qquad \alpha : [r] \to [p].$$

Die Gleichungen 1. 1 (i), (ii) für dV folgen aus 2. 2. (i), (ii). Fassen wir dV als Komplex auf (= kdV; s. 2. 1), dann sprechen wir vom *diagonalen Komplex von* V.

Das Hauptergebnis dieses Paragraphen lautet.

2. 9. Satz (Eilenberg-Zilber-Cartier). — *Es gibt eine universelle (Ketten-) Homotopieäquivalenz zwischen dem totalen und dem diagonalen Komplex des Doppelobjektes* V. *Allgemeiner gilt: Es seien* $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(V)$, $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}(V)$ *jeweils der totale oder diagonale Komplex von* V; *insbesondere ist* $\mathfrak{X}_0 = \mathfrak{Y}_0 = V_{0,0}$.

(a) *Jeder universelle Morphismus* $\mathfrak{X}_0 \to \mathfrak{Y}_0$ *(insbesondere der identische) läßt sich zu einem universellen Kettenmorphismus* $\mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ *erweitern.*

(b) *Je zwei universelle Kettenmorphismen* $\mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, *die in der Dimension* 0 (d.i. $\mathfrak{X}_0 \to \mathfrak{Y}_0$) *übereinstimmen, sind universell homotop.*

Dabei bedeutet « universell » etwa, daß sich die betreffenden Morphismen in einer vom Doppelobjekt V und der Kategorie $\mathfrak{A}$ unabhängigen Weise linear (mit ganzzahligen Koeffizienten) aus den Morphismen $V_{\alpha,\beta}$ kombinieren lassen. Eine genauere Definition folgt weiter unten.

2. 10. *Beispiele.* — (i) Es seien $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ beliebige Kategorien und T(C, D) ein beliebiger kovarianter Funktor zweier Variabler $C \in \mathfrak{C}$, $D \in \mathfrak{D}$ mit Werten in $\mathfrak{A}$. Analog wie beim Funktor einer Variablen läßt sich T auf s.s. Objekte und s.s. Morphismen ausdehnen. Für jedes Paar X, Y von s.s. Objekten über $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ erhalten wir ein s.s. Doppelobjekt $\hat{T}$ (X, Y) über $\mathfrak{A}$ wie folgt:

$$\hat{T}(X, Y)_{p,q} = T(X_p, Y_q), \qquad \hat{T}(X, Y)_{\alpha,\beta} = T(X_\alpha, Y_\beta);$$

ebenso $\hat{T}(f, g)_{p,q} = \hat{T}(f_p, g_q)$ für Paare f, g von s.s. Morphismen. Dies ist die Situation, auf die wir 2. 9 später anwenden werden.

Das diagonale Objekt $d\hat{T}(X, Y)$ kann man hier auch erhalten, indem man T als Funktor einer Variablen $(C, D) \in \mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$

auffaßt und dann nach 1. 18 auf s.s. Objekte über $\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$ ausdehnt. Wir können also schreiben

(2. 11) $$d\hat{T}(X, Y) = T(X, Y).$$

(ii) Nehmen wir in Beispiel (i) für $\mathfrak{C} = \mathfrak{D} = \mathfrak{A}$ die Kategorie $\mathfrak{G}$ der abelschen Gruppen und als Funktor T das Tensorprodukt $T(C, D) = C \otimes D$, dann geht 2. 9, angewendet auf $\hat{T}(X, Y) = X \hat{\otimes} Y$, in den klassischen Satz von Eilenberg-Zilber über (s. [15], 3. 9. 1). Die Verallgemeinerung 2. 9 dieses Satzes besteht also nicht nur im Übergang zu einer beliebigen Kategorie.

(iii) Wie im klassischen Fall spielen beim Beweis von 2. 9 die « Modelle » $K(m, n)$ eine Rolle. $K(m, n)$ entsteht, wenn wir im Beispiel (ii) für X, Y die Standardsimplexe $K(m)$, $K(n)$ im Sinne von [12], 2 wählen, d.h. die FD-Komplexe der in § 1 verwendeten $\Delta[m]$, $\Delta[n]$, also im Sinne von (ii)

$$K(m, n) = K(m) \hat{\otimes} K(n).$$

Die Gruppe $K(p, q)_{r,s}$ *ist also frei und besitzt als Basis die Paare* (α, β) *monotoner Abbildungen* $\alpha : [r] \to [p]$, $\beta : [s] \to [q]$.

Beweis von 2. 9. — Wir bezeichnen mit $M(p, q; r, s)$ die freie abelsche Gruppe, die von den Paaren (α, β) monotoner Abbildungen $\alpha : [r] \to [p]$, $\beta : [s] \to [q]$ erzeugt wird. Die Elemente $a \in M(p, q; r, s)$ schreiben sich also eindeutig in der Form $a = \Sigma n_{\alpha,\beta}(\alpha, \beta)$ mit ganzzahligen Koeffizienten $n_{\alpha,\beta}$.
Die Zusammensetzung monotoner Abbildungen induziert eine bilineare Paarung, ebenfalls Zusammensetzung genannt,

(2. 12) $$M(r, s; t, u) \times M(p, q; r, s) \to M(p, q; t, u),$$
$$(\Sigma n_{\alpha',\beta'}(\alpha', \beta')) \cdot (\Sigma n_{\alpha,\beta}(\alpha, \beta)) = \Sigma n_{\alpha,\beta} n_{\alpha',\beta'}(\alpha \circ \alpha', \beta \circ \beta'),$$

wobei $\alpha' : [t] \to [r]$, $\beta' : [u] \to [s]$. Insbesondere ist

$$(\alpha', \beta') \cdot (\alpha, \beta) = (\alpha \circ \alpha', \beta \circ \beta').$$

Damit werden diese Gruppen zu einer additiven Kategorie $\mathfrak{M}$: Die Objekte sind die Symbole $M_{p,q}$ die Morphismen sind

$$\mathrm{Hom}(M_{p,q}, M_{r,s}) = M(p, q; r, s),$$

und die Zusammensetzung ist durch 2. 12 gegeben ([3]).

([3]) Es fehlen allerdings die endlichen direkten Summen (= direkten Produkte), deren Existenz man in jeder additiven Kategorie fordert (s. [16], 1. 3). Diese kann man aber, falls erwünscht, ohne weiteres formal zu $\mathfrak{M}$ adjungieren; es ist klar, welche Morphismen man dann noch hinzufügen muß.

Ein s.s. Doppelobjekt V über $\mathfrak{A}$ kann jetzt als kovarianter additiver Funktor $V: \mathfrak{M} \to \mathfrak{A}$ aufgefaßt werden (und umgekehrt)

(2. 13) $\quad V(M_{p,q}) = V_{p,q}, \quad V(\Sigma n_{\alpha,\beta}(\alpha, \beta)) = \Sigma n_{\alpha,\beta} V_{\alpha,\beta}.$

Die Gleichungen (i), (ii) aus 2. 2 drücken gerade die Definitionseigenschaften eines kovarianten Funktors aus. S.s. Morphismen zwischen s.s. Doppelobjekten gehen bei dieser Entsprechung in natürliche Transformationen zwischen Funktoren über (vgl. auch die Bemerkung am Ende der Definition 1. 1).

Es sei nun $a = \Sigma n_{\alpha,\beta}(\alpha, \beta) \in M(p, q; r, s)$. Für jedes Doppelobjekt V ist

$$V(a) = \Sigma n_{\alpha,\beta} V_{\alpha,\beta}: V_{p,q} \to V_{r,s}$$

ein Morphismus. Die Form dieses Morphismus' (als Linearkombination der $V_{\alpha,\beta}$) ist dieselbe für alle V und unabhängig von der Kategorie $\mathfrak{A}$; $V(a)$ ist ein *universeller Morphismus* $V_{p,q} \to V_{r,s}$. Z. B. ist der Randoperator des diagonalen Komplexes

$$V_{p,q} = (dV)_p \xrightarrow{\partial} (dV)_{p-1} = V_{p-1,p-1}$$

ein universeller Morphismus; er entspricht dem Element $a = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i(\varepsilon^i, \varepsilon^i) \in M(p, p; p-1, p-1)$. Die Gruppe der universellen Morphismen $V_{p,q} \to V_{r,s}$ ist — nach Definition — kanonisch isomorph mit $M(p, q; r, s)$. ($\mathfrak{M}$ selbst bezw. der identische Funktor $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ ist das *universelle s.s. Doppelobjekt*).

Allgemein bezeichnen wir einen Morphismus zwischen direkten Summen von Objekten $V_{p,q}$ als *universell*, wenn seine Komponenten universelle Morphismen sind. Z.B. ist der Randoperator des totalen Komplexes tV,

$$\partial: \bigoplus_{p+q=m} V_{p,q} \to \bigoplus_{r+s=m-1} V_{r,s},$$

ein universeller Morphismus, weil er sich aus universellen Morphismen $V_{p,q} \to V_{p-1,q}$ bezw. $V_{p,q} \to V_{p,q-1}$ zusammensetzt.

Eine Folge von Morphismen

(2. 14) $\quad \varphi_m: V_{m,m} \to \bigoplus_{p+q=m} V_{p,q}$

ist ein *universeller Kettenmorphismus* von dV in tV, wenn

jedes φ_m universell und wenn $\{\varphi_m\}$ ein Kettenmorphismus ist für alle V. Die Eigenschaft von $\{\varphi_m\}$, ein *Ketten*morphismus zu sein, braucht man natürlich nur für das universelle Objekt zu verifizieren, weil jede Relation zwischen Morphismen von $\mathfrak{M}$, die man durch Zusammensetzen und Addieren dieser Morphismen erhält, automatisch die gleiche Relation für universelle Morphismen zur Folge hat (denn V ist ein kovarianter additiver Funktor). Vertauschbarkeit der φ_m mit dem Randoperator von dV bezw. tV ist aber eine solche Relation.

Analog dazu sind die anderen in 2. 9 vorkommenden universellen Kettenmorphismen bezw. Homotopien erklärt. Man sieht also, daß 2. 9 nur ein Satz über die Kategorie $\mathfrak{M}$ (bezw. das universelle Doppelobjekt) ist. Zum Beweis gehen wir nun so vor, daß wir eine zu $\mathfrak{M}$ isomorphe Kategorie $\mathfrak{N}$ angeben, in der der Satz 2. 9 wohlbekannt ist.

Dazu betrachten wir die Modelle K(l, m) aus 2. 10 (iii) und die s.s. Morphismen zwischen ihnen. Wir sprechen von einem *natürlichen Homomorphismus*

$$f_{p,q;r,s}\colon \mathrm{K}(l,\ m)_{p,q} \to \mathrm{K}(l,\ m)_{r,s}$$

wenn $f_{p,q;r,s}$ für alle (l, m) definiert ist und vertauschbar ist mit allen s.s. Morphismen zwischen den Modellen K(l, m). Wie in [12], Thm. 3.1 folgt, daß jeder natürliche Homomorphismus $f_{p,q;r,s}$ *eindeutig* in der Form $\Sigma n_{\alpha,\beta}\mathrm{K}(l, m)_{\alpha,\beta}$ geschrieben werden kann mit Koeffizienten $n_{\alpha,\beta}$, die nicht von (l, m) abhängen. D. h. die Gruppe N$(p, q; r, s)$ der natürlichen Homomorphismen $f_{p,q;r,s}$ ist kanonisch isomorph mit der Gruppe M$(p, q; r, s)$. Die Zusammensetzung $\cdot$ der natürlichen Homomorphismen geht dabei in die Zusammensetzung $\cdot$ in $\mathfrak{M}$ über. *Die Kategorie $\mathfrak{M}$ ist also kanonisch isomorph der Kategorie $\mathfrak{N}$* mit den Objekten $\mathrm{N}_{p,q}$, den Morphismen Hom $(\mathrm{N}_{p,q}; \mathrm{N}_{r,s}) = \mathrm{N}(p, q; r, s)$ und der üblichen Zusammensetzung von natürlichen Abbildungen.

In der Kategorie $\mathfrak{N}$ wird 2. 9 aber zum klassischen Satz von Eilenberg-Zilber (einem Spezialfall davon); er ergibt sich dort aus der Azyklizität des diagonalen bezw. totalen Komplexes der Modelle K(l, m) (s. [14], 2 oder [15], 3. 9). Für den ersten Teil von 2. 9 können wir uns auch auf [13], Thm. 2. 1 und Thm. 2 .1 a berufen und erhalten damit explizite universelle Homotopieäquivalenzen. Dieses Ergebnis notieren wir in

2. 15. SATZ. — *Der « shuffle » Morphismus* (s. [12], 5. 3)

$$\nabla : \bigoplus_{p+q=m} \mathrm{V}_{p,q} \to \mathrm{V}_{m,m} \qquad m = 0, 1, \ldots$$

und der Alexander-Whitney-Morphismus (s. [13], 2. 9)

$$f : \mathrm{V}_{m,m} \to \bigoplus_{p+q=m} \mathrm{V}_{p,q}, \qquad m = 0, 1, \ldots$$

sind universelle Homotopieäquivalenzen zwischen dem totalen und dem diagonalen Komplex des s.s. Doppelobjektes V.

Der Morphismus f hat die folgenden Komponenten

$$f_{p,q} : \mathrm{V}_{m,m} \to \mathrm{V}_{p,q}, \quad f_{p,q} = \mathrm{V}(\varepsilon_m^m \circ \varepsilon_{m-1}^{m-1} \circ \cdots \varepsilon_{p+1}^{p+1}, \quad \varepsilon_m^0 \circ \varepsilon_{m-1}^0 \circ \cdots \varepsilon_{q+1}^0)$$

(s. 1. 2 für ε_j^i. Wie in 2. 13 schreiben wir die monotonen Abbildungen als Argument).

Der Morphismus ∇ *hat die Komponenten*

$$\nabla_{p,q} : \mathrm{V}_{p,q} \to \mathrm{V}_{m,m}$$

$$\nabla_{p,q} = \Sigma_{(\mu,\nu)} \operatorname{sign}(\mu, \nu) \mathrm{V}(\eta_p^{\nu_q} \circ \eta_{p+1}^{\nu_{q-1}} \circ \cdots \eta_{m-1}^{\nu_1}, \eta_q^{\mu_p} \circ \eta_{q+1}^{\mu_{p-1}} \circ \cdots \eta_{m-1}^{\mu_1}),$$

wobei sich die Summe über alle (p, q)*-shuffles* (μ, ν) *erstreckt* (s. [12], 5), $\operatorname{sign}(\mu, \nu) = (-1)^{\varepsilon(\mu)}$ *das Vorzeichen von* (μ, ν) *und* η_j^i *wie in* 1. 2 *definiert ist.*

2. 16. BEMERKUNG. — Allgemeiner als 2. 2 lassen sich Tripel-, Quadrupel- usw. s.s. Objekte über $\mathfrak{A}$ definieren, d.s. kontravariante Funktoren V dreier oder mehrerer Variabler aus der Kategorie der monotonen Abbildungen in die Kategorie $\mathfrak{A}$. Außer dem diagonalen und dem totalen Komplex treten nun noch « partielle » Diagonalkomplexe usw. auf. Eine naheliegende Verallgemeinerung von 2. 9 besagt, daß alle diese Komplexe in universeller Weise homotopieäquivalent sind.

Schließlich kann man Funktoren V betrachten, die teils kovariant, teils kontravariant sind, und hier wieder Diagonalen bilden bezüglich der Argumente gleicher Varianz usw.

3. — ÄQUIVALENZ ZWISCHEN KETTENKOMPLEXEN UND FD-KOMPLEXEN

Über einer *abelschen Kategorie* $\mathfrak{A}$ (s. [16], 1. 4), sind « (Ketten-) Komplex » und « s.s. Objekt » äquivalente Begriffe. Dies wird in [18], [9] bewiesen, falls $\mathfrak{A}$ eine Kategorie von Moduln ist. Die Übertragung auf den allgemeinen Fall ist nicht ganz selbstverständlich; wir geben daher hier einen neuen Beweis (nach dem Muster [3] oder [20]).

Wie in [18], [9] definieren wir einen additiven Funktor N von s.s. Objekten (über $\mathfrak{A}$) zu Komplexen (über $\mathfrak{A}$) und einen Funktor K von Komplexen zu s.s. Objekten, so daß die zusammengesetzten Funktoren jeweils dem identischen Funktor äquivalent sind.

3. 1. Der funktor N. — Es sei X ein s.s. Objekt über $\mathfrak{A}$. Wir definieren

$$(\mathrm{NX})_n = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Kern}\,(\partial_i : \mathrm{X}_n \to \mathrm{X}_{n-1})\ (^4).$$

Aus $\partial_i\partial_q = \partial_{q-1}\partial_i$, $i < q$, folgt Bild $(\partial_0|\mathrm{NX}) \subset \mathrm{NX}$, $\partial_0\partial_0|\mathrm{NX} = 0$; daher definiert ∂_0 einen Morphismus $\partial : (\mathrm{NX})_n \to (\mathrm{NX})_{n-1}$ mit $\partial\partial = 0$. Die Folge $(\mathrm{NX})_n$, $n = 0, 1, \ldots$, mit dem Randoperator ∂ ist also ein Komplex NX, der *normale Komplex von* X.

Jeder s.s. Morphismus f: X $\to$ Y definiert (durch Ein-

(4) Sind $\varphi_i : \mathrm{A} \to \mathrm{A}_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$, Morphismen in $\mathfrak{A}$, dann ist nach Definition $\bigcap_i \mathrm{Kern}\,(\varphi_i) = \mathrm{Kern}\,(\varphi)$, wo $\varphi : \mathrm{A} \to \prod_i \mathrm{A}_i$ den Morphismus mit den Komponenten φ_i bezeichnet.

schränkung) einen Kettenmorphismus $Nf: NX \to NY$. N ist ein additiver kovarianter Funktor von s.s. Objekten zu Komplexen.

3. 2. Der Funktor K. — Für jede monotone Abbildung $\alpha : [n] \to [q]$ setzen wir $d(\alpha) = n$, $r(\alpha) = q$. Mit ε, ε', $\tilde{\varepsilon}$, ... bezw. η, η', $\tilde{\eta}$, ... bezeichnen wir monotone Abbildungen, die injektiv bezw. surjektiv (¹) sind. Jedes α läßt sich eindeutig in der Form $\alpha = \varepsilon\eta$ schreiben.

Es sei nun C ein Komplex über $\mathfrak{A}$. Wir setzen

$$(3.3) \qquad (\mathrm{KC})_n = \bigoplus_{d(\eta)=n} \mathrm{C}_{r(\eta)};$$

die (direkte) Summe ist über alle η mit $d(\eta) = n$ zu erstrecken; es kommen darin also so viele Summanden C_q vor, als es monotone Abbildungen von $[n]$ *auf* $[q]$ gibt.

Für jedes $\alpha : [m] \to [n]$ definieren wir $(\mathrm{KC})_\alpha : (\mathrm{KC})_n \to (\mathrm{KC})_m$, indem wir die « Beschränkungen » $(\mathrm{KC})_\alpha | \mathrm{C}_{r(\eta)}$ angeben. Ist $\eta\alpha = \varepsilon'\eta'$, dann bildet diese Beschränkung $\mathrm{C}_{r(\eta)}$ ganz in den Summanden (= Faktor) $\mathrm{C}_{r(\eta')}$ von $(\mathrm{KC})_m$ ab (d.h. die anderen Komponenten von $(\mathrm{KC})_\alpha | \mathrm{C}_{r(\eta)}$ sind null). Bezeichnet

$$k(\eta, \alpha) : \mathrm{C}_{r(\eta)} \to \mathrm{C}_{r(\eta')}$$

diesen Morphismus, dann ist

$$(3.4) \quad k(\eta, \alpha) = \begin{cases} \iota(\mathrm{C}_{r(\eta)}), & \text{falls} \quad \varepsilon' = \iota[r(\eta)], \quad \iota = \text{Identität} \\ \partial : \mathrm{C}_{r(\eta)} \to \mathrm{C}_{r(\eta)-1} = \mathrm{C}_{r(\eta')}, & \text{falls} \quad \varepsilon' = \varepsilon^0, \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Diese Definitionen ergeben ein s.s. Objekt KC, wenn wir die Bedingungen (1. 1) (i), (ii) nachweisen können. Die erste, $(\mathrm{KC})_{\iota[n]} = \iota(\mathrm{KC})_n$, ist klar; es bleibt also

$$(3.5) \qquad (\mathrm{KC})_{\alpha\beta} = (\mathrm{KC})_\beta (\mathrm{KC})_\alpha$$

zu verifizieren, wobei $\beta : [l] \to [m]$. Dabei genügt es, sich auf einen Summanden $\mathrm{C}_{r(\eta)}$ von $(\mathrm{KC})_n$ zu beschränken.

Ist nun wie oben $\eta\alpha = \varepsilon'\eta'$ und $\eta'\beta = \varepsilon''\eta''$, dann ist

$$\eta(\alpha\beta) = (\varepsilon'\varepsilon'')\eta''$$

offenbar die entsprechende Zerlegung von $\eta(\alpha\beta)$. Daraus folgt, daß beide Seiten von 3. 5 den Summanden $\mathrm{C}_{r(\eta)}$ von $(\mathrm{KC})_n$ in den gleichen Summanden $\mathrm{C}_{r(\eta'')}$ von $(\mathrm{KC})_l$ abbilden und zwar vermöge des gleichen Morphismus $k(\eta, \alpha\beta) = k(\eta', \beta)k(\eta, \alpha)$.

Jeder Kettenmosphismus $u: C \to D$ liefert durch direkte-Summenbildung einen s.s. Morphismus $Ku: KC \to KD$, und K wird dadurch zum additiven kovarianten Funktor von Komplexen zu s.s. Objekten.

Das Hauptergebnis dieses Paragraphen ist der

3. 6. Satz. — *Die zusammengesetzten Funktoren* NK *und* KN *sind den jeweiligen identischen Funktoren natürlich äquivalent.*

Ehe wir den Beweis beginnen, ziehen wir einige Folgerungen.

3. 7. Korollar.

(*a*) $N:$ s.s.-Hom $(X, Y) \cong$ Ketten-Hom (NX, NY) *für beliebige s.s. Objekte* X, Y.

(*b*) $K:$ Ketten-Hom $(C, D) \cong$ s.s.-Hom (KC, KD) *für beliebige Komplexe* C, D.

Zum Beweis vgl. [9], 1. 23.

Ein s.s. Objekt X (ein Komplex C) heißt *projektiv*, wenn alle X_n (alle C_n) projektiv sind (s. [15], 1. 8).

3. 8. Korollar. — *Ein s.s. Objekt* X (*ein Komplex* C) *ist genau dann projektiv, wenn* NX (*wenn* KC) *projektiv ist.*

Beweis. — Nach 3. 6. ist $X_n \cong (KNX)_n = \bigoplus_{\sigma(\eta)=n}(NX)_{r(\eta)}$. Eine direkte Summe ist aber genau dann projektiv, wenn jeder Summand es ist.

Ein entsprechender Satz gilt für die Eigenschaft « injektiv ».

3. 9. Die aushängung (J. C. Moore). — Unter der *Aushängung* eines s.s. Objektes X verstehen wir das folgende s.s. Objekt $\underline{X}$.

(3. 10) $\quad \underline{X}_n = \text{Kern}\,(\partial_{n+1} : X_{n+1} \to X_n), \qquad n \geq 0.$

Sei $\alpha : [m] \to [n]$ monoton und sei

$$\tilde{\alpha} : [m+1] \to [n+1], \quad \tilde{\alpha}(i) = \alpha(i) \text{ für } i \leq m, \quad \tilde{\alpha}(m+1) = n+1.$$

Wegen $\tilde{\alpha} \circ \varepsilon_{m+1}^{m+1} = \varepsilon_{n+1}^{n+1} \circ \alpha$ ist $X_{\tilde{\alpha}}(\underline{X}_n) \subset \underline{X}_m$; durch Einschränkung definiert $X_{\tilde{\alpha}}$ daher einen Morphismus

$$\underline{X}_\alpha : \underline{X}_n \to \underline{X}_m,$$

und wegen $\widetilde{\alpha\beta} = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}$ folgt $\underline{X}_{\alpha\beta} = \underline{X}_\beta \underline{X}_\alpha$. Wir haben es also wirklich mit einem s.s. Objekt $\underline{X}$ zu tun.

Ein s.s. Morphismus $f : X \to Y$ definiert durch Einschränkung einen s.s. Morphismus $\overline{f} : \overline{X} \to \overline{Y}$. Die Aushängung wird dadurch zum kovarianten additiven Funktor. Sie dient uns als Hilfsbegriff beim Beweis von 3. 6 und an anderer Stelle. Wegen der Bezeichnung « Aushängung » vgl. 3. 13.

Unmittelbar aus der Definition folgt

$$(3.\ 11) \qquad (N\overline{X})_n = (NX)_{n+1}, \qquad n \geq 0.$$

Ferner ergibt sich aus der Identität $\partial_{n+1} s_n = id$, daß s_n monomorph ist und

$$(3.\ 12) \qquad X_{n+1} \cong \text{Kern}\,(\partial_{n+1} : X_{n+1} \to X_n) \oplus \text{Bild}\ (s_n : X_n \to X_{n+1}) = \overline{X}_n \oplus s_n(X_n).$$

Sei nun C ein Komplex und C^- der Komplex, der aus C durch Erniedrigen der Dimension um 1 entsteht,

$$C_n^- = C_{n+1}, \ n \geq 0; \quad (\partial : C_n^- \to C_{n-1}^-) = (\partial : C_{n+1} \to C_n), \ n > 0.$$

Z.B. ist nach (3. 11) : $N\overline{X} = (NX)^-$.

3. 13. Hilfssatz. — *Die Funktoren* KC^- *und* $\overline{KC}$ *sind natürliche äquivalent.*

Beweis. — Ist $\xi : [n+1] \to [q+1]$ eine surjektive monotone Abbildung mit $\xi(n) = \xi(n+1)$, dann bildet ∂_{n+1} den Summanden $C_{r(\xi)}$ von $(KC)_{n+1}$ identisch auf $C_{r(\xi')}$ ab, wo $\xi' = \xi\varepsilon^{n+1}$; ist dagegen $\xi(n) \neq \xi(n+1)$, dann ist $\partial_{n+1}|C_{r(\xi)} = 0$ (vgl. 3. 4). Andererseits bedeutet $\xi(n) \neq \xi(n+1)$ gerade, daß ξ sich in der Form $\tilde{\eta}$ mit $\eta : [n] \to [q]$ schreiben läßt. Daher ist

$$\overline{KC}_n = \text{Kern}\ (\partial_{n+1} : KC_{n+1} \to KC_n) \cong \bigoplus_{d(\eta)=n} C_{r(\tilde{\eta})}.$$

Wegen

$$C^-_{r(\eta)} = C_{r(\eta)+1} = C_{r(\tilde{\eta})}$$

erhalten wir also durch direkte Summenbildung einen Isomorphismus

$$(3.\ 15) \qquad (KC^-)_n = \bigoplus_{d(\eta)=n} C^-_{r(\eta)} = \bigoplus_{d(\eta)=n} C_{r(\tilde{\eta})} = \overline{KC}_n,$$

und es bleibt nur zu zeigen, daß es sich dabei um einen s.s. Morphismus handelt. Das folgt aber ohne Schwierigkeiten aus 3. 4 und $\widetilde{\eta\alpha} = \tilde{\eta}\tilde{\alpha}$.

Beweis für 3. 6. — Wir definieren eine natürliche Transformation $\Phi = \Phi(C) : C \to NKC$, indem wir C_n identisch auf den Summanden $C_{r(\iota[n]}$ von $(KC)_n$ abbilden. Wir behaupten, daß dieser Summand mit $(NKC)_n$ übereinstimmt, d.h. daß Φ eine natürliche Aquivalenz ist.

Der Beweis wird durch Induktion nach n geführt. Für $n=0$ ist die Behauptung klar. Aus 3. 11, 3. 15, der Induktionsvoraussetzung, 3. 15 in dieser Reihenfolge erhalten wir

$$(NKC)_{n+1} = (N\overline{KC})_n \cong (NKC^-)_n = C^-_{r(\iota[n])} = C_{r(\iota[n+1])}.$$

Die zweite gesuchte natürliche Transformation

$$\Psi = \Psi(X) : KNX \to X$$

wird durch ihre Einschränkungen auf die Summanden $(NX)_{r(\eta)}$ von $(KNX)_n$ erklärt und zwar durch das kommutative Diagramm

$$\text{(3. 16)} \qquad \begin{array}{ccc} (NX)_{r(\eta)} & \xrightarrow{\Psi} & X_n \\ \| & & \uparrow X_\eta, \\ (NX)_q & \xrightarrow{\subset} & X_q \end{array} \qquad \text{wo} \qquad \eta : [n] \to [q].$$

Aus 3. 4 folgt leicht, daß Ψ ein s.s. Morphismus ist; wir haben zu zeigen, daß ein Isomorphismus vorliegt.

Aus der Definition ergibt sich, daß $N\Psi(X) : NKNX \to NX$ mit $(\Phi(NX))^{-1}$ übereinstimmt, also eine Äquivalenz ist. Die Behauptung folgt daher aus dem.

3. 17. Hilfssatz. — *Ist* $f : X \to Y$ *ein s.s. Morphismus und ist* $(Nf)_i : (NX)_i \to (NY)_i$ *monomorph (epimorph) für* $i \leq n$, *dann ist* $f_n : X_n \to Y_n$ *monomorph (epimorph).*

Beweis durch Induktion nach n. — Für $n=0$ ist die Behauptung klar. Ist $(Nf)_i$ epimorph (monomorph) für $i \leq n$, dann auch $(N\bar{f})_j$ für $j < n$ (s. 3. 11), also f_{n-1} und $\bar{f}_{n-1}$ epimorph (monomorph) nach Induktionsvoraussetzung, also f_n epimorph (monomorph) wegen 3. 12.

3. 18. Aus der Definition der Operatoren $(KC)_\alpha$ folgt, daß die Teilsumme $\bigoplus C_{r(\eta)}$ von $(KC)_n$ mit $d(\eta) = n$, $\eta \neq \iota[n]$ gerade der « ausgeartete Teil » (s. [12,] 4) von $(KC)_n$ ist, d.h. mit

$(\mathrm{DKC})_n = \bigcup_{j=0}^{n-1} \mathrm{Bild}\ (s_j : \mathrm{KC}_{n-1} \to \mathrm{KC}_n)$ ([5]) übereinstimmt. Der verbleibende Summand $\mathrm{C}_{r(\iota[n])}$ dagegen stimmt mit $(\mathrm{NKC})_n$ überein, wie die Äquivalenz Φ zeigt. Da nach 3. 6 jedes s.s. Objekt X bis auf Isomorphie von der Form KC ist, folgt

(3. 19) $$\mathrm{X}_n \cong (\mathrm{NX})_n \oplus (\mathrm{DX})_n$$

wo $(\mathrm{DX})_n = \bigcup_{j=0}^{n-1} \mathrm{Bild}\ (s_j : \mathrm{X}_{n-1} \to \mathrm{X}_n)$ ([5]) den ausgearteten Teil bezeichnet. Überdies ist $\mathrm{DX} = \{(\mathrm{DX})_n\}$ wie man leicht verifiziert (vgl. [12], 4) ein Unterkomplex von $k\mathrm{X}$ (s. 2. 1), und 3. 19 ist eine direkte Summe von Komplexen

(3. 20) $$k\mathrm{X} \cong \mathrm{NX} \oplus \mathrm{DX}.$$

Daraus folgt

(3. 21) $$\mathrm{NX} \cong \mathrm{X}/\mathrm{DX},$$

d.h. der normale Komplex NX stimmt bis auf natürliche Isomorphie mit dem normalisierten Komplex X/DX (s. [12], 4) überein.

3. 22. Satz (Eilenberg-MacLane). — *Die natürliche Inklusion* $\mathrm{NX} \to k\mathrm{X}$ *ist eine Homotopieäquivalenz. Der Komplex* DX *ist nullhomotop.*

Der Beweis [12], 4 läßt sich ohne weiteres übertragen (man beachte 3. 20). Wir skizzieren einen anderen Beweis, der die Aushängung benutzt. Dazu betrachten wir den dimensionserhöhenden Morphismus

$$s : \mathrm{X} \to \mathrm{X}, \quad s|\mathrm{X}_n = (-1)^n s_n : \mathrm{X}_n \to \mathrm{X}_{n+1}$$

Die s.s. Identitäten $\partial_i s_n = s_{n-1}\partial_i$, $i < n$, und $\partial_n s_n = \partial_{n+1} s_n = \iota$ ergeben

(3. 23) $$\partial s + s\partial = -s_{n-1}\partial_n = (\iota - s_{n-1}\partial_n) - \iota.$$

Dies zeigt, daß

$$(\iota - s_{n-1}\partial_n) : \mathrm{X}_n \to \mathrm{X}_n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

([5]) Sind $\varphi_i : \mathrm{A}_i \to \mathrm{A}$, $i = 1, 2, \ldots, r$, Morphismen in $\mathfrak{A}$, dann ist nach Definition $\bigcup_i \mathrm{Bild}\ (\varphi_i) = \mathrm{Bild}\ (\varphi)$, wo $\varphi : \oplus_i \mathrm{A}_i \to \mathrm{A}$ den Morphismus mit den Komponenten φ_i bezeichnet.

ein der Identität homotoper Kettenmorphismus $\bar{X} \to \bar{X}$ ist; in der Dimension 0 ist er gleich der Identität (s_{-1} ist $= 0$ zu setzen). Für $n > 0$ liegt eine Projektion auf $\bar{X}$ vor:

$$(\iota - s_{n-1}\partial_n)(\bar{X}_n) \subset \bar{X}_{n-1}, \qquad (\iota - s_{n-1}\partial_n)|\bar{X}_{n-1} = \iota(\bar{X}_{n-1})$$

Dies folgt sofort aus der Definition der Aushängung.

Nun ist aber die Aushängung selbs ein s.s. Objekt. Man kann die Konstruktion also iterieren. Da die Operatoren ∂_i, s_i von $\bar{X}$ durch Beschränkung der ∂_i, s_i von X gewonnen wurden, erhält man durch ∞-fache Iteration (in jeder Dimension bricht sie ab):

Die Morphismen

$$p_n = (\iota - s_0\partial_1)(\iota - s_1\partial_2) \dots (\iota - s_{n-1}\partial_n) : X_n \to X_n$$

bilden einen zur Identität homotopen Kettenmorphismus $p: kX \to kX$. p *ist eine Projektion von* kX *auf* NX, *d.h.*

$$\text{Bild }(p) \subset \text{NX}, \qquad p|\text{NX} = \iota(\text{NX}).$$

Damit ist 3. 22 bewiesen. — Der Kern von p ist übrigens gerade DX.

3. 24. Bemerkung. — *Man kann in den vorstehenden Betrachtungen die Rolle des ersten Seitenoperators mit der des letzten vertauschen.*

Um dies einzusehen, definieren wir Abbildungen

(3. 25) $\tau_n : [n] \to [n], \quad \tau_n(i) = n - i, \quad i = 0, 1, \dots, n,$

und setzen

(3. 26) $\alpha^* = \tau_n \alpha \tau_m$ für jedes monotone $\alpha : [m] \to [n]$.

Offenbar ist $(\alpha\beta)^* = \alpha^*\beta^*$, $(\alpha^*)^* = \alpha$. Die Zuordnung $\alpha \to \alpha^*$ ist also ein involutiver Automorphismus der Kategorie der monotonen Abbildungen. Er überträgt sich auf die Kategorie der s.s. Objekte X:

(3. 27) $(X^*)_n = X_n, \quad (X^*)_\alpha = X_{\alpha^*},$

und es ist $(X^*)^* = X$.

Dabei hat sich nun die Reihenfolge der Seiten- und Ausartungsoperatoren umgekehrt: *Der erste Operator von* X *ist der*

letzte von X^* *usw.* Ferner kann man N und K in 3. 6-3. 8 durch die folgenden Funktoren N^*, K^* ersetzen

(3. 28) $$N^*X = N(X^*), \qquad K^*C = (KC)^*,$$

denn $N^*K^* = NK$, $K^*N^*X = (KN(X^*))^* \cong X^{**} = X$. Allgemeiner gilt

3. 29. Satz. — *Es gibt eine natürliche Äquivalenz* $X \cong X^*$.

Beweis. Die Abbildungen

(3. 30) $$(-1)^n\iota : X_n \to X_n, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

definieren einen Isomorphismus $kX \cong k(X^*)$ (s. 2. 1), denn bis auf die Reihenfolge sind die Seitenoperatoren von X und X^* ja dieselben; 3. 30 ist natürlich kein s.s. Morphismus. Durch Übergang zu den Quotienten entsteht aus 3. 30 ein Isomorphismus $j : X/DX \cong X^*/DX^*$ (man beachte $(DX)_n = (DX^*)_n$). Wegen 3. 21 können wir auch schreiben $j : NX \cong N(X^*)$. Anwenden des Funktors K und 3. 6 ergeben dann einen natürlichen Isomorphismus $J : X \cong X^*$, wie behauptet.

Wir notieren nun noch, daß die Funktoren N und K Homotopien erhalten, genauer

3. 31. Satz. — (a) *Zwei s.s. Morphismen* $f_0, f_1 : X \to Y$ *sind genau dann homotop, wenn* $Nf_0, Nf_1 : NX \to NY$ *kettenhomotop sind.*

(b) *Zwei Kettenmorphismen* $\varphi_0, \varphi_1 : C \to D$ *sind genau dann kettenhomotop, wenn* $K\varphi_0 \cong K\varphi_1$.

Der Beweis in [9], 2. 6 läßt sich ohne weiteres übertragen; wir haben lediglich eine Bemerkung über das dort auftretende Tensorprodukt zu machen.

3. 32. Das Tensorprodukt $G \otimes A$, $A \in \mathfrak{A}$, $G =$ endlich erzeugte abelsche Gruppe.

Es sei zunächst F eine freie abelsche Gruppe mit endlicher Basis $\{\nu_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Wir setzen

(3. 33) $$(F, \{\nu_i\}) \otimes A = \oplus_{i=1}^m A_i \qquad \text{mit} \qquad A_i = A.$$

Ist F', $\{\nu'_j\}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ eine zweite solche Gruppe und

(3. 34) $$f : F \to F', \qquad f(\nu_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\nu'_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

ein Homorphismus, dann definiert dieselbe Matrix (a_{ij}) einen Morphismus $\bigoplus_{i=1}^{m} A_i \to \bigoplus_{j=1}^{n} A_j$ (mit den Komponenten $a_{ji}\iota(A)$), den wir auch mit

$$(3.\,35) \qquad f \otimes A : (F, \{\nu_i\}) \otimes A \to (F', \{\nu'_j\}) \otimes A$$

bezeichnen.

Das Produkt $(F, \{\nu_i\}) \otimes A$ wird damit zu einem kovarianten Funktor der Variablen $(F, \{\nu_i\})$. Ist insbesondere $F = F'$ und sind

$$(F, \{\nu_i\}) \xrightarrow{f} (F', \{\nu'_j\}) \xrightarrow{g} (F, \{\nu_i\})$$

die identischen Homorphismen, dann folgt $(g \otimes A)(f \otimes A) = \iota$, $(f \otimes A)(g \otimes A) = \iota$, d.h. $f \otimes A$, $g \otimes A$ sind reziproke Äquivalenzen. $(F, \{\nu_i\}) \otimes A$ ist also bis auf Äquivalenz unabhängig von der Basis $\{\nu_i\}$, und wir können

$$(3.\,36) \qquad F \otimes A \cong (F, \{\nu_i\}) \otimes A$$

setzen. Dieses *Tensorprodukt* $F \otimes A$ ist ein kovarianter additiver Funktor der beiden Variablen F, A (für die erste Variable vgl. 3. 35, für die zweite ist das klar nach 3. 33) mit Werten in $\mathfrak{A}$.

Für unsere Zwecke (s. 3. 31 und § 5) würde diese Definition bereits genügen. (Übrigens haben wir bisher nur benutzt, daß $\mathfrak{A}$ additiv ist). Im allgemeinen Fall stellt man G als Faktorgruppe einer endlich erzeugten freien Gruppe F dar,

$$R \xrightarrow{f} F \to G \to 0$$

und setzt

$$(3.\,37) \qquad G \otimes A \cong \operatorname{Kokern}(R \otimes A \xrightarrow{f \otimes A} F \otimes A).$$

Wir verzichten auf den Nachweis, daß dies einen wohlbestimmten Funktor der beiden Variablen G, A definiert.

Wenn man die Beschränkung auf *endlich* erzeugte Gruppen G vermeiden will, muß man voraussetzen, daß in $\mathfrak{A}$ direkte Summen $\bigoplus_\lambda A$ mit beliebig vielen Summanden existieren.

4. — DERIVIERTE EINES BELIEBIGEN FUNKTORS

Es seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ *abelsche* Kategorien und $T : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$ ein Funktor. Ist T additiv, dann lassen sich bekanntlich Derivierte (oder Satelliten) von T definieren (s. [7], [16]), vorausgesetzt, daß es hinreichend viele projektive bezw. injektive Objekte in $\mathfrak{A}$ gibt.

Wir zeigen nun, wie sich diese Definitionen mit Hilfe der Ergebnisse in § 1-3 auf beliebige Funktoren T verallgemeinern lassen. Dabei können wir uns auf *Links*derivierte eines *kovarianten* Funktors T in *einer* Variablen beschränken (s. Einleitung und § 9). Wir geben dann einige elementare Eigenschaften dieser Derivierten und diskutieren verschiedene Beispiele. Weitere Eigenschaften werden sich aus der « Bar-Konstruktion » ergeben (s. § 6).

Wir setzen von der Kategorie $\mathfrak{A}$ voraus, daß sie hinreichend viele projektive Objekte enthält, d.h. daß jedes $A \in \mathfrak{A}$ Quotient eines projektiven $P \in \mathfrak{A}$ ist (s. [16], 1. 10).

4. 1. S.S. Auflösungen. — Es sei A ein Objekt aus $\mathfrak{A}$ und $n \geqslant 0$ eine ganze Zahl. Eine *s.s. Auflösung von* (A, n) ist ein Paar (X, ξ), bestehend aus einem s.s. Objekt X mit $X_i = 0$ für $i < n$, $H_i(X) = 0$ für $i > n$, und einem Isomorphismus $\xi : H_n(X) \cong A$. Zur Vereinfachung der Schreibweise werden wir im folgenden stets $H_n(X)$ mit A identifizieren; wir lassen also das Symbol ξ weg, schreiben $H_n(X) = A$ und bezeichnen X selbst als s.s. Auflösung von (A, n).

Eine s.s. Auflösung X von (A, n) heißt *projektiv*, falls alle X_i projektiv sind. Aus 3. 22 und 3. 8 folgt

4. 2. *Ein s.s. Objekt* X *ist genau dann eine* (*projektive*) *s.s. Auflösung von* (A, n), *wenn* NX *eine* (*projektive*) *Auflösung*

von (A, n) *im üblichen Sinne* ([7], V. 1 oder [16], S. 143, Fußnote 3)) *ist.*

Daraus ergibt sich.

4. 3. *Jedes* (A, n) *besitzt eine projektive s.s. Auflösung.*

Beweis. — Ist C eine projektive Auflösung von (A, n) im üblichen Sinne (sie existiert, weil es hinreichend viele projektive Objekte in $\mathfrak{A}$ gibt), dann ist KC (s. 3. 2) eine projektive s.s. Auflösung von (A, n) (denn $\mathrm{NKC} \cong \mathrm{C}$; s. 3. 6).

4. 4. *Es seien* $\alpha : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ *ein Morphismus aus* $\mathfrak{A}$ *und* X, Y *projektive s.s. Auflösungen von* (A, n), (B, n). *Dann gibt es einen s.s. Morphismus* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *mit* $\alpha = \mathrm{H}_n(f) : \mathrm{H}_n(\mathrm{X}) \to \mathrm{H}_n(\mathrm{Y})$, *und je zwei solche s.s. Morphismen sind homotop. Insbesondere sind je zwei projektive Auflösungen von* (A, n) *homotopieäquivalent.* (Vgl. [7], V, 1).

Beweis. — Es gibt einen bis auf Homotopie bestimmten Kettenmorphismus $\varphi : \mathrm{NX} \to \mathrm{NY}$ mit $\mathrm{H}_n(\varphi) = \alpha$ (s. [7], V. 1). Daraus folgt die Behauptung wegen 3. 7 und 3. 31.

4. 5. Die Definition der Derivierten erfolgt nun nach bekanntem Muster: Sei $\mathrm{T} : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ ein Funktor und $\alpha : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ ein Morphismus aus $\mathfrak{A}$. Wir wählen projektive s.s. Auflösungen X, Y von (A, n), (B, n) und einen s.s. Morphismus $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ mit $\mathrm{H}_n(f) = \alpha$. Wir haben gesehen, daß X, Y und f bis auf Homotopie bestimmt sind. Nach 1.15 sind also auch TX, TY, Tf bis auf Homotopie und demnach HTX, HTY, HTf bis auf natürliche Isomorphie bestimmt. Wir setzen

$$(4.\,6) \quad \mathrm{L}_q\mathrm{T}(\mathrm{A}, n) = \mathrm{H}_q\mathrm{TX}, \qquad \mathrm{L}_q\mathrm{T}(\alpha, n) = \mathrm{H}_q\mathrm{T}f$$

und definieren damit einen neuen kovarianten Funktor $\mathrm{L}_q\mathrm{T}(\ , n) : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$, den *q-ten* (*links-*) *derivierten Funktor n-ter Stufe von* T.

Ist X eine s.s. Auflösung von (A, n), dann ist kX (s. 2. 1) eine Auflösung von (A, n) im üblichen Sinne. Für einen additiven Funktor T gilt ferner $k\mathrm{TX} = \mathrm{T}k\mathrm{X}$ (s. [7], IV. 5); daher folgt.

4. 7. *Ist* T *additiv, dann ist* $\mathrm{L}_q\mathrm{T}(\ , n)$ *äquivalent zu* $\mathrm{L}_{q-n}\mathrm{T}$, *dem* ($q - n$)*-ten Derivierten von* T *im Sinne von* [7].

Im nicht-additiven Fall ist im allgemeinen $k\mathrm{TX} \neq \mathrm{T}k\mathrm{X}$: Der Randoperator in $k\mathrm{TX}$ ist $\Sigma(-1)^i\mathrm{T}(\partial_i)$, in $\mathrm{T}k\mathrm{X}$ dagegen $\mathrm{T}(\Sigma(-1)^i\partial_i)$ (falls $\mathrm{T}0 = 0$). Indessen hängen auch im nicht-additiven Fall die Derivierten mit gleichem $q - n$ zusammen nämlich vermöge der Einhängung

$$\sigma : \mathrm{L}_q\mathrm{T}(\ \ , n) \to \mathrm{L}_{q+1}\mathrm{T}(\ \ , n+1),$$

die wir in § 8 untersuchen werden. Im nicht-additiven Fall ist sie jedoch im allgemeinen keine Äquivalenz.

4. 8. Etwas allgemeiner als in 4. 5 sei A jetzt eine Folge $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots$ von Objekten in $\mathfrak{A}$ (ein *graduiertes Objekt* über $\mathfrak{A}$). Für jedes $n \geq 0$ sei X^n eine projektive s.s. Auflösung von (A_n, n) Dann bezeichnen wir die direkte Summe $\mathrm{X} = \bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathrm{X}^n$ als *projektive s.s. Auflösung von* A; diese Summe existiert, weil $\mathrm{X}_i = \bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathrm{X}_i^n \cong \bigoplus_{n=0}^{i}\mathrm{X}_i^n$ nur aus endlich vielen Summanden besteht. Entsprechend verfahren wir mit « graduierten » Morphismen $\alpha = \{\alpha_n : \mathrm{A}_n \to \mathrm{B}_n\}$: wir konstruieren $f^n : \mathrm{X}^n \to \mathrm{Y}^n$, $n = 0, 1, \ldots$, wie oben und erhalten in der direkten Summe $\bigoplus_{n=0}^{\infty} f^n = f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ einen Morphismus der projektiven Auflösungen mit $\mathrm{H}(f) = \alpha$, dessen Homotopieklasse durch α bestimmt ist. Wie in 4. 6 können wir also einen Funktor LT, *den (links-) derivierten Funktor von* T, durch

$$(4.9) \qquad \mathrm{LT}(\mathrm{A}) = \mathrm{HTX}, \qquad \mathrm{LT}(\alpha) = \mathrm{HT}f$$

definieren. LT *ist ein Funktor von graduierten Objekten über* $\mathfrak{A}$ *zu graduierten Objekten über* $\mathfrak{A}'$.

4. 10. Beispiel (a). — Es sei $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$ die Kategorie der Moduln über einem kommutativen Ring Λ. Für jedes $\mathrm{A} \in \mathfrak{A}$ sei $\bigotimes^m \mathrm{A} = \mathrm{A} \otimes \mathrm{A} \otimes \cdots \otimes \mathrm{A}$ die m-te Tensorpotenz von A. Die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}(m)$ operiert in $\bigotimes^m \mathrm{A}$ durch Vertauschung der Faktoren, ebenso jede Untergruppe $\pi \subset \mathfrak{S}(m)$. Wie in [9], 6. 2 definieren wir das π-*Produkt von* A,

$$\mathrm{TA} = \bigotimes^m \mathrm{A}/\pi,$$

als Quotienten von $\bigotimes^m \mathrm{A}$ nach dem Untermodul, der von den Elementen $y - \gamma(y)$ mit $y \in \bigotimes^m \mathrm{A}$, $\gamma \in \pi$, erzeugt wird.

Ist Λ ein nullteilerfreier Hauptidealring und X ein freies s.s. Objekt über $\mathfrak{A}$(= freier s.s. Modul = freier FD-Modul

über Λ), dann hängt HTX nur von H(X) ab (s. [9], 5. 11). Daraus folgt

$$\text{(4. 11)} \qquad H(\otimes^m X/\pi) \cong LTH(X).$$

Durch geometrische Realisierung überträgt sich dieses Ergebnis auf das π-Produkt $\times^m P/\pi$ von Polyedern (CW-Komplexen), das ganz analog wie $\otimes^m A/\pi$ zu definieren ist. Man erhält (vgl. [9], 7)

$$\text{(4. 12)} \qquad H(\times^m P/\pi) \cong LTH(P;\ \Lambda).$$

Eine 4. 11 oder 4. 12 entsprechende Gleichung für Abbildungen gilt dagegen nicht: Ist $g : X \to X'$ eine s.s. Abbildung zwischen freien s.s. Moduln (oder auch eine stetige Abbildung zwischen Polyedern), dann ist im allgemeinen $H(Tg) \neq LTH(g)$ Das liegt daran, daß man in 4. 8 zur Definition von $LT(\alpha)$ eine « direkte Summenabbildung » f verwenden muß und nicht etwa eine beliebige Abbildung $X \to X'$, die α induziert. Für ein Bespiel vgl. [9], 4. 5.

4. 13. *Beispiel* (b). — Wir betrachten noch einmal die Operation von π in $\otimes^m A$ (s. 4. 10) und setzen nun

$$TA = (\otimes^m A)^\pi$$

= Modul der bei π invarianten Elemente von $\otimes^m A$, das sind die Elemente $x \in \otimes^m A$ mit $x = \gamma(x)$ für alle $\gamma \in \pi$.

Für $\pi = \mathfrak{S}(m)$ und *freie* A stimmt T mit dem Funktor Γ_m von Eilenberg-MacLane überein (s. [5], Exp. 8. 4; dort S_m). Daraus folgt

$$\text{(4. 14)} \qquad LT \cong L\Gamma_m, \qquad \text{falls} \qquad \pi = \mathfrak{S}(m),$$

denn zur Bestimmung von LT braucht man T nur auf freien (projektiven) Objekten und Morphismen zwischen solchen zu kennen. — Man beachte aber, daß für nicht-freie A im allgemeinen $TA \ncong \Gamma_m A$ ist.

Aus 4. 14 folgt insbesondere (analog zu 4. 11)

$$H((\otimes^m X)^{\mathfrak{S}(m)}) \cong L\Gamma_m(H(X)),$$

falls X ein freier s.s. Modul über einem nullteilerfreien Hauptidealring Λ ist.

4. 15. *Beispiel* (c). — In den beiden folgenden Beispielen ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$ die Kategorie der abelschen Gruppen. G sei eine feste abelsche Gruppe. Für jedes $A \in \mathfrak{A}$ sei

$$TA = \mathbf{Z}A \otimes G, \qquad T'A = SA(A) \otimes G.$$

Dabei bezeichnet $\mathbf{Z}A$ den Gruppenring von A über den ganzen Zahlen $\mathbf{Z}$ und SA(A) die symmetrische Algebra von A (s. [8], Ch. V, 18).

4. 16. Satz. — *Die Derivierten* $L_qT(A, n)$, $n \geq 0$, *und* $L_qT'(A, n)$, $n > 0$, *sind mit den Eilenberg-MacLane-Funktoren* $H_q(A, n; G)$ *äquivalent.*

Beweis. — Im Falle des Funktors T folgt dies fast unmitelbar aus der Definition: Eine (nicht notwendig projektive) s.s. Auflösung X von (A, n) ist ein s.s. (abelscher Gruppen-) Komplex, dessen einzige nicht verschwindende Homotopiegruppe π_n mit A übereinstimmt (s. [22], 2 App. A oder [24], 1. 4). D. h. X ist ein Eilenberg-MacLane-Komplex K(A, n), und TX ist sein Kettenkomplex mit Koeffizienten in G, also in der Tat $HTX = H(A, n; G)$, wie behauptet.

Nun zum Funktor T'. Y sei eine zusammenhängende s.s. Menge (= c.s.s. Komplex) mit Basispunkt P, deren einzige nicht verschwindende Homologiegruppe positiver Dimension $H_n(Y, \mathbf{Z}) = A$ ist (ein « Moore-Komplex »). Ferner sei $\mathbf{Z}(Y, P)$ sein FD-Komplex modulo P, d.i. die von Y erzeugte freie abelsche s.s. Gruppe $\mathbf{Z}Y$, dividiert durch $\mathbf{Z}P$. Die einzige nicht verschwindende Homologiegruppe von $\mathbf{Z}(Y, P)$ ist

$$H_n\mathbf{Z}(Y, P) = A.$$

$\mathbf{Z}(Y, P)$ ist also bis auf Homotopieäquivalenz eine s.s Auflösung X von (A, n) (s. [10], 5. 3). Also ist auch $T'\mathbf{Z}(Y, P) \simeq T'X$ und

$$HT'\mathbf{Z}(Y, P) = HT'X = LT'(A, n).$$

Andererseits ist $SA(\mathbf{Z}(Y, P))$ isomorph mit $\mathbf{Z}SP^\infty Y$, dem FD-Komplex des unendlichen symmetrischen Produktes von Y (s. [9], 10. 10.) Nach [25], 3. 7 oder [28], 7 ist aber $SP^\infty Y$ ein Eilenberg-MacLane-Komplex K(A, n), also in der Tat

$$LT'(A, n) = HT'\mathbf{Z}(Y, P) = H((\mathbf{Z}SP^\infty Y) \otimes G) = H(A, n; G).$$

4. 17. *Beispiel* (d). — Es seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ wie in 4. 15, und es sei TA die Tensoralgebra von $A \in \mathfrak{A}$. Ist P ein zusammenhängendes Polyeder, dann gibt LTH(P) die Homologie des Wegeraums der Einhängung von P, $LTH(P) \cong H\Omega SP$ (vgl. [9], 11).

4. 18. MISCH-EFFEKTE (cross-effects). — Die Beispiele 4. 16 zeigen, daß die Derivierten eines nicht-additiven Funktors sehr kompliziert sein können (z. B. ∞-dimensional), auch wenn das Argument A projektiv ist. Wir werden nun aber sehen (s. 4. 22), daß die homologische Dimension von A doch einen gewissen Einfluß auf LTA hat, jedenfalls dann, wenn T ein Funktor *endlichen Grades* ist. Dieser Begriff des Grades hängt eng mit dem des *Mischeffektes* zusammen. Wir erinnern kurz daran und verweisen im übrigen auf [13], 9.

$T : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ sei ein kovarianter Funktor mit $T0 = 0$. Die Mischeffekte eines solchen Funktors messen seine Abweichung von der Additivität. Der *k-te Mischeffekt*, $k = 1, 2, \ldots$, ist ein kovarianter Funktor $T_k(A_1, \ldots, A_k)$ von k Variablen $A_j \in \mathfrak{A}$ mit Werten in $\mathfrak{A}'$. Es bestehen die folgenden Beziehungen, welche die Funktoren T_k charakterisieren (s. [13], 9. 1, 9. 6).

Es gibt natürliche Äquivalenzen

$$(4.19)\qquad T(A_1 \oplus \cdots \oplus A_k) \cong \bigoplus\nolimits_\sigma T_s(A_{\sigma_1}, \ldots, A_{\sigma_s}),$$

so daß für jede nicht-leere Teilmenge τ von $(1, 2, \ldots, k)$ die Diagramme

$$(4.20)\qquad \begin{array}{ccc} T(A_1 \oplus \cdots \oplus A_k) & \cong & \bigoplus_\sigma T_s(A_{\sigma_1}, \ldots, A_{\sigma_s}) \\ {\scriptstyle T(\lambda_\tau)}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle I_\tau} \\ T(A_{\tau_1} \oplus \cdots \oplus A_{\tau_t}) & \cong & \bigoplus_{\sigma \subset \tau} T_s(A_{\sigma_1}, \ldots, A_{\sigma_s}) \end{array}$$

$$(4.21)\qquad \begin{array}{ccc} T(A_1 \oplus \cdots \oplus A_k) & \cong & \bigoplus_\sigma T_s(A_{\sigma_1}, \ldots, A_{\sigma_s}) \\ {\scriptstyle T(q_\tau)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle P_\tau} \\ T(A_{\tau_1} \oplus \cdots \oplus A_{\tau_t}) & \cong & \bigoplus_{\sigma \subset \tau} T_s(A_{\sigma_1}, \ldots, A_{\sigma_s}) \end{array}$$

kommutativ sind. Die Summe in 4. 19 erstreckt sich über alle nicht-leeren Teilmengen σ von $(1, 2, \ldots, k)$, die Morphismen λ_τ und I_τ sind jeweils die Injektionen von Teilsummen in die ganze Summe, und q_τ, P_τ sind die Projektionen auf diese Teilsummen.

Z.B. ist $T_1 = T$,

$$T(A \oplus B) \cong TA \oplus TB \oplus T_2(A, B),$$
$$T(A \oplus B \oplus C) \cong TA \oplus TB \oplus TC \oplus T_2(A, B) \oplus T_2(B, C) \oplus T_2(A, C) \oplus T_3(A, B, C).$$

Auch im Falle $T0 \neq 0$ kann man durch 4.19-4.21 eindeutig Mischeffekte T_k, $k \geq 0$, definieren, vorausgesetzt daß man auch die leeren Teilmengen σ, τ von $(1, 2, \ldots, k)$ zuläßt. Man hat dann $T_0 = T0 =$ konstant,

$$TA \cong T_0 \oplus T_1 A, \qquad T(A \oplus B) \cong T_0 \oplus T_1 A \oplus T_1 B \oplus T_2(A, B), \text{ usw.}$$

Ein Funktor ist *vom Grade* $\leq k$, wenn sein $(k+1)$-ter Mischeffekt null ist. Dann sind auch alle höheren Mischeffekte null. T ist genau dann vom Grade $\leq k$, wenn der k-te Mischeffekt multilinear ist. Insbesondere sind die Funktoren T vom Grade ≤ 1 (und mit $T0 = 0$) gerade die additiven Funktoren. Die Beispiele 4. 10, 4. 13 sind Funktoren vom Grade genau m.

4. 22. Satz. — *Es sei* T *ein Funktor vom Grade* $\leq k$, *und die projektive Dimension* (s. [7], VI. 2) *von* $A \in \mathfrak{A}$ *sei* $\leq r$. *Dann ist*

$$L_q T(A, n) = 0 \quad \textit{für} \quad q > k(n + r).$$

Beweis. — Die Voraussetzung über die projektive Dimension von A besagt, daß es eine (gewöhnliche) projektive Auflösung C von (A, n) gibt mit $C_i = 0$ für $i > n + r$. Dann ist KC eine projektive s.s. Auflösung X von (A, n) mit $(NX)_i = 0$ für $i > n + r$. Wegen $H(Y) = H(NY)$ (s. 3. 22) folgt die Behauptung daher aus dem.

4. 23. Hilfssatz. — *Es sei* T *ein kovarianter Funktor vom Grade* $\leq k$, *und* X *sei ein s.s. Objekt mit* $(NX)_i = 0$ *für* $i > m$. *Dann ist* $(NTX)_q = 0$ *für* $q > km$.

Beweis. — Wir können $X = KC$ annehmen (s. 3. 6). Wegen $C_i = 0$ für $i > m$ sind in $(KC)_q = \bigoplus_{d(\eta)=q} C_{r(\eta)}$ nur die Summanden mit $r(\eta) \leqslant m$ evtl. von null verschieden.

Bilden wir nun TKC. Nach 4. 19 ist $(TKC)_q = T(\bigoplus_{d(\eta)=q} C_{r(\eta)})$ eine direkte Summe von Ausdrücken $T_s(C_{r(\eta_1)}, \ldots, C_{r(\eta_s)})$. Wegen Grad $(T) \leq k$ können wir $s \leq k$ voraussetzen, außerdem wie schon bemerkt, $r(\eta_\nu) \leq m$. Die Abbildung $\eta_\nu : [q] \to [r(\eta_\nu)]$ hat also höchstens m Sprungstellen, und die Sprungstellen aller

η_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, s$, teilen das Intervall $[q]$ in höchstens $km + 1$ Stücke. Ist $q > km$, dann gibt es demnach ein Stück, in welchem mehr als eine ganze Zahl liegt, d.h. es gibt ganze Zahlen j, $j + 1 \in [q]$ mit $\eta_\nu(j) = \eta_\nu(j + 1)$ für alle ν. Dann kann man aber von η_ν den Faktor η^j (s. 1. 2) abspalten,

$$\eta_\nu = \eta'_\nu \eta^j,$$

also

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_s(\mathrm{C}_{r(\eta_1)}, \ldots, \mathrm{C}_{r(\eta_s)}) &= \mathrm{T}_s(\mathrm{KC}_{\eta^j}(\mathrm{C}_{r(\eta'_1)}), \ldots, \mathrm{KC}_{\eta^j}(\mathrm{C}_{r(\eta'_s)}) \\ &= (\mathrm{TKC})_{\eta^j}(\mathrm{T}_s(\mathrm{C}_{r(\eta'_1)}, \ldots, \mathrm{C}_{r(\eta'_s)}) \subset \text{Bild } (\mathrm{TKC})_{\eta^j} = \text{Bild } (s_j). \end{aligned}$$

TKC ist also ausgeartet (s. 3. 18) oberhalb der Dimension km, also (s. 3. 21) $(\mathrm{NTX})_q \cong (\mathrm{TX}/\mathrm{DTX})_q = 0$ für $q > km$, wie behauptet.

5. — EINHÄNGUNG

Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ abelsche Kategorien und $T : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ ein (eventuell nicht additiver) kovarianter Funktor mit $T(0) = 0$. Zu jedem s.s. Objekt X über $\mathfrak{A}$ werden wir die *Einhängung* SX und den *Einhängungsmorphismus* $\sigma = \sigma_X(T) : H_q TX \to H_{q+1} TSX$ definieren. Wir geben ferner Verallgemeinerungen dieses Begriffs auf Funktoren mehrerer Variabler an und beweisen einige einfache Ergebnisse über den Einhängungsmorphismus. Weitere Resultate werden sich aus der « Bar-Konstruktion » im nächsten Paragraphen ergeben.

5. 1. Sei A ein Kettenkomplex über $\mathfrak{A}$. Der *Kegel* CA ist ein Kettenkomplex über $\mathfrak{A}$, der folgendermaßen definiert wird : Es ist $(CA)_q = A_q \oplus A_{q-1}$, und bezeichnet $\varkappa_{q,p} : A_p \to (CA)_q$, $p = q$, $q - 1$, die Injektion, so ist

$$\begin{aligned} \partial^{CA}\varkappa_{q,q} &= \varkappa_{q-1,q-1}\partial^A \\ \partial^{CA}\varkappa_{q,q-1} &= \varkappa_{q-1,q-1} - \varkappa_{q-1,q-2}\partial^A. \end{aligned}$$

Wenn $\mathfrak{A}$ eine Kategorie von abelschen Gruppen ist, bedeutet das

$$\partial^{CA}(a_q, a_{q-1}) = (\partial a_q + a_{q-1}, -\partial a_{q-1}), \quad a_p \in A_p.$$

Definiert man die Morphismen $s : (CA)_q \to (CA)_{q+1}$ durch

$$\begin{aligned} s\varkappa_{q,q} &= \varkappa_{q+1,q} \\ s\varkappa_{q,q-1} &= 0, \end{aligned}$$

d.h. im Spezialfall der abelschen Gruppen

$$s(a_q, a_{q-1}) = (0, a_q),$$

so ist $\partial s + s\partial = \iota =$ Identität, d.h. s ist eine Nullhomotopie von CA.

Die Injektion $\varkappa_{q,q}: A_q \to (CA)_q$ liefert einen Kettenmorphismus $\varkappa: A \to CA$. Den Kokern von $\varkappa$ bezeichnen wir mit $\pi: CA \to SA$ und nennen SA die Einhängung von A. Dann ist $(SA)_q = A_{q-1}$, $\partial^{SA} = -\partial^A$. Wir haben eine exakte Folge

$$(5.\ 2) \qquad 0 \to A \xrightarrow{\varkappa} CA \xrightarrow{\pi} SA \to 0,$$

die als Folge von graduierten Objekten (ohne Randoperator) zerfällt.

5. 3. Vermöge der Äquivalenz zwischen Kettenkomplexen und s.s. Objekten (§ 3) übertragen sich diese Begriffe auf s.s. Objekte. Sei X ein s.s. Objekt über $\mathfrak{A}$. Wir definieren Kegel und Einhängung von X durch

$$\begin{aligned} CX &= KCNX \\ SX &= KSNX, \end{aligned}$$

wobei N und K die Funktoren von 3. 1, 3. 2 sind. Dann ist CX nullhomotop (3. 31), und es besteht die exakte Folge

$$(5.\ 4.) \qquad 0 \to X \xrightarrow{\varkappa} CX \xrightarrow{\pi} SX \to 0,$$

die als Folge von graduierten Objekten wieder zerfällt.

Es ist nicht schwer zu zeigen, daß diese Definition von CX und SX mit der in [11] gleichwertig ist. Wir werden das aber nicht benutzen und übergehen den Beweis.

5. 5. Wendet man den Funktor T auf (5. 4) an, so erhält man

$$TX \xrightarrow{T\varkappa} TCX \xrightarrow{T\pi} TSX.$$

Diese Folge ist i.a. nicht mehr exakt (für nicht-additives T), aber es gilt $(T\pi)(T\varkappa) = T(\pi\varkappa) = T(0) = 0$ (6). Wegen $CX \simeq 0$ ist $TCX \simeq 0$, zunächst als s.s. Objekt (1. 14). Daraus folgt aber $NTCX \simeq N(0) = 0$ (3. 31) und $kTCX \simeq NTCX \simeq 0$ (3. 22), d.h. TCX ist auch als Kettenkomplex nullhomotop.

5. 6. Seien nun allgemein

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

(6) Ferner ist $T\varkappa$ monomorph und $T\pi$ epimorph, weil $\varkappa$ und π als Morphismen von graduierten Objekten (ohne Randoperator) einseitige Inverse haben. Das ist aber an dieser Stelle ohne Bedeutung.

Kettenmorphismen von Komplexen über einer abelschen Kategorie mit $gf = 0$. Sei ferner $B \simeq 0$, d.h. es gibt $s: B_q \to B_{q+1}$ mit $\partial s + s\partial = \iota$. Dann ist $h = gsf: A \to C$ ein Kettenmorphismus vom Grade 1 (d.h. $\partial h = -\partial h$) und induziert $h_*: H_q(A) \to H_{q+1}(C)$.

5. 7. Satz. — *Das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[d, "\gamma"'] \\ A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' \end{tikzcd}$$

sei kommutativ, und beide Zeilen mögen die obigen Voraussetzungen erfüllen. Sind dann s und s' irgend zwei Nullhomotopien von B *bzw.* B' *so ist auch*

$$\begin{tikzcd} H_q(A) \arrow[r, "(gsf)_*"] \arrow[d, "\alpha_*"'] & H_{q+1}(C) \arrow[d, "\gamma_*"] \\ H_q(A') \arrow[r, "(g's'f')_*"] & H_{q+1}(C') \end{tikzcd}$$

kommutativ.

Nimmt man speziell $f' = f$, $g' = g$ und für α, β, γ die Identitäten, so folgt: $(gsf)_*$ ist unabhängig von der Wahl von s. Wir definieren

$$(g, f)_* = (gsf)_*: H_q(A) \to H_{q+1}(C).$$

Beweis von 5. 7. — Es ist

$$\begin{aligned} (g's'f')_*\alpha_* &= (g's'f'\alpha)_*, \\ \gamma_*(gsf)_* &= (\gamma gsf)_* \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} g's'f'\alpha &= g's'\beta f, \\ \gamma gsf &= g'\beta sf. \end{aligned}$$

Setzt man $t = s'\beta - \beta s$, so gilt $\partial t + t\partial = 0$, d.h. $t: B_q \to B'_{q+1}$ ist ein Kettenmorphismus vom Grade 1. Wegen $B' \simeq 0$ ist er nullhomotop, in Formeln:

$$\partial s't - s't\partial = (\partial s' + s'\partial)t = t.$$

Insbesondere ist $t_* = 0$, also

$$(g's'f')_*\alpha_* - \gamma_*(gsf)_* = g'_*t_*f_* = 0.$$

5. 8. Bemerkung. — $(g, f)_*$ kann auch definiert werden, wenn B nur als azyklisch (nicht notwendig nullhomotop)

vorausgesetzt wird. Man zerlegt dann

$$A \xrightarrow{f'} \text{Kern } g \subset B \to \text{Kobild } g \xrightarrow{g'} C$$

oder

$$A \xrightarrow{f''} \text{Bild } f \subset B \to \text{Kokern } f \xrightarrow{g''} C.$$

Die « verbindenden Morphismen » ([4], I, 5. 8; II, 1. 2)

$$\partial'_* : H_{q+1}(\text{Kobild } g) \to H_q(\text{Kern } g)$$
$$\partial''_* : H_{q+1}(\text{Kokern}) f \to H_q(\text{Bild } f).$$

sind Isomorphismen, und es ist nicht schwer zu zeigen (mit Hilfe der Natürlichkeit des verbindenden Morphismus), daß $g'_*(\partial'_*)^{-1}f'_* = g''_*(\partial''_*)^{-1}f''_* : H_q(A) \to H_{q+1}(C)$ ist. Ferner stimmt dieser Morphismus im Fall $B \simeq 0$ mit dem oben definierten $(g, f)_*$ überein. Den Beweis übergehen wir. In einer Kategorie von abelschen Gruppen ist er fast trivial.

5. 9. Wir kehren nun zurück der Situation von 5. 5 und definieren den *Einhängungsmorphismus*

$$\sigma = \sigma_X = \sigma_X(T) = (T\pi, T\varkappa)_* : H_q(TX) \to H_{q+1}(TSX).$$

Ein s.s. Morphismus f: $X \to X'$ liefert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} TX & \xrightarrow{T\varkappa} & TCX & \xrightarrow{T\pi} & TSX \\ {\scriptstyle Tf}\downarrow & & {\scriptstyle TCf}\downarrow & & {\scriptstyle TSf}\downarrow \\ TX' & \xrightarrow{T\varkappa'} & TCX' & \xrightarrow{T\pi'} & TSX'. \end{array}$$

Nach 5. 7 ist dann auch

$$\begin{array}{ccc} H_q(TX) & \xrightarrow{\sigma_X} & H_{q+1}(TSX) \\ {\scriptstyle (Tf)_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (TSf)_*} \\ H_q(TX') & \xrightarrow{\sigma'_X} & H_{q+1}(TSX') \end{array} \tag{5. 10}$$

kommutativ, d.h. σ *ist eine natürliche Transformation* (in Abhängigkeit von X).

Ist $\varphi : T \to T'$ eine natürliche Transformation (und $T'(0) = 0$), so ergibt sich analog das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_q(TX) & \xrightarrow{\sigma(T)} & H_{q+1}(TSX) \\ {\scriptstyle \varphi_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_*} \\ H_q(T'X) & \xrightarrow{\sigma(T')} & H_{q+1}(T'SX) \end{array} \tag{5. 11}$$

d.h. σ ist auch natürlich in Abhängigkeit von T.

5. 12. Bemerkung. — Ist T additiv, so ist

$$0 \longrightarrow TX \xrightarrow{T\varkappa} TCX \xrightarrow{T\pi} TSX \longrightarrow 0$$

exakt, und die Einhängung ist das Inverse des verbindenden Morphismus $H_{q+1}(TSX) \to H_q(TX)$(5.8). Insbesondere ist sie ein Isomorphismus. Dieses Ergebnis wird sich in § 6 noch auf andere Art ergeben (6. 5).

5. 13. *Beispiel.* — Sei $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$ die Kategorie der abelschen Gruppen. Wir definieren den Funktor T durch $TA = \overline{Z}A \otimes G$, $A \in \mathfrak{A}$. Dabei ist ZA der Gruppenring von A, $\overline{Z}A = ZA/Z0$, und G ist eine feste abelsche Gruppe. Für eine s.s. abelsche Gruppe X ist dann kTX der gewöhnliche Kettenkomplex der s.s. Menge X mod 0 mit Koeffizienten in G, also

$$HTX = H(X, 0; G).$$

Als s.s. Menge ist CX ein zusammenziehbarer Faserraum mit der Basis SX und der Faser X (7). Aus der Definition von $\sigma_X(T)$ (5. 9) ergibt sich unmittelbar, daß es mit der bekannten « Homologie-Einhängung » [26], [31]

$$\sigma : H_q(X, 0; G) \to H_{q+1}(SX, 0; G)$$

übereinstimmt.

5. 14. Der Einhängungsmorphismus läßt sich in verschiedener Weise auf Funktoren von mehreren Variablen verallgemeinern. Wir erläutern das am Beispiel von 2 Variablen. Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}'$ abelsche Kategorien und T(A, B), $A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B}$, ein kovarianter Funktor mit Werten in $\mathfrak{A}'$. Bildet man die Produktkategorie $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ mit den Objekten (A, B) und den Morphismen (f, g), so kann man T als Funktor $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}'$ von einer Variablen auffassen. Setzt man $T(0, 0) = 0$ voraus, so ist also für zwei s.s. Objekte X über $\mathfrak{A}$ und Y über $\mathfrak{B}$ der « *totale* » *Einhängungsmorphismus*

$$\sigma = \sigma_{X,Y}(T) = (T(\pi, \pi), T(\varkappa, \varkappa))_* : H_q T(X, Y) \to H_{q+1} T(SX, SY)$$

mit $$T(X, Y) \xrightarrow{T(\varkappa, \varkappa)} T(CX, CY) \xrightarrow{T(\pi, \pi)} T(SX, SY).$$

definiert. (Dabei wurden $C(X, Y) = (CX, CY)$ und die analoge

(7) Man beachte, daß CX und SX nicht Kegel bzw. Einhängung von X als s.s. Menge sind. Es ist vielmehr $CX = WX$, $SX = \overline{W}X$ (W-Konstruktion [12], 17; [22] 2. 17).

Beziehung für S benutzt, die sich leicht aus den Definitionen ergeben.)

5. 15. Setzt man sogar $T(0, B) = 0$ für alle $B \in \mathfrak{B}$ voraus, so läßt sich noch eine andere Art von Einhängung definieren. Wir betrachten dazu

$$T(X, Y) \xrightarrow{T(\varkappa, \iota)} T(CX, Y) \xrightarrow{T(\pi, \iota)} T(SX, Y).$$

Die Zusammensetzung ist $T(\pi, \iota) \circ T(\varkappa, \iota) = T(\pi\varkappa, \iota) = T(0, \iota) = 0$. Aus $CX \simeq 0$ folgt $T(CX, Y) \simeq T(0, Y) = 0$ (1. 26). Nach 5. 6 können wir also

$$\sigma^1 = \sigma^1_{X, Y}(T) = (T(\pi, \iota), T(\varkappa, \iota))_* : H_q T(X, Y) \to H_{q+1} T(SX, Y)$$

definieren. Wir nennen diesen Morphismus die *partielle Einhängung* in Bezug auf die erste Variable. Entsprechend wird die partielle Einhängung

$$\sigma^2 = \sigma^2_{X, Y}(T) : H_q T(X, Y) \to H_{q+1} T(X, SY)$$

für die zweite Variable erklärt, wenn $T(A, 0) = 0$ ist für alle $A \in \mathfrak{A}$.

5. 16. Um die Beziehung zwischen totaler und partieller Einhängung herzustellen, betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
T(X, Y) & \xrightarrow{T(\varkappa, \iota)} & T(CX, Y) & \xrightarrow{T(\pi, \iota)} & T(SX, Y) \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle T(\iota, \varkappa)} & & \downarrow{\scriptstyle T(\iota, 0)} \\
T(X, Y) & \xrightarrow{T(\varkappa, \varkappa)} & T(CX, CY) & \xrightarrow{T(\pi, \pi)} & T(SX, SY)
\end{array}$$

Unter der Voraussetzung $T(0, B) = 0$ können wir σ und σ^1 bilden, und nach 5. 7 ist

$$(5.\ 17)\qquad \begin{array}{ccc}
 & \overset{\sigma^1}{\nearrow} & H_{q+1}T(SX, Y) \\
H_q T(X, Y) & & \downarrow{\scriptstyle T(\iota, 0)_*} \\
 & \underset{\sigma}{\searrow} & H_{q+1}T(SX, SY)
\end{array}$$

kommutativ. Ist zusätzlich $T(A, 0) = 0$ für alle $A \in \mathfrak{A}$, so gilt $T(\iota, 0) = 0$, und wir haben:

5. 18. Satz. — *Ist* $T(A, 0) = T(0, B) = 0$ *für alle* $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$, *so verschwindet der totale Einhängungsmorphismus* $\sigma_{X, Y}(T)$ *für alle s.s. Objekte* X, Y.

5. 19. Bemerkung. — Der Satz 5. 18 zeigt, daß die totale Einhängung an sich nicht sehr interessant ist. Denn erstens wird für die meisten Funktoren $T(A, B)$, die im folgenden vorkommen, die Voraussetzung von 5. 18 erfüllt sein. Zweitens kann man jeden Funktor von 2 Variablen so in der Form $T(A, B) = T'(A) \oplus T''(B) \oplus T'''(A, B)$ aufspalten, daß T''' die Voraussetzung von 5. 18 erfüllt. Wir werden aber sogleich wichtige Folgerungen für Funktoren einer Variablen aus 5. 18 ziehen.

5. 20. Korollar. — *Setzt man unter den Voraussetzungen von* 5. 18 $T^d(A) = T(A, A)$, *so verschwindet der* (*gewöhnliche*) *Einhängungsmorphismus* $\sigma_X(T^d)$ *für jedes s.s. Objekt* X.

Zum Beweis ist nur zu bemerken, daß $\sigma_X(T^d) = \sigma_{X,X}(T)$ ist. Das folgt sofort aus den Definitionen 5. 9, 5. 14.

5. 21. Sei nun $T : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ wie früher ein Funktor von einer Variablen mit $T(0) = 0$. Dann sind die Mischeffekte

$$T_k(A_1, \ldots, A_k)$$

Funktoren von k Variablen aus $\mathfrak{A}$, die den Wert 0 haben, wenn eine der Variablen verschwindet (4. 18 und [13], 9. 2). Setzen wir $T_k^d(A) = T_k(A, A, \ldots, A)$, so folgt aus 5. 20 (mit einer trivialen Verallgemeinerung von 2 auf k):

5. 22. *Der Einhängungsmorphismus*

$$\sigma_X(T_k^d) : H_q T_k^d X \to H_{q+1} T_k^d SX$$

verschwindet für $k > 1$.

5. 23. Für irgendein $A \in \mathfrak{A}$ definieren wir die « *Addition* » oder « *Kodiagonale* » $\alpha' : A \oplus A \to A$ als denjenigen Morphismus, der auf beiden Summanden die Identität ist ($\alpha'(a_1, a_2) = a_1 + a_2$ in einer Kategorie von abelschen Gruppen). Dual dazu wird die « *Diagonale* » oder « *Koaddition* » $\beta' : A \to A \oplus A$ dadurch definiert, daß die Zusammensetzung mit der Projektion auf jeden der beiden Summanden die Identität ist ($\beta'(a) = (a, a)$ in einer Kategorie von abelschen Gruppen). Diese Morphismen liefern

$$\alpha : T_2^d(A) = T_2(A, A) \xrightarrow{\lambda} T(A \oplus A) \xrightarrow{T(\alpha')} T(A)$$
$$\beta : T(A) \xrightarrow{T(\beta')} T(A \oplus A) \xrightarrow{\rho} T_2(A, A) = T_2^d(A),$$

wobei λ und ρ die zur direkten Summendarstellung

$$T(A \oplus A) = T(A) \oplus T(A) \oplus T_2(A, A)$$

(4. 19) gehörige Injektion bzw. Projektion bezeichnen.

α und β sind offenbar natürliche Transformationen zwischen den Funktoren T_2^d und T. Wir wollen sie ebenfalls *Kodiagonale* bzw. *Diagonale* nennen.

5. 24. Sei nun X ein s.s. Objekt über $\mathfrak{A}$. Das Bild von $\alpha_*: H_q T_2(X, X) \to H_q TX$ heißt der *zerlegbare Teil* von $H_q TX$. Der Kern von $\beta_*: H_q TX \to H_q T_2(X, X)$ heißt der *primitive Teil* von $H_q TX$. Wegen der Beziehung dieser Definition zu anderen Begriffen von « zerlegbar » und « primitiv » vgl. 5. 26, 8. 11, § 11.

5. 25. Satz. — *In der Folge*

$$H_q T_2(X, X) \xrightarrow{\alpha_*} H_q TX \xrightarrow{\sigma} H_{q+1} TSX \xrightarrow{\beta_*} H_{q+1} T_2(SX, SX)$$

verschwinden die Zusammensetzungen von zwei aufeinanderfolgenden Morphismen. M.a.W. σ annulliert den zerlegbaren Teil von $H_q TX$ und bildet ganz $H_q TX$ in den primitiven Teil von $H_{q+1} TSX$ ab.

Beweis. — Nach (5. 11) haben wir das kommutative Diagramm ($T_2^d(A) = T_2(A, A)$)

$$\begin{array}{ccc} H_q T_2^d X & \xrightarrow{\sigma(T_2^d)} & H_{q+1} T_2^d SX \\ {\scriptstyle \alpha_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_*} \\ H_q TX & \xrightarrow{\sigma(T)} & H_{q+1} TSX \end{array}$$

$\sigma(T_2^d)$ verschwindet aber nach 5. 22. Also folgt

$$\sigma(T) \circ \alpha_* = \alpha_* \circ \sigma(T_2^d) = 0.$$

Analog erhält man $\beta_* \circ \sigma(T) = \sigma(T_2^d) \circ \beta_* = 0$.

Später wird gezeigt, daß die obige Folge unter gewissen Voraussetzungen sogar exakt ist (6. 6, 6. 11).

5. 26. *Beispiel.* — Sei $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$ die Kategorie der abelschen Gruppen und $TA = \bar{Z}A \otimes G$, $A \in \mathfrak{A}$, wie in 5. 13. Dann ist

$$T_2(A, B) = \frac{T(A \oplus B)}{TA + TB} = \frac{\bar{Z}(A \oplus B)}{\bar{Z}A + \bar{Z}B} \otimes G.$$

Für s.s. abelsche Gruppen X, Y folgt

$$HT_2(X, Y) = H(X \times Y,\ X \vee Y; G),$$

wobei X, Y auf der rechten Seite als s.s. Mengen aufzufassen sind. Nach 5. 13 ist $HTX = H(X, 0; G)$. Der Homomorphismus

$$\beta_* : (H(X, 0; G) \to (H\,(X \times X, X \vee X, G)$$

($\beta : TX \to T_2(X, X)$ nach 5. 23) wird offenbar durch die « geometrische » Diagonalabbildung $X \to X \times X$ induziert, er stimmt also mit d_2 in [31], 2 überein.

Es ist leicht zu zeigen, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H(X \times X,\ 0 \times 0;\ G) \arrow[rr] \arrow[dr, "\alpha'_* - \pi'_* - \pi''_*"'] & & H(X \times X,\ X \vee X;\ G) \arrow[dl, "\alpha_*"] \\
& H(X,\ 0;\ G) &
\end{tikzcd}$$

in dem $\alpha' : X \times X = X \oplus X \to X$ die Addition und π', π'': $X \times X \to X$ die beiden Projektionen bezeichnen, kommutativ ist ($\alpha : T_2(X, X) \to TX$ nach 5. 23). Die geometrische Realisierung $|X|$ ist mit dem Schleifenraum $\Omega|SX|$ homotopieäquivalent (5. 13), und zwar so, daß die Addition der Punkte in $|X|$ in die punktweise Addition der Wege in $|SX|$ übergeht ($|X|$, $|SX|$ sind abelsche Gruppen). Bekanntlich ist aber die punktweise Addition der Wege als Abbildung

$$(\Omega|SX| \times \Omega|SX|, 0 \times 0) \to (\Omega|SX|, 0)$$

zu der Zusammensetzung der Wege μ homotop. Folglich gilt für die Homomorphismen μ_4 und λ in [31], 2 .5: $\alpha'_* = \mu_4$, und daher $\alpha_* = \lambda$.

In dem betrachteten Beispiel liefert 5. 25 also dasselbe wie die ersten Teile der Korollare 6. 1 und 6. 2 in [31], angewandt auf $B = |SX|$. Für die zweiten Teile vgl. 6. 16.

ZWEITE DEFINITION DER EINHÄNGUNG

Der bisher benutzte Begriff des Kegels eines s.s. Objekts entspricht im Fall eines gewöhnlichen simplizialen Komplexes K dem Verbindungskomplex (join) mit einem Punkt P. Eine andere Art von « Kegel » erhält man, wenn man im Produkt $I \times K$ den Teilkomplex $0 \times K$ zu einem Punkt identifiziert. Es entsteht ein s.s. Komplex (s.s. Menge), der zu dem ersten Kegel i.a. nicht isomorph ist, wenn auch die geometrischen Realisierungen homöomorph sind. Wir wollen nun auch die zweite Kegeldefinition auf abelsche Kategorien übertragen und zeigen, daß man mit ihr die Einhängung und den Einhängungsmorphismus völlig gleichwertig definieren kann. Diese neue Definition wird sich in den beiden nächsten Paragraphen als nützlich erweisen.

5. 27. Sei $\Delta[r]$ das Standard-r-Simplex, d.h. $\Delta[r]_p$ besteht aus den monotonen Abbildungen $[p] \to [r]$. Insbesondere hat $\Delta[0]_p$ ein einziges Element $\gamma^p : [p] \to [0]$, und für jedes monotone $\alpha : [q] \to [p]$ ist $\Delta[0]_\alpha(\gamma^p) = \gamma^q$. $\Delta[1]_p$ besteht aus den Elementen $\gamma^p_k : [p] \to [1]$, $k = 0, 1, \ldots, p+1$, mit

$$\gamma^p_k(l) = \begin{cases} 0, & l < k, \\ 1, & l \geq k. \end{cases}$$

Für die Seiten- und Ausartungsoperatoren (1. 2) gilt

$$\partial_i \gamma^p_k = \begin{cases} \gamma^{p-1}_k, & k \leq i \\ \gamma^{p-1}_{k-1}, & k > i \end{cases} \tag{5. 28}$$
$$s_i \gamma^p_k = \begin{cases} \gamma^{p+1}_k, & k \leq i \\ \gamma^{p+1}_{k+1}, & k > i. \end{cases}$$

Für irgendeine Menge M bezeichne ZM die von M erzeugte freie abelsche Gruppe. Mit Hilfe dieses Funktors von Mengen zu abelschen Gruppen definieren wir die s.s. abelschen Gruppen

$$\begin{aligned} Q &= Z\Delta[0] \\ C &= Z\Delta[1]/Z\varepsilon^0\Delta[0] \\ S &= Z\Delta[1]/(Z\varepsilon^0\Delta[0] + Z\varepsilon^1\Delta[0]) \end{aligned} \tag{5. 29}$$

mit $\varepsilon^0\gamma^p = \gamma^p_{p+1}$, $\varepsilon^1\gamma^p = \gamma^p_0$ (vgl. 1. 2). Man hat also eine exakte Folge

(5. 30) $$0 \longrightarrow Q \xrightarrow{\varkappa = \varepsilon^1} C \xrightarrow{\pi} S \longrightarrow 0,$$

die als Folge von graduierten Objekten (ohne s.s Struktur) zerfällt. Wir merken noch an

5. 31. *Für jedes* $p \geq 0$ *ist* $Q_p = \mathrm{Z}$, *und für jedes monotone* $\alpha : [r] \to [p]$ *ist* $Q_\alpha : Q_p \to Q_r$ *die Identität.*

Sei nun $\mathfrak{G}$ die Kategorie der endlich erzeugten abelschen Gruppen und $\mathfrak{A}$ irgendeine abelsche Kategorie. Nach 3. 32 ist das Tensorprodukt als Funktor $\mathfrak{G} \times \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ definiert. Sind $\mathfrak{G}$ und X s.s Obkjete über $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{A}$, so ist $G \mathbin{\widehat{\otimes}} X$ ein s.s. Doppelobjekt über $\mathfrak{A}$ mit $(G \mathbin{\widehat{\otimes}} X)_{p,q} = G_p \otimes X_q$ und entsprechend für monotone Abbildungen (2. 10). $G \otimes X$ ist das Diagonalobjekt von $G \mathbin{\widehat{\otimes}} X$. Nach 5. 31 gilt speziell $Q \otimes X = X$.

5. 32. Hilfssatz. — *Es gibt ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{tikzcd} Q \otimes X \arrow[r, "\varkappa \otimes \iota"] \arrow[d, equal] & C \otimes X \arrow[r, "\pi \otimes \iota"] \arrow[d, "\varphi"] & S \otimes X \arrow[d, "\psi"] \\ X \arrow[r, "\varkappa"] & CX \arrow[r, "\pi"] & SX \end{tikzcd}$$

in dem φ *und* ψ *natürliche Homotopieäquivalenzen sind.*

Beweis. — Sei G ein s.s. Objekt über $\mathfrak{G}$ und

$$f : k(G \otimes X) \to t(G \mathbin{\widehat{\otimes}} X) = kG \otimes kX$$

die Alexander-Whitneysche Homotopieäquivalenz (2. 15). Die Zusammensetzung mit der Injektion $N(G \otimes X) \to k(G \otimes X)$ auf der einen und dem Tensorprodukt der Projektionen $kG \to NG$, $kX \to NX$ (3. 20) auf der anderen Seite liefert eine natürliche Homotopieäquivalenz

$$\bar{f} : N(G \otimes X) \to NG \otimes NX.$$

Wegen der Natürlichkeit ist das Diagramm

(5. 33) $$\begin{tikzcd} N(Q \otimes X) \arrow[r, "N(\varkappa \otimes \iota)"] \arrow[d, "\bar{f}"] & N(C \otimes X) \arrow[r, "N(\pi \otimes \iota)"] \arrow[d, "\bar{f}"] & N(S \otimes X) \arrow[d, "\bar{f}"] \\ NQ \otimes NX \arrow[r, "N\varkappa \otimes \iota"] & NC \otimes NX \arrow[r, "N\pi \otimes \iota"] & NS \otimes NX \end{tikzcd}$$

kommutativ. Wie man mit Hilfe von (5. 28) leicht bestätigt ist

$$(NQ)_p = \begin{cases} Z\gamma^0, & p = 0 \\ 0, & p \neq 0 \end{cases} \qquad (NC)_p = \begin{cases} Z\gamma_p^p, & p = 0, 1 \\ 0, & p \neq 0, 1 \end{cases}$$

$$(NS)_p = \begin{cases} Z\gamma_1^1, & p = 1 \\ 0, & p \neq 1. \end{cases}$$

Für den Randoperator $\partial = \partial_0$ in NC gilt $\partial\gamma_1^1 = \gamma_0^0$. Ferner ist

$$\varkappa\gamma^0 = \gamma_0^0$$
$$\pi\gamma_1^1 = \gamma_1^1.$$

Daraus folgt, daß die untere Zeile von (5. 33) mit

$$NX \xrightarrow{\varkappa} CNX \xrightarrow{\pi} SNX$$

(5. 2) übereinstimmt.

In $\bar{f} : (N(Q \otimes X))_m \to (NQ \otimes NX)_m = (NQ)_0 \otimes (NX)_m$ liefert offenbar nur die Komponente $\bar{f}_{0,m}$ einen Beitrag. Nach Definition (2. 15) ist aber $f_{0,m}$ die Identität. Also ist

$$\bar{f} : N(Q \otimes X) \to NQ \otimes NX$$

(linker vertikaler Morphismus in (5. 33)) die Identität von NX. Durch Anwendung des Funktors K (3. 6) auf (5. 33) erhält man demnach das gesuchte Diagramm von 5. 32.

Nebenbei folgt NC = NC ⊗ NQ = CNQ, also C = CQ und entsprechend S = SQ.

Sei nun wieder T ein kovarianter Funktor von $\mathfrak{A}$ in eine andere abelsche Kategorie $\mathfrak{A}'$ mit T(0) = 0. Wendet man ihn auf 5. 32 an, so erhält man das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} T(Q \otimes X) & \xrightarrow{T(\varkappa \otimes \iota)} & T(C \otimes X) & \xrightarrow{T(\pi \otimes \iota)} & T(S \otimes X) \\ & & \downarrow{\scriptstyle T\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle T\psi} \\ TX & \xrightarrow{T\varkappa} & TCX & \xrightarrow{T\pi} & TSX \end{array}$$

in dem $T\varphi$ und $T\psi$ Homotopieäquivalenzen sind und die Zusammensetzungen in beiden Zeilen 0 ergeben. Nach 5. 7 folgt:

5. 34. Satz. — *Es gibt einen natürlichen Isomorphismus* $(T\psi)_* : HT(S \otimes X) \cong HTSX$, *so daß das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} & \overset{\bar{\sigma}}{\nearrow} & H_{q+1}T(S \otimes X) \\ H_qTX & & \downarrow{\scriptstyle (T\psi)_*} \\ & \underset{\sigma}{\searrow} & H_{q+1}TSX \end{array}$$

mit $\bar{\sigma} = (T(\pi \otimes \iota), T(\varkappa \otimes \iota))_*$ *kommutativ ist.* σ *ist dabei der Einhängungsmorphismus von* 5. 9.

5. 35. Bemerkung. — Die Einhängung kann noch auf viele andere Arten definiert werden. Ist nämlich $X \subset Y$, Y nullhomotop und X als graduiertes Objekt ein direkter Summand von Y, so kann man zeigen, daß es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varkappa"] \arrow[d, equal] & CX \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & SX \arrow[d] \\ X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Y/X \end{tikzcd}$$

gibt, in dem die vertikalen Morphismen Homotopieäquivalenzen sind.

6. — DIE BAR-KONSTRUKTION

Das Haupziel dieses Paragraphen ist der Beweis des Satzes 6. 4, aus dem sich eine Reihe von Folgerungen über den Einhängungsmorphismus $\sigma : H_q TX \to H_{q+1} TSX$ (5. 9) ergeben wird. $T : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ ist dabei wie in § 5 ein Funktor zwischen abelschen Kategorien mit $T(0) = 0$.

6. 1. $T_p(A_1, \ldots, A_p)$ bezeichne den p-ten Mischeffekt von T (4. 18) und

$$T_p(A_1, \ldots, A_p) \underset{\rho}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} T(A_1 \oplus \cdots \oplus A_p)$$

seien die zur direkten Summendarstellung 4. 19 gehörigen natürlichen Morphismen (Injektion und Projektion). Ist $A_1 = \cdots = A_p = A$, so kürzen wir $A_1 \oplus \cdots \oplus A_p$ durch $\bigoplus^p A$ ab. $\alpha'_i : \bigoplus^p A \to \bigoplus^{p-1} A$, $A \in \mathfrak{A}$, $i = 1, \ldots, p-1$, bilde den k-ten Summanden von $\bigoplus^p A$ identisch in den k-ten (für $k \leq i$) bzw. $(k-1)$-ten (für $k > i$) Summanden von $\bigoplus^{p-1} A$ ab. Ist $\mathfrak{A}$ eine Kategorie von abelschen Gruppen, so bedeutet das

$$\alpha'_i(a_1, \ldots, a_p) = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_p).$$

Wir definieren dann

$$(6.\ 2) \quad \alpha_i = \rho \circ T\alpha'_i \circ \lambda : T^d_p A \to T^d_{p-1} A, \quad i = 1, \ldots, p-1,$$

mit der Abkürzung $T^d_p A = T_p(A, \ldots, A)$. α_i ist eine natürliche Transformation von T^d_p in T^d_{p-1}. $\alpha_1 : T^d_2 A \to T^d_1 A = TA$ stimmt offenbar mit der Kodiagonale α von 5. 23 überein.

6. 3. Sei nun X ein s.s. Objekt über $\mathfrak{A}$. Wir bilden die Folge

$$TX = T^d_1 X \xleftarrow{\partial'} T^d_2 X \xleftarrow{\partial'} T^d_3 X \xleftarrow{\partial'} \cdots$$

mit

$$\partial' = \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i \alpha_i : T_p^d X \to T_{p-1}^d X,$$

insbesondere

$$\partial' = -\alpha_1 = -\alpha : T_2^d X = T_2(X, X) \to TX.$$

Es ist leicht zu zeigen, daß $\partial'\partial' = 0$ ist. Wir übergehen das hier, da es sich später von selbst ergeben wird (6. 23). Man kann die Folge also als Doppelkomplex $\mathfrak{T}X$ auffassen. Die Bigraduierung wird durch $(\mathfrak{T}X)_{p,q} = T_p^d X_q$ festgelegt. Der erste Randoperator ist ∂', der zweite ist der « innere » Randoperator $\partial'' = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i T_p^d(\partial_i) : \ T_p^d X_q \to T_p^d X_{q-1}$ des Kettenkomplexes $kT_p^d X$. Die Injektion $i : TX = (\mathfrak{T}X)_{1,*} \subset t\mathfrak{T}X$ ist ein Kettenmorphismus vom Grad 1 (t bezeichnet den Übergang zum totalen Komplex).

6. 4. Satz. — *Es gibt einen natürlichen Isomorphismus der* (*totalen*) *Homologie* $\omega : H\mathfrak{T}X \cong HTSX$, *so daß das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} & H_{q+1}TSX \\ H_q TX \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[dr, "i_*"'] & \\ & H_{q+1}\mathfrak{T}X \arrow[uu, "\omega"'] \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

Wir nennen $\mathfrak{T}X$ « *Bar-Konstruktion* », weil es in Analogie zur bekannten « bar construction » von Eilenberg-MacLane [12], [5] steht. Im Fall des Funktoren « Gruppenring » und « Symmetrische Algebra » ist $\mathfrak{T}X$ fast dasselbe wie die bar construction über TX. Wir werden das am Schluß des Paragraphen genauer erläutern (6. 26, 6. 27).

Der Beweis von 6. 4 beruht auf den Isomorphien

$$HTSX \cong HT(S \otimes X)$$

(5. 34) und $\mathfrak{T}X \cong N'T(S \hat{\otimes} X)$. Dabei ist $S \hat{\otimes} X$ das s.s. Doppelobjekt mit $(S \hat{\otimes} X)_{p,q} = S_p \otimes X_q$ (2. 10), und N' bezeichnet das Normalisieren bezüglich der ersten s.s. Struktur eines s.s. Doppelobjekts. Wie werden das in 6. 17-6. 25 im einzelnen ausführen. Vorher sollen einige Folgerungen aus 6. 4 gezogen werden.

6. 5. Korollar. — *Ist der Funktor* T *additiv, so ist der Einhängungsmorphismus* σ *ein Isomorphismus.*

Beweis. — Ist T additiv, so ist $T_p = 0$ für alle $p > 1$, und $i : TX \to t\mathfrak{T}X$ ist ein Isomorphismus (vom Grade 1). Also ist auch i_* ein Isomorphismus und damit σ nach 6. 4 (vgl. auch 5. 12).

6. 6. Korollar. — *Ist* T *ein quadratischer Funktor,* d.h. $T_p = 0$ *für alle* $p > 2$, *so gibt es einen Morphismus* $\bar{\beta}$, *so daß die Folge*

$$\cdots \xrightarrow{\bar{\beta}} H_q T_2(X, X) \xrightarrow{\alpha_*} H_q TX \xrightarrow{\sigma} H_{q+1} TSX \xrightarrow{\bar{\beta}} H_{q-1} T_2(X, X) \xrightarrow{\alpha_*} H_{q-1} TX \xrightarrow{\sigma} \cdots$$

exakt ist. ($\alpha : T_2(X, X) \to TX$ ist dabei die Kodiagonale, 5. 23).

Insbesondere bedeutet das in Verschärfung von 5. 25, daß der zerlegbare Teil von $H_q TX$ für quadratisches T genau der Kern von σ ist. Später werden wir zeigen, daß es einen Isomosphismus $H_{q-1}T_2(X, X) \cong H_{q+1}T_2(SX, SX)$ gibt, durch den $\bar{\beta}$ in $\beta_* : H_{q+1}TSX \to H_{q+1}T(SX, SX)$ (β = Diagonale, 5. 23) übergeht (7. 14). Dann folgt, daß der primitive Teil von $H_{q+1}TSX$ genau das Bild von σ ist.

Beweis von 6. 6. — Für quadratisches T reduziert sich $\mathfrak{T}X$ auf die Folge von Komplexen

$$\cdots \leftarrow 0 \leftarrow TX \xleftarrow{\partial' = -\alpha} T_2(X, X) \leftarrow 0 \leftarrow \cdots$$

Man hat also eine exakte Folge

$$0 \to TX \xrightarrow{i} t\mathfrak{T}X \xrightarrow{p} T_2(X, X) \to 0$$

mit Grad $i = 1$, Grad $p = -2$. Daraus ergibt sich die exakte Homologiefolge

$$\cdots \xrightarrow{p_*} H_q T_2(X, X) \xrightarrow{\partial_*} H_q TX \xrightarrow{i_*} H_{q+1}\mathfrak{T}X \xrightarrow{p_*} H_{q-1}T_2(X, X) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}TX \xrightarrow{i_*} \cdots$$

Nach 6. 4 kann man $H_{q+1}\mathfrak{T}X$ durch $H_{q+1}TSX$ ersetzen, und i_* geht dabei in σ über. Aus p_* entsteht ein Morphismus

$$H_{q+1}TSX \to H_{q-1}T_2(X, X),$$

den wir mit $\overline{\beta}$ bezeichnen. Es bleibt der verbindende Morphimus ∂_* zu bestimmen. Bezeichne Z die Zyklen von $T_2(X, X)$ (d.h. $Z = \text{Kern}\ \partial''$) und $j : Z \to \mathfrak{T}X$ die Injektion. Dann ist pj die Injektion $Z \subset T_2(X, X)$. Nach seiner Definition ([4], I, 5. 3; II, 1. 2) wird ∂_* durch ∂j induziert, wobei $\partial = \partial' \pm \partial''$ der totale Randoperator von $\mathfrak{T}X$ ist [8]. Nun ist aber $\partial'' j = 0$, also $\partial j = \partial' j = -\alpha j$, und der induzierte Morphismus ist $-\alpha_*$. Ersetzt man ihn durch α_*, so wird an der Exaktheit offenbar nichts geändert.

Im Falle eines beliebigen Funktors T tritt an die Stelle der exakten Folge von 6. 6 die erste spektrale Folge des Doppelkomplexes $\mathfrak{T}X$ ([7] XV, 6). Sie gehört zu der Filterung $F_p\mathfrak{T}X$, die durch

$$(F_p\mathfrak{T}X)_{n,*} = \begin{cases} (\mathfrak{T}X)_{n,*}, & n \leq p \\ 0, & n > p \end{cases}$$

definiert ist. Wegen $(\mathfrak{T}X)_{p,q} = 0$ für $p < 1$ oder $q < 0$ ist die Filterung regulär und die spektrale Folge konvergent. Ersetzt man nach 6. 4 $H\mathfrak{T}X$ durch HTSX, so ergibt sich

6. 7. Korollar. — *Es gibt eine konvergente spektrale Folge* E^r, so daß folgendes gilt:

a) $E^1_{*,q}$ *zusammen mit dem Randoperator* d^1 *ist der Komplex*

$$H_qTX \xleftarrow{-\alpha_*} H_qT_2(X, X) \xleftarrow{\partial'_*} H_qT_3(X, X, X) \xleftarrow{\partial'_*} \cdots$$

b) E^∞ *ist das bigraduierte Objekt, das mit einer gewissen Filterung von* HTSX *assoziiert ist.*

c) *Der « Kantenmorphismus » (edge morphism)*

$$H_qTX = E^1_{1,q} \to H_{q+1}TSX$$

ist die Einhängung σ.

6. 8. Für quadratisches T entartet die spektrale Folge zu der exakten Folge von 6. 6, weil $E^1_{p,q} = H_qT_p(X, \ldots, X) = 0$ ist außer für $p = 1$ oder 2. Bei beliebigem T gilt etwas Entsprechendes, sofern X in den niedrigen Dimensionen « trivial » ist und man q in geeigneter Weise auf kleine Werte beschränkt. Wir sagen « *X ist trivial unterhalb n* », wenn es ein s.s. Objekt

(8) Die Konstruktion von ∂_* ist hier deswegen besonders einfach, weil die betrachtete exakte Folge von Kettenkomplexen als Folge von graduierten Objekten zerfällt.

X' vom gleichen Homotopietyp wie X gibt mit $X'_q = 0$ für $q < n$. Der folgende Hilfssatz gibt eine hinreichende Bedingung für diese Eigenschaft.

6. 9. Hilfssatz. — *Ist* X_q *projektiv und* $H_q X = 0$ *für alle* $q < n$, *so ist* X *trivial unterhalb* n.

Beweis. — Voraussetzung und Behauptung des Hilfssatzes sind mit den entsprechenden Aussagen über den normalen Komplex NX äquivalent (§ 3). Es genügt daher, den Hilfssatz für einen positiven Kettenkomplex A zu beweisen. Sei also A_q projektiv und $H_q A = 0$ für $q < n$. Wir definieren den Unterkomplex A' durch

$$A'_q = \begin{cases} 0, & q < n, \\ \text{Kern } \partial, & q = n, \\ A_q, & q > n. \end{cases}$$

Der Hilfssatz ist bewiesen, wenn wir $A' \simeq A$ gezeigt haben. Dazu betrachten wir den Quotienten $A'' = A/A'$, der durch die Folge

$$\cdots \leftarrow 0 \leftarrow A_0 \xleftarrow{\partial} A_1 \xleftarrow{\partial} \cdots \xleftarrow{\partial} A_{n-1} \leftarrow A_n/\text{Kern } \partial \leftarrow 0 \leftarrow \cdots$$

gegeben ist. Wegen der Voraussetzung $H_q A = 0$ für $q < n$ ist sie exakt. Weil alle ihre Glieder mit möglicher Ausnahme des letzten projektiv sind, ist auch das letzte projektiv. Das folgt z.B. aus [7] VI, 2. 1. Ein direkter Beweis besteht darin, daß man die Folge in kurze exakte Folgen

$$\begin{array}{l} 0 \to K_1 \to A_1 \to A_0 \to 0 \\ 0 \to K_2 \to A_2 \to K_1 \to 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 \to K_{n-1} \to A_{n-1} \to K_{n-2} \to 0 \\ 0 \to A_n/\text{Kern } \partial \to K_{n-1} \to 0 \end{array}$$

zerlegt und für $q = 1, \ldots, n - 1$ der Reihe nach schließt, daß die q-te Folge zerfällt und K_q projektiv ist.

A'' kann man demnach als projektive Auflösung von 0 auffassen Nach dem fundamentalen Lemma über projektive Auflösungen folgt $A'' \simeq 0$. Als Folge von graduierten Objekten zerfällt

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0.$$

Daraus folgt die Behauptung $A' \simeq A$ nach [10] 2. 18 c).

6. 10. Hilfssatz. — *Sei* T *ein Funktor von* l *Variablen (zwischen abelschen Kategorien), der den Wert* 0 *hat, wenn eines der Argumente verschwindet. Sind dann die s.s. Objekte* X^j *trivial unterhalb* n_j, $j = 1, \ldots, l$, *so ist* $T(X^1, \ldots, X^l)$ *trivial unterhalb* $n = n_1 + \cdots + n_l$. *Insbesondere ist* $H_q T(X^1, \ldots, X^l) = 0$ *für* $q < n$.

Beweis. — Weil T Homotopien erhält (1. 15, 1. 18), kommt es nur auf den Homotopietyp der X^j an, und wir können von vornherein $X^j_q = 0$ für $q < n_j$ voraussetzen. $T(X^1, \ldots, X^l)$ ist das Diagonalobjekt des l-fachen s.s. Objekts $\hat{T}(X^1, \ldots, X^l)$ (2. 10; was dort für $l = 2$ ausgeführt ist, überträgt sich ohne Schwierigkeiten auf beliebiges l). Nach dem Satz von Eilenberg-Zilber-Cartier (2. 9, 2. 16) ist der Kettenkomplex $kT(X^1, \ldots, X^l)$ mit dem totalen Komplex $t\hat{T}(X^1, \ldots, X^l)$ homotopieäquivalent. Unter Benutzung von § 3 folgt

$$T(X^1, \ldots, X^l) \cong KNT(X^1, \ldots, X^l) \simeq KkT(X^1, \ldots, X^l) \simeq Kt\hat{T}(X^1, \ldots, X^l).$$

(s. der Reihe nach 3. 6, 3. 22, 3. 31 (b)). Andererseits ist

$$(t\hat{T}(X^1, \ldots, X^l))_q = \bigoplus_{q_1 + \cdots + q_l = q} T(X^1_{q_1}, \ldots, X^l_{q_l}) = 0$$

für $q < n$, und das bleibt bei der Anwendung des Funktors K erhalten.

Nun ergeben sich aus 6. 4 weitere Folgerungen:

6. 11. Korollar. — *Sei* X *trivial unterhalb* n *und* $q \leqslant 3n$, *Dann gibt es einen Morphismus* $\bar{\beta}$, *so daß die Folge*

$$H_q T_2(X, X) \xrightarrow{\alpha_*} H_q TX \xrightarrow{\sigma} H_{q+1} TSX \xrightarrow{\bar{\beta}} H_{q-1} T_2(X, X) \xrightarrow{\alpha_*} H_{q-1} TX.$$

exakt ist.

Später werden wir zeigen, daß es (für $q \leq 3n$) einen Isomorphismus $H_{q-1} T_2(X, X) \cong H_{q+1} T_2(SX, SX)$ gibt, durch den $\bar{\beta}$ in $\beta_* : H_{q+1} TSX \to H_{q+1} T_2(SX, SX)$ übergeht (7. 14). In dem betrachteten Dimensionsbereich $q \leq 3n$ haben wir also eine Verschärfung von 5. 25.

6. 12. Korollar. — *Ist* X *trivial unterhalb* n, *so ist*

$$\sigma : H_q TX \to H_{q+1} TSX$$

ein Isomorphismus für $q < 2n$ *und ein Epimorphismus für* $q = 2n$.

6. 12. folgt unmittelbar aus 6. 11, wenn man beachtet, daß $T_2(X, X)$ unterhalb $2n$ trivial ist (6. 10).

6. 11. ergibt sich aus der spektralen Folge von 6. 7 nach einem bekannten Verfahren ([26] I, 4), weil

$$E^1_{p,\, m-p} = H_{m-p}T_p(X, \ldots, X) = 0$$

ist für $m < 3n + 3$ und $p \neq 1, 2$ (6. 10). Wir führen einen etwas anderen Schluß durch, weil wir ihn später zur Untersuchung von $\mathfrak{P}$ ohnehin brauchen. Dazu wird zunächst $F_2\mathfrak{T}X$, d.h. der Doppelkomplex

$$\cdots \leftarrow 0 \leftarrow TX \xleftarrow{\alpha} T_2(X, X) \leftarrow 0 \leftarrow \cdots$$

betrachtet. Wie beim Beweis von 6. 6 ergibt sich eine exakte Folge

$$(6.13) \quad H_qT_2(X, X) \xrightarrow{\alpha_*} H_qTX \xrightarrow{i_*} H_{q+1}F_2\mathfrak{T}X \xrightarrow{p_*} H_{q-1}T_2(X, X) \xrightarrow{\alpha_*} H_{q-1}TX$$

(ohne Beschränkung für q). Andererseits haben wir eine exakte Folge

$$(6.14) \quad 0 \to F_2\mathfrak{T}X \xrightarrow{j} \mathfrak{T}X \to W \to 0,$$

wobei W der Doppelkomplex

$$\cdots \leftarrow 0 \leftarrow T_3(X, X, X) \leftarrow T_4(X, X, X, X) \leftarrow \cdots$$

ist. Bezeichnet H′ die Homologie bezüglich des ersten und H″ die bezüglich des zweiten Randoperators, so ist nach 6. 10

$$H''_{p,q}W = \begin{cases} 0 & \text{für } p < 3 \\ H_qT_p(X, \ldots, X) = 0 & \text{für } p \geq 3, \quad q < 3n, \end{cases}$$

also auch $H'_{p,q}H''W = 0$ für $p < 3$ oder $q < 3n$. Nach einem bekannten Satz über (positive) Doppelkomplexe ([7] XV, 6) folgt für die totale Homologie $H_mW = 0$ für $m < 3n + 3$. Aus der zu (6. 14) gehörigen exakten Homologiefolge erhält man $j_* : H_mF_2\mathfrak{T}X \cong H_m\mathfrak{T}X$ für $m \leq 3n + 1$. Für $q \leq 3n$ kann man also $H_{q+1}F_2\mathfrak{T}X$ in (6. 13) durch $H_{q+1}\mathfrak{T}X$ und dieses vermöge 6. 4 durch $H_{q+1}TSX$ ersetzen.

6. 15. Für spätere Zwecke merken wir an, daß $\overline{\beta}$ sowohl in 6. 6 als auch in 6. 11 die Zusammensetzung

$$H_{q+1}TSX \xrightarrow{\omega^{-1}} H_{q+1}\mathfrak{T}X \xrightarrow{j_*^{-1}} H_{q+1}F_2\mathfrak{T}X \xrightarrow{p_*} H_{q-1}T_2(X, X)$$

ist. ω ist der Isomorphismus von 6. 4. Im Fall von 6. 6 reduziert sich j_* auf die Identität.

6. 16. *Beispiel.* — Sei $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$ die Kategorie der abelschen Gruppen und $TA = \overline{Z}A \otimes G$ wie in 5. 13. Ersetzt man nach 7. 14 $\overline{\beta}$ durch β_* und benutzt man die Interpretationen von σ, α_* und β_* in 5. 13, 5. 26, so erhält man aus 6. 11 die exakte Folge

$$\begin{aligned} H_{3n}(X \times X, X \vee X; G) &\xrightarrow{\alpha_*} H_{3n}(X, 0; G) \xrightarrow{\sigma} H_{3n+1}(SX, 0; G) \\ &\xrightarrow{\beta_*} H_{3n+1}(SX \times SX, SX \vee SX; G) = H_{3n-1}(X \times X, X \vee X; G) \\ &\xrightarrow{\alpha_*} H_{3n-1}(X, 0; G) \xrightarrow{\sigma} \cdots \end{aligned}$$

Sie stimmt überein mit der exakten Folge von G. W. Whitehead [31] (für den ersten Schritt s. Barcus-Meyer [2]), angewandt auf $B = |SX|$. Daß die Homomorphismen σ, α_* und β_* dieselben sind wie in [31] wurde in 5. 13, 5. 26 gezeigt. Auf die entsprechende Frage für die Identifizierung von

$$H_{q+1}(SX \times SX, SX \vee SX; G)$$

mit $H_{q-1}(X \times X; X \vee X; G)$ gehen wir allerdings nicht ein.

Beweis von 6. 4.

6. 17. Wir beginnen mit einer Vorbemerkung. Sei V ein s.s. Doppelobjekt (2. 2). Es sind also zwei Arten von Seiten und Ausartungsoperatoren definiert

$$\begin{aligned} \partial'_i &= V_{\varepsilon^i, \iota}, & s'_i &= V_{\eta^i, \iota} \\ \partial''_i &= V_{\iota, \varepsilon^i}, & s''_i &= V_{\iota, \eta^i} \end{aligned}$$

(vgl. 1. 2, ι = Identität), die miteinander vertauschbar sind. Bezüglich jeder der beiden s.s. Strukturen kann man normalisieren. Wir führen es für die erste durch: Der ausgeartete Teil ist

$$D'V = \bigcup_i \text{Bild } s'_i \qquad (3.\,19)$$

un der normale

$$N'V = \bigcap_{i>0} \mathrm{Kern}\, \partial'_i \qquad (3.1)$$

Beides sind bigraduierte Objekte. Bezüglich der ersten Graduierung sind es Kettenkomplexe. Der Randoperator wird durch den ersten Randoperator von V induziert. Bezüglich der zweiten Graduierung sind es sogar s.s. Objekte. Die s.s. Operatoren werden durch die zweite s.s. Struktur von V induziert. Sie sind mit dem (ersten) Randoperator vertauschbar. Insbesondere könne D'V und N'V als Doppelkomplexe aufgefaßt werden. Es gilt

$$(6.18) \qquad V = N'V \oplus D'V$$

(als « gemischte Doppelobjekte » und folglich auch als Doppelkomplexe). Zum Beweis ist nur zu bemerken, daß man V als (einfaches)s.s. Objekt V' über der (abelschen) Kategorie der s.s. Objekte über $\mathfrak{A}$ auffassen kann, indem man $V'_p = V_{p,*}$, $V'_\alpha = V_{\alpha,\iota}$ setzt (α monotone Abbildung, ι = Identität). (3. 20) angewandt auf V', liefert dann die Behauptung.

Ist s' eine Nullhomotopie des Kettenkomplexes $DV' = D'V$ (3. 22), so ist $\partial' s' + s'\partial' = \iota$, und s' ist mit allen s.s. Operatoren der zweiten s.s. Struktur von D'V vertauschbar. Insbesondere ist es mit dem zweiten Randoperator ∂'' vertauschbar. Für den totalen Randoperator $\partial = \partial' + (-1)^p \partial''$ (auf $(D'V)_{p,*}$) gilt dann ebenfalls $\partial s' + s'\partial = \iota$, d.h. s' ist eine Nullhomotopie des totalen Komplexes $tD'V$. Es folgt:

6. 19. *Injektion und Projektion* $N'V \rightleftarrows V$ *von* (6. 18) *sind als Morphismen der totalen Komplexe zueinander homotopieinvers.*

6. 20. Sei nun X ein s.s. Objekt über $\mathfrak{A}$ und G ein s.s. Objekt über der Kategorie der endlich erzeugten abelschen Gruppen. Dann ist $T(G \hat{\otimes} X)$ ein s.s. Doppelobjekt über $\mathfrak{A}'$ mit

$$T(G \hat{\otimes} X)_{p,q} = T(G_p \otimes X_q)$$

(und entsprechend für monotone Abbildungen 2. 10, 3. 32). Sein Diagonalobjekt ist $dT(G \hat{\otimes} X) = Td(G \hat{\otimes} X) = T(G \otimes X)$. Sei $f: T(G \otimes X) \to tT(G \hat{\otimes} X)$ die Alexander-Whitneysche Homotopieäquivalenz (2. 15) und $\rho: T(G \hat{\otimes} X) \to N'T(G \hat{\otimes} X)$ die natürliche Projektion (6. 18).

Wir erinnern an die exakte Folge

$$0 \to Q \xrightarrow{\varkappa} C \xrightarrow{\pi} S \to 0$$

von s.s. abelschen Gruppen (5. 30), mit der am Schluß von § 5 eine zweite Definition der Einhängung gegeben wurde. Sie liefert uns das kommutative Diagramm

$$(6.\,21)\qquad \begin{array}{ccccc} H_q TX & = & H_q T(Q\otimes X) & \xrightarrow{(\rho f)_*} & H_q N'T(Q \hat{\otimes} X) \\ \downarrow{\scriptstyle\sigma} & & \downarrow{\scriptstyle\bar\sigma} & & \downarrow{\scriptstyle\hat\sigma} \\ H_{q+1} TSX & \xrightarrow{(T\psi)_*} & H_{q+1} T(S\otimes X) & \xrightarrow{(\rho f)_*} & H_{q+1} N'T(S \hat{\otimes} X) \end{array}$$

Das linke Quadrat stimmt mit dem Diagramm in 5. 34 überein (man beachte $Q \otimes X = X$, 5. 31), das rechte ergibt sich aus

$$\begin{array}{ccccc} T(Q\otimes X) & \xrightarrow{T(\varkappa\otimes\iota)} & T(C\otimes X) & \xrightarrow{T(\pi\otimes\iota)} & T(S\otimes X) \\ \downarrow{\scriptstyle\rho f} & & \downarrow{\scriptstyle\rho f} & & \downarrow{\scriptstyle\rho f} \\ tN'T(Q\hat{\otimes} X) & \xrightarrow{N'T(\varkappa\hat{\otimes}\iota)} & tN'T(C\hat{\otimes} X) & \xrightarrow{N'T(\pi\hat{\otimes}\iota)} & tN'T(S\hat{\otimes} X) \end{array}$$

durch Anwendung von 5. 7. Es ist also $\hat\sigma = (N'T(\pi \hat{\otimes} \iota), N'T(\varkappa \hat{\otimes} \iota))_*$ (5. 6). Alle horizontalen Pfeile in (6. 21) bezeichnen Isomorphismen. Wir werden nun zeigen:

6. 22. *Es ist*

$$N'T(Q \hat{\otimes} X)_{p,*} = \begin{cases} TX, & p = 0, \\ 0, & p \neq 0, \end{cases}$$

folglich $tN'T(Q \hat{\otimes} X) = TX$, *und* $\rho f : T(Q \otimes X) \to tN'T(Q \hat{\otimes} X)$ *ist die Identität.*

6. 23. $N'T(S \hat{\otimes} X)$ *ist als Doppelkomplex mit der Bar-Konstruktion* $\mathfrak{T}X$ *in natürlicher Weise isomorph.*

6. 24. *Durch den Isomorphismus von* 6. 23 *geht* $\hat\sigma$ *in*

$$i_* : H_q TX \to H_{q+1}\mathfrak{T}X$$

über.

Dann liest man aus (6. 21) unmittelbar die Behauptung von 6. 4 ab. Der Isomorphismus ω ist die Zusammensetzung

$$\omega : H\mathfrak{T}X \cong HN'T(S \hat{\otimes} X) \xrightarrow{(\rho f)_*^{-1}} HT(S \otimes X) \xrightarrow{(T\psi)_*} HTSX.$$

Beweis von 6. 22. — Nach Definition von Q (5. 31) ist $T(Q \hat{\otimes} X)_{p,*} = TX$, und die s.s. Operatoren ∂_i', s_i' der ersten

s.s. Struktur sind Identitäten. Daraus folgt die erste Behauptung.

In $\rho f : T(Q \otimes X)_m \to (tN'T(Q \hat{\otimes} X))_m = (N'T(Q \hat{\otimes} X))_{0,m}$ liefert offenbar nur die Komponente $\rho f_{0,m}$ einen Beitrag. Nach Definition (2. 15) ist aber $f_{0,m} = \partial'_1 \partial'_2 \ldots \partial'_m$ die Identität, womit auch die zweite Behauptung bewiesen ist.

Beweis von 6. 23. — Nach Definition von S (5. 29) bilden die Elemente γ^p_k, $k = 1, \ldots, p$, eine Basis von S_p. Daraus folgt $T(S \hat{\otimes} X)_{p,*} = T(S_p \otimes X) = T(\bigoplus^p_{k=1} \gamma^p_k \times X)$, wobei $\gamma^p_k \times X = X$ ist und nur zur Kennzeichnung seiner Stellung so geschrieben wird. Unter Benutzung der Mischeffekte (4. 18) folgt weiter

$$T(S \hat{\otimes} X)_{p,*} = \bigoplus_\tau T_r(\gamma^p_{\tau_1} \times X, \ldots, \gamma^p_{\tau_r} \times X),$$

wobei $\tau = \{\tau_1, \ldots, \tau_r\}$, $\tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_r$, alle nicht-leeren Teilmengen von $\{1, \ldots, p\}$ durchläuft. Die Seiten- und Ausartungsoperatoren ∂'_i, s'_i der ersten s.s. Struktur von $T(S \hat{\otimes} X)$ liest man aus (5. 28) ab. Insbesondere erkennt man

$$\text{Bild } (s'_{i-1} : T(S \hat{\otimes} X)_{p-1,*} \to T(S \hat{\otimes} X)_{p,*}) \\ = \bigoplus_{\tau \not\ni i} T_r(\gamma^p_{\tau_1} \times T, \ldots, \gamma^p_{\tau_r} \times X)$$

(vgl. 4. 20), folglich

$$D'T(S \hat{\otimes} X)_{p,*} = \bigoplus_{\tau \neq \{1, \ldots, p\}} T_r(\gamma^p_{\tau_1} \times X, \ldots, \gamma^p_{\tau_r} \times X).$$

Dieser Teil von $T(S \hat{\otimes} X)_{p,*}$ hat also einerseits $N'T(S \hat{\otimes} X)_{p,*}$ (6. 18), andererseits $T_p(\gamma^p_1 \times X, \ldots, \gamma^p_p \times X) = T_p(X, \ldots, X) = (\mathfrak{T}X)_{p,*}$ als direktes Komplement. Die beiden Komplemente brauchen als *Teile* von $T(S \hat{\otimes} X)_{p,*}$ nicht gleich zu sein, aber es gibt einen Isomorphismus zwischen ihnen, so daß die *Projektionen* $\rho : T(S \hat{\otimes} X)_{p,*} \to N'T(S \hat{\otimes} X)_{p,*}$ und

$$\rho : T(\bigoplus^p X) \to T_p(X, \ldots, X)$$

(6. 1) einander entsprechen.

Identifizieren wir durch diesen Isomorphismus $N'T(S \hat{\otimes} X)$ mit $\mathfrak{T}X$, so bleibt zu zeigen, daß der erste Randoperator ∂' von $N'T(S \hat{\otimes} X)$ gerade der in 6. 3 für $\mathfrak{T}X$ definierte ist. In $T(S \hat{\otimes} X)_{p,*}$ ist $\partial' = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \partial'_i$ mit $\partial'_i = T(\partial_i \otimes \iota)$. Bezeichnet $\lambda : T_p(X, \ldots, X) \to T(\bigoplus^p X)$ wie in 6. 1 die natürliche Injektion, so ist $\rho\lambda = \iota$. $\rho : T(S \hat{\otimes} X) \to N'T(S \hat{\otimes} X)$ ist ein Kettenmor-

phismus von Doppelkomplexen, also insbesondere mit ∂' vertauschbar. In $N'T(S \mathbin{\widehat{\otimes}} X)_{p,*}$ gilt demnach

$$\partial' = \partial'\rho\lambda = \rho\partial'\lambda = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \rho\partial_i'\lambda.$$

Aus (5. 28) entnimmt man, daß $\partial_i \otimes \iota : \bigoplus^p X \to \bigoplus^{p-1} X$ für $i = 1, \ldots, p-1$ mit α_i' von 6. 1 übereinstimmt. $\partial_0 \otimes \iota$ ist die Projektion auf die letzten und $\partial p \otimes \iota$ die Projektion auf die ersten $p - 1$ Summanden. Daraus folgt

$$\rho\partial_i'\lambda = \begin{cases} \alpha_i, & i = 1, \ldots, p-1 \\ 0, & i = 0, p \end{cases}$$

(6. 2) und weiter $\partial' = \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i \alpha_i$. So wurde aber gerade der erste Randoperator in $\mathfrak{T}X$ definiert (6. 3).

Beweis von 6. 24. — Um den Morphismus $\hat{\sigma}$ in (6. 21) zu bestimmen, müssen wir eine Nullhomotopie von $tN'T\,(C \mathbin{\widehat{\otimes}} X)$ angeben (5. 6). Nach Definition von C (5. 29) bilden die Elemente γ_k^p, $k = 0, \ldots, p$, eine Basis von C_p. Wir definieren $s : C_p \to C_{p+1}$ durch

$$s\gamma_k^p = \gamma_{k+1}^{p+1}, \qquad k = 0, \ldots, p.$$

Dann gilt in C_p, wie man mit Hilfe von (5. 28) leicht nachprüft,

$$\text{(6. 25)} \qquad \begin{aligned} \partial_0 s &= \iota \\ \partial_1 s &= 0, && p = 0 \\ \partial_{i+1} s &= s\partial_i, && p > 0,\ i = 0, \ldots, p \\ s_{i+1} s &= s s_i, && i = 0, \ldots, p. \end{aligned}$$

Für den Randoperator $\partial = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \partial_i$ folgt daraus $\partial s + s\partial = \iota$, d.h. s ist eine Nullhomotopie des Kettenkomplexes C [9].

Setzt man $s' = T(s \otimes \iota) : T(C \mathbin{\widehat{\otimes}} X)_{p,*} \to T(C \mathbin{\widehat{\otimes}} X)_{p+1,*}$, so bestehen zwischen s' und den ersten s.s. Operatoren $\partial_i' = T(\partial_i \otimes \iota)$, $s_i' = T(s_i \otimes \iota)$ von $T(C \mathbin{\widehat{\otimes}} X)$ ebenfalls die Relationen (6. 25), während s' mit jedem der zweiten s.s. Operatoren $\partial_i'' = T(\iota \otimes \partial_i)$, $s_i'' = T(\iota \otimes s_i)$ vertauschbar ist. Daraus folgt für die Randopera-

(9) In gewissem Sinne ist s eine s.s. Nullhomotopie des s.s. Objekts C. Wir gehen darauf aber nicht näher ein.

toren $\mathfrak{d}', \mathfrak{d}''$ und $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}' + (-1)^p \mathfrak{d}''$ (auf $T(C \hat{\otimes} X)_{p,*}$) $: \mathfrak{d}'s' + s'\mathfrak{d}' = \iota$, $\mathfrak{d}''s' = s'\mathfrak{d}''$ und schließlich $\mathfrak{d}s' + s'\mathfrak{d} = \iota$. s' ist also eine Nullhomotopie von $tT(C \hat{\otimes} X)$. Aus der letzten Zeile von (6. 25) folgt

$$s'D'T(C \hat{\otimes} X) \subset D'T(C \hat{\otimes} X),$$

d.h. s' induziert eine Nullhomotopie $N's'$ von

$$tN'(C \hat{\otimes} X) = tT(C \hat{\otimes} X)/tD'T(C \hat{\otimes} X) \quad (3.\ 21).$$

Nach Definition (5. 6) wird $\hat{\sigma} = (N'T(\pi \hat{\otimes} \iota),\ N'T(\varkappa \hat{\otimes} \iota))_*$ durch den Kettenmorphismus

$$N'T(\pi \hat{\otimes} \iota) \circ N's' \circ N'T(\varkappa \hat{\otimes} \iota) = N'T(\pi s \varkappa \otimes \iota) \text{ (}^{10}\text{)}.$$

(vom Grade 1) induziert. Q_p wird von γ^p erzeugt (5. 29). Nach Definition von $\varkappa$, π (5. 30) und s ist $\pi s \varkappa \gamma^p = \pi s \gamma_0^p = \gamma_1^{p+1} \in S_{p+1}$. Folglich wird $tN'T(Q \hat{\otimes} X) = (N'T(Q \hat{\otimes} X))_{0,*} = T(\gamma^0 \times X) = TX$ durch $N'T(\pi s \varkappa \otimes \iota)$ identisch in $(N'T(S \hat{\otimes} X))_{1,*} = T(\gamma_1^1 \times X) = TX$ abgebildet. Damit ist 6. 24 bewiesen.

VERGLEICH MIT DER BAR CONSTRUCTION VON EILENBERG-MAC LANE [12]

6. 26. Sei jetzt $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$ die Kategorie der abelschen Gruppen, und T sei entweder der Funktor « Gruppenring » oder « Symmetrische Algebra », d. h. $TA = ZA$ oder

$$TA = Z \oplus A \oplus SP^2A \oplus SP^3A \oplus \cdots$$

(vgl. [8], ch. v, 18; [9], 10) für $A \in \mathfrak{A}$. In beiden Fällen ist TA ein Ring. Wir haben bestimmte Ringhomomorphismen $\varepsilon : Z \to TA$ und $\eta : TA \to Z$ (Ergänzung), so daß $\eta\varepsilon$ die Identität ist. Im Fall der symmetrischen Algebra handelt es sich dabei um die natürliche Injektion des Summanden Z bzw. die Projektion auf diesen Summanden. Im Fall des Gruppenrings ist $\varepsilon(n) = ne$ ($n \in Z$, e = neutrales Element von A) und $\eta(a) = 1$ für jedes $a \in A$. Durch ε und η wird eine Zerlegung $TA = Z \oplus T^0A$ festgelegt mit $T^0A = \text{Kern}\, \eta$. T^0A ist ein

(10) Man beachte, daß $N'V$ dabei als Quotient nicht als Teil von V aufgefaßt wird. Für $N'T(\pi \hat{\otimes} \iota)$ und $N'T\ (\varkappa \hat{\otimes} \iota)$ macht das keinen Unterschied, wohl aber für $N's'$, da wir nicht wissen, ob $s'N'T'(C \hat{\otimes} X) \subset N'T(C \hat{\otimes} X)$.

Ideal in TA, insbesondere also selbst ein Ring. T^0 ist ein Funktor mit $T^0(0) = 0$.

Es gilt $TA \otimes TB = T(A \oplus B)$, und der Isomorphismus ergibt sich durch Multiplikation der Injektionen $TA \to T(A \oplus B)$ und $TB \to T(A \oplus B)$. Für den Gruppenring ist das trivial, für die symmetrische Algebra s. [9], (10. 8). Nun ist einerseits

$$TA \otimes TB = Z \oplus T^0A \oplus T^0B \oplus (T^0A \otimes T^0B),$$

andererseits

$$T(A \oplus B) = Z \oplus T^0(A \oplus B).$$

Daraus folgt für den Mischeffekt (4. 18)

$$T_2^0(A, B) = T^0A \otimes T^0B,$$

und die Injektion hiervon in $T^0(A \oplus B)$ ergibt sich durch Multiplikation der Injektionen

$$T^0A \to T^0(A \oplus B), \qquad T^0B \to T^0(A \oplus B).$$

Die Kodiagonale $\alpha : T_2^0(A, A) \to T^0(A \oplus A) \to T^0A$ (5. 23) stimmt demnach mit der Multiplikation $T^0A \otimes T^0A \to T^0A$ überein. Analog beweist man

$$T_p^0(A_1, \ldots, A_p) = T^0A_1 \otimes \cdots \otimes T^0A_p$$
$$\alpha_i(u_1 \otimes \cdots \otimes u_p) = u_1 \otimes \cdots \otimes u_{i-1} \otimes u_i u_{i+1} \otimes u_{i+2} \otimes \cdots \otimes u_p$$

$u_j \in T^0A$, $i = 1, \ldots, p-1$ (vgl. 6. 2).

6. 27. Sei nun X eine s.s. abelsche Gruppe. Der Doppelkomplex $\mathfrak{T}^0X$ ist durch

$$(\mathfrak{T}^0X)_{p,*} = \otimes^p T^0X$$
$$\partial' = \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i \alpha_i : \otimes^p T^0X \to \otimes^{p-1} T^0X$$

gegeben. Er unterscheidet sich von der Eilenberg-MacLaneschen Bar-Konstruktion [12] haupsächlich dadurch, daß er aus Tensorprodukten von *s.s. abelschen Gruppen* (= kartesische Produkte von FD-Komplexen im Sinne von [12]) aufgebaut ist, während es sich dort um Tensorprodukte von *Kettenkomplexen* handelt. Wir wollen zeigen, daß das kein wesentlicher Unterschied ist.

Durch die Multiplikation ∇

$$kT^0X \otimes kT^0X \to k(T^0X \otimes T^0X) \xrightarrow{\alpha} kT^0X$$

(∇ = « shuffle »-Abbildung, 2. 15) wird der Kettenkomplex kT^0X zu einem graduierten ∂-Ring gemacht ([12] 6. 1). Durch Übergang zum Quotienten erhält man eine gleichartige Struktur im normalisierten Komplex NT^0X. Wir definieren

$$\alpha_i : \bigotimes^p kT^0X \to \bigotimes^{p-1} kT^0X$$
$$\alpha_i : \bigotimes^p NT^0X \to \bigotimes^{p-1} NT^0X$$

durch

$$\alpha_i(\nu_1 \otimes \cdots \otimes \nu_p) = \nu_1 \otimes \cdots \otimes \nu_{i-1} \otimes \nu_i\nu_{i+1} \otimes \nu_{i+2} \otimes \cdots \otimes \nu_p,$$

$\nu_j \in kT^0X$ bzw. NT^0X, $i = 1, \ldots, p-1$, unter Benutzung der soeben eingeführten Multiplikationen. Analog zu $\mathfrak{T}^0X$ bilden wir Doppelkomplexe V und $\overline{V}$ mit

$$V_{p,*} = \bigotimes^p kT^0X, \qquad \overline{V}_{p,*} = \bigotimes^p NT^0X$$
$$\partial' = \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i \alpha_i \qquad \text{auf} \qquad V_{p,*} \text{ bzw. } \overline{V}_{p,*}.$$

Es bestehen Kettenabbildungen von Doppelkomplexen

$$\nabla : V \to \mathfrak{T}^0X$$
$$\rho : V \to \overline{V}.$$

$\nabla : \bigotimes^p kT^0X \to k\bigotimes^p T^0X$ ist die auf mehrere Faktoren verallgemeinerte « shuffle »-Abbildung, und ρ ist die natürliche Projektion. Offenbar ist ρ mit beiden Randoperatoren und ∇ mit ∂'' vertauschbar. ∇ ist auch mit ∂' vertauschbar, weil es sogar mit jedem α_i vertauschbar ist. Den genauen Nachweis wollen wir jedoch übergehen. Sowohl ∇ als auch ρ induzieren Isomophismen der Homologiegruppen H'' (bezüglich des zweiten Randoperators), folglich auch der totalen Homologiegruppen nach einen bekannten Satz über (positive) Doppelkomplexe ([7], XV, 6). In diesem Sinne ist also $\mathfrak{T}^0X$ mit $\overline{V}$ äquivalent.

Nach Definition (6. 26) ist $T^0X = \text{Kern } (\eta : TX \to Q)$ mit $Q_p = Z$ für alle $p \geq 0$ (5. 31). Es folgt $NT^0X = \text{Kern } (N\eta : NTX \to NQ)$. Andererseits ist

$$(NQ)_p = \begin{cases} Z, & p = 0 \\ 0, & p \neq 0. \end{cases}$$

$N\eta$ ist also eine Ergänzung (augmentation) des graduierten ∂-Rings NTX.

Nun sieht man, daß $\overline{V}$ nichts anderes ist als die modifizierte, normalisierte Bar-Konstruktion (im Sinne von [12] 10, 11) über NTX mit der Ergänzung $N\eta$ (bis auf $\overline{V}_{0,0}$, das bei uns $= 0$, in [12] aber $= \mathbf{Z}$ ist).

7. — DIE BAR-KONSTRUKTION FÜR MEHRERE VARIABLE. DER MORPHISMUS $\mathfrak{P}$

Die Bar-Konstruktion von § 6 läßt sich auf Funktoren von mehreren Variablen verallgemeinern. Wie das für die totale Einhängung (5. 14) zu geschehen hat, ist klar, da man den Funktor in diesem Fall als Funktor *einer* Variablen der Produktkategorie auffassen kann. Die Übertragung auf die partielle Einhängung (5. 15) ist ebenfalls naheliegend. Im einzelnen geben wir sie für den Fall eines Funktors T(A, B) von zwei Variablen an. Als Anwendung werden wir den in § 6 angekündigten Zusammenhang zwischen dem Morphismus $\mathfrak{P}$ in den exakten Folgen 6. 6, 6. 11 und der Diagonale $\beta : TA \to T_2(A, A)$ (5. 23) erhalten.

7. 1. Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}'$ abelsche Kategorien und $T : \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}'$ ein kovarianter Funktor, so daß $T(0, B) = 0$ für alle $B \in \mathfrak{B}$. Dann können wir T(, B) für jedes feste B als Funktor $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ auffassen. Den p-ten Mischeffekt davon, angewandt auf $A_1, \ldots, A_p \in \mathfrak{A}$, bezeichnen wir mit $T^1_p(A_1, \ldots, A_p, B)$. Nach (6. 2) haben wir natürliche Transformationen

$$\alpha_i : T^1_p(A, \ldots, A, B) \to T^1_{p-1}(A, \ldots, A, B), \quad i = 1, \ldots, p-1.$$

Sind nun X, Y, s.s Objekte über $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$, so definieren wir den Doppelkomplex $\mathfrak{T}^1(X, Y)$ durch

$$\mathfrak{T}^1(X, Y)_{p,*} = T^1_p(X, \ldots, X, Y)$$
$$\delta' = \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i \alpha_i : \mathfrak{T}^1(X, Y)_{p,*} \to \mathfrak{T}^1(X, Y)_{p-1,*}.$$

Die Injektion $i^1 : T(X, Y) = T^1_1(X, Y) \subset t\mathfrak{T}^1(X, Y)$ ist ein Kettenmorphismus vom Grade 1. Wir nennen $\mathfrak{T}^1(X, Y)$ die partielle Bar-Konstruktion bezüglich der ersten Variablen.

7. 2. Satz. — *Es gibt einen natürlichen Isomorphismus* $\omega^1 : \mathrm{H}\mathfrak{T}^1(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \cong \mathrm{HT}(\mathrm{SX}, \mathrm{Y})$, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & \mathrm{H}_{q+1}\mathrm{T}(\mathrm{SX}, \mathrm{Y}) \\ \mathrm{H}_q\mathrm{T}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \arrow[ur, "\sigma^1"] \arrow[dr, "i^1"'] & \\ & \mathrm{H}_{q+1}\mathfrak{T}^1(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \arrow[uu, "\omega^1"'] \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

Der Beweis verläuft in völliger Analogie zu dem von 6. 4 und wird in 7. 15 skizziert. Aus dem Satz ergeben sich entsprechende Korollare wie in § 6 aus 6. 4. Wir begnügen uns hier mit der Formulierung von

7. 3. Korollar. — *Ist* $\mathrm{T}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ *additiv in der ersten Variablen, so ist der Einhängungsmorphismus* σ^1 *ein Isomorphismus.*

7. 4. Korollar. — *Sei* $\mathrm{T}(\mathrm{A}, 0) = 0$ *für alle* $\mathrm{A} \in \mathfrak{A}$ *(zusätzlich zu den bisherigen Voraussetzungen). Sind dann* X *und* Y *trivial unterhalb n bzw. m* (6. 8), *so ist* $\sigma^1 : \mathrm{H}_q\mathrm{T}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \to \mathrm{H}_{q+1}\mathrm{T}(\mathrm{SX}, \mathrm{Y})$ *ein Isomorphismus für* $q < 2n + m$ *und ein Epimorphismus für* $q = 2n + m$.

7. 3. folgt aus der Tatsache, daß $i^1 : \mathrm{T}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \to t\mathfrak{T}^1(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ für additives T ein Isomorphismus (vom Grade 1) ist.

Zum Beweis von 7. 4 fassen wir $\mathrm{T}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathfrak{T}^1(\mathrm{X}, \mathrm{Y})_{1,*}$ als Unterdoppelkomplex von $\mathfrak{T}^1(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ auf. Der Quotient W ist dann durch

$$\cdots \leftarrow 0 \leftarrow \mathrm{T}_2^1(\mathrm{X}, \mathrm{X}, \mathrm{Y}) \leftarrow \mathrm{T}_3^1(\mathrm{X}, \mathrm{X}, \mathrm{X}, \mathrm{Y}) \leftarrow \cdots$$

gegeben. Bezeichnet H′ die Homologie bezüglich des ersten und H″ die bezüglich des zweiten Randoperators, so ist nach 6. 10

$$\mathrm{H}''_{p,q}\mathrm{W} = \begin{cases} 0 & \text{für } p < 2 \\ \mathrm{H}_q\mathrm{T}_p^1(\mathrm{X}, \ldots, \mathrm{X}, \mathrm{Y}) = 0 & \text{für } p \geq 2, \quad q < 2n + m, \end{cases}$$

also auch $\mathrm{H}'_{p,q}\mathrm{H}''\mathrm{W} = 0$ für $p < 2$ oder $q < 2n + m$. Nach einem bekannten Satz über (positive) Doppelkomplexe ([7] XV, 6) folgt für die totale Homologie $\mathrm{H}_r\mathrm{W} = 0$ für $r < 2n + m + 2$. Aus der exakten Homologiefolge

$$\mathrm{H}_{q+2}\mathrm{W} \to \mathrm{H}_q\mathrm{T}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \xrightarrow{i^1_*} \mathrm{H}_{q+1}\mathfrak{T}^1(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \to \mathrm{H}_{q+1}\mathrm{W},$$

in der man i^1_* nach 7. 2 durch σ^1 ersetzen kann, ergibt sich nun die Behauptung.

7. 5. Von jetzt an setzen wir immer $T(A, 0) = T(0, B) = 0$ für alle $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$ voraus. Dann existiert neben σ^1 auch die partielle Einhängung $\sigma^2 : H_q T(X, Y) \to H_{q+1} T(X, SY)$ bezüglich der zweiten Variablen. Wir definieren $T^2_p(A, B_1, \ldots, B_p)$ als den p-ten Mischeffekt des Funktors $T(A, \ )$ bei festem $A \in \mathfrak{A}$ und mit seiner Hilfe die partielle Bar-Konstruktion $\mathfrak{T}^2(X, Y)$ bezüglich der zweiten Variablen analog zu $\mathfrak{T}^1(X, Y)$. Dann besteht analog zu 7. 2 das kommutative Diagramm

$$(7.6)\qquad \begin{tikzcd} & H_{q+1}T(X, SY) \\ H_qT(X, Y) \arrow[ur, "\sigma^2"] \arrow[dr, "i^2_*"'] & \\ & H_{q+1}\mathfrak{T}^2(X, Y) \arrow[uu, "\wr\|"', "\omega^2"] \end{tikzcd}$$

Wir wollen ferner eine Konstruktion einführen, die für die Zusammensetzung

$$H_qT(X, Y) \xrightarrow{\sigma^1} H_{q+1}T(SX, Y) \xrightarrow{\sigma^2} H_{q+2}T(SX, SY)$$

dieselbe Rolle spielt wie die Bar-Konstruktion für die (einfache) Einhängung:

7. 7 Sei $T_{p,q}(A_1, \ldots, A_p, B_1, \ldots, B_q)$ der *q-te* Mischeffekt von $T^1_p(A_1, \ldots, A_p, \ )$ oder, was dasselbe ist ([13], 9. 8), de p-te Mischeffekt von $T^2_q(\ , B_1, \ldots, B_q)$. In beiden Fällen können wir die Konstruktion von 6. 1 anwenden und erhalten natürliche Transformationen

$$\begin{aligned} \alpha^1_i : T_{p,q}(A, \ldots, A, B_1, \ldots, B_q) & \\ \to T_{p-1,q}(A, \ldots, A, B_1, \ldots, B_q), & \quad i = 1, \ldots, p-1, \\ \alpha^2_i : T_{p,q}(A_1, \ldots, A_p, B, \ldots, B) & \\ \to T_{p,q-1}(A_1, \ldots, A_p, B, \ldots, B), & \quad i = 1, \ldots, q-1. \end{aligned}$$

Sind X und Y s.s. Objekte über $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$, so definieren wir den *Tripelkomplex* $\tilde{\mathfrak{T}}(X, Y)$ durch

$$\tilde{\mathfrak{T}}(X, Y)_{p,q,*} = T_{p,q}(X, \ldots, X, Y, \ldots, Y),$$
$$\partial' = \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i \alpha^1_i : \tilde{\mathfrak{T}}(X, Y)_{p,*,*} \to \tilde{\mathfrak{T}}(X, Y)_{p-1,*,*},$$
$$\partial'' = \sum_{i=1}^{q-1} (-1)^i \alpha^2_i : \tilde{\mathfrak{T}}(X, Y)_{*,q,*} \to \tilde{\mathfrak{T}}(X, Y)_{*,q-1,*}.$$

Offenbar ist $\tilde{\mathfrak{T}}(X, Y)_{1,*,*} = \mathfrak{T}^2(X, Y)$ und $\tilde{\mathfrak{T}}(X, Y)_{*,1,*} = \mathfrak{T}^1(X, Y)$. Die Injektion

$$j^2 : \mathfrak{T}^2(X, Y) \to \tilde{\mathfrak{T}}(X, Y)$$

ist ein Kettenmorphismus der totalen Komplexe vom Grade 1, nicht so dagegen die Injektion

$$j^1 : \mathfrak{T}^1(X, Y) \to \tilde{\mathfrak{T}}(X, Y).$$

Um einen Kettenmorphismus

$$'j^1 : t\mathfrak{T}^1(X, Y) \to t\tilde{\mathfrak{T}}(X, Y)$$

vom Grade 1 zu erhalten, setzen wir $'j^1 = (-1)^p j^1$ auf $\mathfrak{T}^1(X, Y)_{p,*}$.

7. 8. Satz. — *Es gibt einen natürlichen Isomorphismus* $\tilde{\omega}$: $H\tilde{\mathfrak{T}}(X, Y) \cong HT(SX, SY)$, *so daß das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} H_{q+1}T(SX, Y) & \xrightarrow{\sigma^2} & H_{q+2}T(SX, SY) \\ \uparrow{\scriptstyle\omega^1} & & \uparrow{\scriptstyle\tilde{\omega}} \\ H_{q+1}\mathfrak{T}^1(X, Y) & \xrightarrow{'j^1_*} & H_{q+2}\tilde{\mathfrak{T}}(X, Y) \end{array}$$

kommutativ ist. ω^1 *ist dabei der Isomorphismus von* 7. 2.

Für den Beweis s. 7. 20. Vertauscht man die Rollen der beiden Variablen, so erhält man das kommutative Diagramm

$$(7.\ 9) \qquad \begin{array}{ccc} H_{q+1}T(X, SY) & \xrightarrow{\sigma^1} & H_{q+2}T(SX, SY) \\ \uparrow{\scriptstyle\omega^2} & & \uparrow{\scriptstyle\tilde{\omega}} \\ H_{q+1}\mathfrak{T}^2(X, Y) & \xrightarrow{j^2_*} & H_{q+2}\tilde{\mathfrak{T}}(X, Y) \end{array}$$

Der Beweis ist dem von 7.8 völlig analog bis auf den Unterschied im Vorzeichen zwischen $'j^1$ und j^2. Wir werden beim Beweis von 7. 8 erklären, wie dieser Unterschied zustande kommt (s. Beweis von 7. 27).

Offenbar ist $j^2 i^2 = j^1 i^1 = -'j^1 i^1$ die Injektion

$$i : T(X, Y) \doteq \tilde{\mathfrak{T}}(X, Y)_{1,1,*} \subset \tilde{\mathfrak{T}}(X, Y).$$

Nach den Sätzen 7. 2, 7. 8 und ihren durch Vertauschung der Variablen gewonnenen Analoga (7. 6), (7. 9) sind i^1_*, $'j^1_*$, i^2_*, j^2_* bzw. mit σ^1, σ^2, σ^2, σ^1 äquivalent. Es folgt :

7.10. KOROLLAR. — *Das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} & H_{q+2}T(SX, SY) \\ H_qT(X, Y) \arrow[ur, "\sigma^1\sigma^2"] \arrow[dr, "i_*"'] & \\ & H_{q+2}\tilde{\mathfrak{T}}(X, Y) \arrow[uu, "\tilde{\omega}"'] \end{tikzcd}$$

ist kommutativ, und es gilt $\sigma^2\sigma^1 = -\sigma^1\sigma^2$. $\tilde{\omega}$ *ist der Isomorphismus von* 7.8.

7.11. Neben dem Isomorphismus $\tilde{\omega}$ von 7.8 haben wir $\omega : H\mathfrak{T}(X, Y) \cong HT(SX, SY)$, wenn wir T als Funktor einer Variablen der Produktkategorie $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ auffassen (6.4). Es liegt nahe, nach einer direkten Beschreibung von

$$\tilde{\omega}^{-1}\omega : H\mathfrak{T}(X, Y) \to H\tilde{\mathfrak{T}}(X, Y)$$

zu fragen, und wir werden eine solche Beschreibung für die Untersuchung von $\bar{\mathfrak{p}}$ brauchen (7.14).

Seien

$$\xi'_p : \oplus_{i=1}^m A_i \to \oplus_{i=1}^p A_i,$$
$$\xi''_p : \oplus_{i=1}^m B_i \to \oplus_{i=m-p+1}^m B_i, \quad p = 0, \ldots, m$$

die Projektionen auf die ersten bzw. letzten p Summanden. Wir definieren $\xi_{p,m-p}$ als die Zusammensetzung

$$(7.12) \quad T_m(A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_m) \xrightarrow{\lambda} T(\oplus_{i=1}^m A_i, \oplus_{i=1}^m B_i)$$
$$\xrightarrow{T(\xi'_p, \xi''_{m-p})} T(\oplus_{i=1}^p A_i, \oplus_{i=p+1}^m B_i) \xrightarrow{\tilde{\rho}} T_{p,m-p}(A_1, \ldots, A_p, B_{p+1}, \ldots, B_m).$$

Dabei bezeichnet $T_m(A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_m)$ den m-ten Mischeffekt von T, aufgefaßt als Funktor einer Variablen aus $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ [11]. λ ist die natürliche Injektion (6.1), $\tilde{\rho}$ die Projektion. Schließlich definieren wir

$$\xi : \mathfrak{T}(X, Y)_{m,*} = T_m(X, \ldots, X, Y, \ldots, Y)$$
$$\to \oplus_{p=1}^{m-1} T_{p,m-p}(X, \ldots, X, Y, \ldots, Y) = \oplus_{p=1}^{m-1} \tilde{\mathfrak{T}}(X, Y)_{p,m-p,*}$$

als den Morphismus mit den Komponenten $\xi_{p,m-p}$.

(11) Eigentlich müßte man $T_m((A_1, B_1), \ldots, (A_m, B_m))$ schreiben.

7. 13. Hilfssatz. — $\xi : \mathfrak{T}(X, Y) \to \tilde{\mathfrak{T}}(X, Y)$ *ist ein Kettenmorphismus der totalen Komplexe, und das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} H\mathfrak{T}(X, Y) \arrow[d, "\xi"'] \arrow[dr, "\omega"] & \\ & HT(SX, SY) \\ H\tilde{\mathfrak{T}}(X, Y) \arrow[ur, "\tilde{\omega}"'] & \end{tikzcd}$$

ist kommutativ.

Den Beweis geben wir am Schluß des Paragraphen (7. 29). Wir sind nun in der Lage, den Morphismus $\overline{\beta}$ in den exakten Folgen 6. 6 und 6. 11 näher zu untersuchen, und wollen zeigen :

7. 14. Satz. — *Sei* $T : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ *ein Funktor zwischen abelschen Kategorien mit* $T(0) = 0$, X *ein s.s. Objekt über* $\mathfrak{A}$ *und*

entweder (a) T *quadratisch*
oder (b) X *trivial unterhalb* n *und* $q \leq 3n$.

Dann ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & H_{q-1}T_2(X, X) \arrow[dd, "\sigma^1\sigma^2"] \\ H_{q+1}TSX \arrow[ur, "\overline{\beta}"] \arrow[dr, "\beta_*"'] & \\ & H_{q+1}T_2(SX, SX) \end{tikzcd}$$

kommutativ, und $\sigma^1\sigma^2$ *ist ein Isomorphismus.*

$$\beta : TSX \to T_2(SX, SX)$$

ist dabei die Diagonale (5. 23).

Beweis. — Im Fall (a) ist $T_2(A, B)$ additiv in jeder der beiden Variablen, und σ^1, σ^2 sind Isomorphismen für alle Dimensionen q nach 7. 3. Im Fall (b) ist

$$\sigma^2 : H_{q-1}T_2(X, X) \to H_qT_2(X, SX)$$

ein Isomorphismus für $q \leq 3n$ nach 7.4. Aus demselben Grund ist aber $\sigma^1 : H_qT_2(X, SX) \to H_{q+1}T_2(SX, SX)$ ein Isomorphismus für $q \leq 3n$, denn SX ist trivial unterhalb $n + 1$. (Ist nämlich $X' \simeq X$ und $X'_q = 0$ für $q < n$, so ist $SX' \simeq SX$ und $(SX')_q = 0$ für $q < n + 1$.)

Es ist also nur noch die Kommutativität $\beta_* = \sigma^1\sigma^2\overline{\beta}$ zu beweisen. Es gilt

$$\sigma^1\sigma^2 = \tilde{\omega}i_* \quad \text{nach } 7.\ 10$$
$$\overline{\beta} = p_*j_*^{-1}\omega^{-1} \quad \text{nach } 6.\ 15.$$

Die zu beweisende Gleichung ist demnach mit $\tilde{\omega}^{-1}\beta_*\omega j_* = i_* p_*$ äquivalent.

Sei $\varphi : \mathrm{T} \to \mathrm{T}'$ eine natürliche Tranformation von Funktoren $(\mathrm{T}'(0) = 0)$. Sie induziert natürliche Transformationen der Mischeffekte $\mathrm{T}_p \to \mathrm{T}'_p$, die wir ebenfalls mit φ bezeichnen. φ ist dann mit den α_i von (6. 2) vertauschbar und induziert einen Kettenmorphismus von Doppelkomplexen $\varphi : \mathfrak{T}\mathrm{X} \to \mathfrak{T}'\mathrm{X}$ für jedes s.s. Objekt X. Aus der Definition von ω im Anschluß an 6. 24 folgt, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{HTSX} \arrow[r, "\varphi_*"] & \mathrm{HT'SX} \\ \mathrm{H}\mathfrak{T}\mathrm{X} \arrow[u, "\omega"] \arrow[r, "\varphi_*"] & \mathrm{H}\mathfrak{T}'\mathrm{X} \arrow[u, "\omega"'] \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. (Auf diese Weise wird die Aussage präzisiert, daß ω in Abhängigkeit von T natürlich ist, vgl. 6. 4). Wenden wir das auf die Diagonale $\beta : \mathrm{T} \to \mathrm{T}_2^d$ $(\mathrm{T}_2^d\mathrm{A} = \mathrm{T}_2\,(\mathrm{A}, \mathrm{A})$, 5. 23) an, so erhalten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{HTSX} \arrow[r, "\beta_*"] & \mathrm{HT}_2(\mathrm{SX}, \mathrm{SX}) \\ \mathrm{H}\mathfrak{T}\mathrm{X} \arrow[u, "\omega"] \arrow[r, "\beta_*"] & \mathrm{H}\mathfrak{T}_2(\mathrm{X}, \mathrm{X}). \arrow[u, "\omega"'] \end{tikzcd}$$

Also ist $\tilde{\omega}^{-1}\beta_*\omega j_* = \tilde{\omega}^{-1}\omega\beta_* j_* = \xi_*\beta_* j_*$ nach 7. 13, und zu zeigen bleibt $(\xi\beta j)_* = (ip)_*$.

Wir werden sogar $\xi\beta j = ip : \mathrm{F}_2\mathfrak{T}\mathrm{X} \to \hat{\mathfrak{T}}_2(\mathrm{X}, \mathrm{X})$ beweisen. Dabei ist $\mathrm{F}_2\mathfrak{T}\mathrm{X}$ der Doppelkomplex

$$\cdots \leftarrow 0 \leftarrow \mathrm{TX} \xleftarrow{-\alpha} \mathrm{T}_2(\mathrm{X}, \mathrm{X}) \leftarrow 0 \leftarrow \cdots$$

(vgl. den Beweis von 6. 11). $p : \mathrm{F}_2\mathfrak{T}\mathrm{X} \to \mathrm{T}_2(\mathrm{X}, \mathrm{X})$ ist die natürliche Projektion. $j : \mathrm{F}_2\mathfrak{T}\mathrm{X} \to \mathfrak{T}\mathrm{X}$ und $i : \mathrm{T}_2(\mathrm{X}, \mathrm{X}) \to \hat{\mathrm{T}}_2(\mathrm{X}, \mathrm{X})$ sind die Injektionen. Die behauptete Gleichung bedeutet: $\xi\beta$ verschwindet auf $(\mathfrak{T}\mathrm{X})_{1,*} = \mathrm{TX}$ und bildet $(\mathfrak{T}\mathrm{X})_{2,*} = \mathrm{T}_2(\mathrm{X}, \mathrm{X})$ identisch in $\mathrm{T}_2(\mathrm{X}, \mathrm{X}) = \hat{\mathfrak{T}}_2(\mathrm{X}, \mathrm{X})_{1,1,*}$ ab. Die erste Behauptung ist aus Gradgründen klar, denn $(\mathfrak{T}\mathrm{X})_{1,*}$ wird durch $\xi\beta$ in $\bigoplus_{p+q=1}\hat{\mathfrak{T}}_2(\mathrm{X}, \mathrm{X})_{p,q,*} = 0$ abgebildet. Um die zweite zu beweisen, betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}_2(\mathrm{X}, \mathrm{X}) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\xi"'] & (\mathrm{T}_2)_2(\mathrm{X}, \mathrm{X}, \mathrm{X}, \mathrm{X}) = \mathfrak{T}_2(\mathrm{X}, \mathrm{X})_{2,*} \arrow[d, "\lambda"] & \\ \mathrm{T}(\mathrm{X} \oplus \mathrm{X}) \arrow[r, "\beta"] & \mathrm{T}_2(\mathrm{X} \oplus \mathrm{X}, \mathrm{X} \oplus \mathrm{X}) \arrow[r, "\mathrm{T}_2(\xi'_1, \xi''_1)"] & \mathrm{T}_2(\mathrm{X}, \mathrm{X}). \end{tikzcd}$$

Das linke Quadrat entsteht aus

$$\begin{array}{ccc} T_2(X, X) & \xrightarrow{\varphi} & T'_2(X, X) \\ \lambda\downarrow & & \downarrow\lambda \\ T(X \oplus X) & \xrightarrow{\varphi} & T'(X \oplus X) \end{array}$$

wenn man für $\varphi : T \to T'$ speziell $\beta : T \to T_2$ nimmt. Nach Definition (7.12) ist $\xi = \xi_{1,1} = T_2(\xi'_1, \xi''_1) \circ \lambda$ auf $\mathfrak{T}_2(X, X)_{2,*}$, folglich $\xi\beta = T_2(\xi'_1, \xi''_1) \circ \lambda\beta = T_2(\xi'_1, \xi''_1) \circ \beta\lambda$. Man verifiziert nun leicht, daß $T_2(\xi'_1, \xi''_1) \circ \beta : T(X \oplus X) \to T_2(X, X)$ die natürliche Projektion und daher $\xi\beta : T_2(X, X) \to T_2(X, X)$ die Identität ist.

7. 15. Beweis von 7. 2. — Der Beweis unterscheidet sich von dem für 6. 4 nur dadurch, daß der Funktor T in § 6 bei Anwendung auf ein s.s. Objekt hier durch T(, Y) und bei Anwendung auf ein s.s. Doppelobjekt durch T(, Q $\hat{\otimes}$ Y) ersetzt wird. Wir geben daher nur die wichtigsten Schritte noch einmal an und empfehlen, die entsprechenden Stellen in § 6 jeweils zum Vergleich heranzuziehen. Wir betrachten das zu (6. 21) analoge kommutative Diagramm

(7. 16)

$$\begin{array}{ccccc} H_qT(X, Y) & = & H_qT(Q\otimes X, Q\otimes Y) & \xrightarrow{(\rho f)_*} & H_qN'T(Q\hat{\otimes}X, Q\hat{\otimes}Y) \\ \downarrow\sigma^1 & & \downarrow\bar{\sigma}^1 & & \downarrow\hat{\sigma}^1 \\ H_{q+1}T(SX, Y) & \xleftarrow{T(\psi, \iota)_*} & H_{q+1}T(S\otimes X, Q\otimes Y) & \xrightarrow{(\rho f)_*} & H_{q+1}N'T(S\hat{\otimes}X, Q\hat{\otimes}Y) \end{array}$$

mit

$$\bar{\sigma}^1 = (T(\pi \otimes \iota, \iota),\ T(\varkappa \otimes \iota, \iota))_*$$
$$\hat{\sigma}^1 = (N'T(\pi \hat{\otimes} \iota, \iota),\ N'T(\varkappa \hat{\otimes} \iota, \iota))_*.$$

Man beachte $Q \otimes X = X$, $Q \otimes Y = Y$ (5. 31). Das linke Quadrat ist zu 5. 34 analog und wird durch Anwendung des Funktors T(, Y) auf das Diagramm in 5. 32 erhalten. Das rechte Quadrat ergibt sich aus der Natürlichkeit des Alexander-Whitney-Morphismus f und der Projektion ρ eines s.s. Doppelobjekts W auf seinen ersten normalisierten Komplex N′W. Für zwei s.s. Doppelobjekte U, V ist dabei T(U, V) das s.s. Doppelobjekt mit $T(U, V)_{p,q} = T(U_{p,q}, V_{p,q})$ und entsprechend für monotone Abbildungen. Alle horizontalen Pfeile in (7. 16)

bezeichnen Isomorphismen, da $T(\psi, \iota)$ ρ, und f Homotopieäquivalenzen sind. Fast wörtlich wie in § 6 beweist man:

7. 17. *ρf in der oberen Zeile von* (7. 16) *stimmt mit der Identität von* $T(X, Y)$ *überein* (vgl. 6. 22).

7. 18. *Es gibt einen Isomorphismus des Doppelkomplexes* $N'T(S \hat{\otimes} X, Q \hat{\otimes} Y)$ *mit der partiellen Bar-Konstruktion* $\mathfrak{T}^1(X, Y)$, *durch den* $\hat{\sigma}^1$ *in* $i^1_* : H_q T(X, Y) \to H_{q+1}\mathfrak{T}^1(X, Y)$ *übergeht.* (vgl. 6. 23, 6. 24).

Dann liest man die Behauptung von 7. 2 aus (7. 16) ab. Der Isomorphismus ω^1 ist die Zusammensetzung

$$(7.19) \quad \omega^1 : H\mathfrak{T}^1(X, Y) \cong HN'T(S \hat{\otimes} X, Q \hat{\otimes} Y) \xrightarrow{(\rho f)_*^{-1}} HT(S \otimes X, Q \otimes Y) \xrightarrow{T(\psi, \iota)_*} HT(SX, Y).$$

7. 20. Beweis von 7. 8. — Der Beweis verläuft wieder nach demselben Muster wie die Beweise von 6. 4 und 7. 2. Es kommen allerdings einige weitere Komplikationen hinzu, und wir müssen nun auch auf s.s. Tripelobjekte eingehen.

Sei W ein s.s. Tripelobjekt (Definition analog zu 2. 2). Es sind also 3 Arten von Seiten- und Ausartungsoperatoren erklärt

$$\begin{array}{lll} \partial'_i = W_{\varepsilon^i, \iota, \iota} & \partial''_i = W_{\iota, \varepsilon^i, \iota} & \partial'''_i = W_{\iota, \iota, \varepsilon^i} \\ s'_i = W_{\eta^i, \iota, \iota} & s''_i = W_{\iota, \eta^i, \iota} & s'''_i = W_{\iota, \iota, \eta^i} \end{array}$$

(vgl. 6. 17) die untereinander vertauschbar sind. Wie in 6. 17 definieren wir

$$N'W = \bigcap_{i>0} \operatorname{Kern} \partial'_i$$
$$D'W = \bigcup_{i} \operatorname{Bild} s'_i$$

und entsprechend N'', D'' usw. $N'W$ ist ein trigaduiertes Objekt, das bezüglich der ersten Graduierung ein Kettenkomplex, bezüglich jeder der beiden anderen ein s.s. Objekt ist. Wir bezeichnen die Seiten- und Ausartungsoperatoren wieder mit ∂''_i, ∂'''_i, s''_i, s'''_i. Dann können wir auch $N''N'W$ une analog $N'N''W$ bilden. Offenbar gilt

$$N'N''W = N''N'W = N'W \cap N''W,$$

wofür wir zur Abkürzung auch $\tilde{N}W$ schreiben wollen. Wie in (6. 18) hat man die Zerlegungen

$$\begin{aligned} W &= N'W \oplus D'W \\ W &= N''W \oplus D''W. \end{aligned}$$

Da sie miteinander verträglich sind, erhält man die Zerlegung

$$W = \tilde{N}W \oplus (D'W \cup D''W). \tag{7. 21}$$

Wie in 6. 19 sind die Projektionen

$$\rho'' : W \to N''W, \qquad \rho' : N''W \to \tilde{N}W.$$

Homotopieäquivalenzen der totalen Komplexe. Durch Zusammensetzen folgt

7. 22. *Die natürliche Projektion* $\tilde{\rho} : W \to \tilde{N}W$ *von* (7. 21) *ist eine Homotopieäquivalenz der totalen Komplexe.*

Unter dem Diagonalobjekt von W verstehen wir das (einfache) s.s. Objekt dW mit $(dW)_q = W_{q,q,q}$ (und entsprechend für monotone Abbildungen). Nach dem Satz von Eilenberg-Zilber-Cartier (2. 9, 2. 16) ist der Kettenkomplex kdW mit dem totalen Komplex tW homotopieäquivalent. Eine spezielle Homotopieäquivalenz ist der Alexander-Whitney-Morphismus

$$\tilde{f} : (dW)_m \to \bigoplus_{p+q+r=m} W_{p,q,r}$$

mit den Komponenten

$$\tilde{f}_{p,q,r} = W(\varepsilon_m^m \varepsilon_{m-1}^{m-1} \ldots \varepsilon_{p+1}^{p+1},\ \varepsilon_m^m \ldots \varepsilon_{p+q+1}^{p+q+1} \varepsilon_{p+q}^0 \ldots \varepsilon_{q+1}^0,\ \varepsilon_m^0 \ldots \varepsilon_{r+1}^0) \tag{7. 23}$$

(vgl. 2. 15, zur Definition von ε_j^i s. 1. 2).

Sind U, V s.s. Doppelobjekte über $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$, so sei $\tilde{T}(U, V)$ das s.s. Tripelobjekt mit $\tilde{T}(U, V)_{p,q,r} = T(U_{p,r}, V_{q,r})$ und entsprechend für monotone Abbildungen. Sind G, G′ s.s. Objekte über der Kategorie der endlich erzeugten abelschen Gruppen und X, Y s.s. Objekte über $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$, so ist $T(G \otimes X, G' \otimes Y)$ das Diagonalobjekt von $\tilde{T}(G \hat{\otimes} X, G' \hat{\otimes} Y)$.

Wir betrachten nun das zu (6. 21) und (7. 16) analoge kommutative Diagramm

(7. 24)

$$\begin{array}{ccccc}
H_{q+1}T(SX, Y) & \xrightarrow{T(\psi, \iota)_*} & H_{q+1}T(S \otimes X, Q \otimes Y) & \xrightarrow{(\tilde{\rho}\tilde{f})_*} & H_{q+1}\tilde{N}\tilde{T}(S \hat{\otimes} X, Q \hat{\otimes} Y) \\
\downarrow{\scriptstyle \sigma^2} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\sigma}^2} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\sigma}^2} \\
H_{q+2}T(SX, SY) & \xrightarrow{T(\psi, \psi)_*} & H_{q+2}T(S \otimes X, S \otimes Y) & \xrightarrow{(\tilde{\rho}\tilde{f})_*} & H_{q+2}\tilde{N}\tilde{T}(S \hat{\otimes} X, S \hat{\otimes} Y)
\end{array}$$

mit

$$\bar{\sigma}^2 = (\mathrm{T}(\iota, \pi\otimes\iota),\ \mathrm{T}(\iota, \varkappa\otimes\iota))_*$$
$$\tilde{\sigma}^2 = (\tilde{\mathrm{N}}\hat{\mathrm{T}}(\iota, \pi\hat{\otimes}\iota),\ \tilde{\mathrm{N}}\hat{\mathrm{T}}(\iota, \varkappa\hat{\otimes}\iota))_*.$$

Das linke Quadrat ergibt sich aus 5. 32, das rechte aus der Natürlichkeit des Alexander-Whitney-Morphismus $\tilde{f}$ und der Projektion $\tilde{\rho} : \mathrm{W} \to \tilde{\mathrm{N}}\mathrm{W}$. Alle horizontalen Pfeile in (7. 24) bezeichnen Isomorphismem. Wir werden zeigen:

7. 25. *Es gilt*

$$\mathrm{N}''\hat{\mathrm{T}}(\mathrm{S}\hat{\otimes}\mathrm{X}, \mathrm{Q}\hat{\otimes}\mathrm{Y})_{*,q,*} = \begin{cases}\mathrm{T}(\mathrm{S}\hat{\otimes}\mathrm{X}, \mathrm{Q}\hat{\otimes}\mathrm{X}), & q = 0\\ 0, & q \neq 0,\end{cases}$$

folglich $t\tilde{\mathrm{N}}\hat{\mathrm{T}}(\mathrm{S}\hat{\otimes}\mathrm{X}, \mathrm{Q}\hat{\otimes}\mathrm{Y}) = t\mathrm{N}'\mathrm{T}(\mathrm{S}\hat{\otimes}\mathrm{X}, \mathrm{Q}\hat{\otimes}\mathrm{Y})$, *und der Morphismus* $\tilde{\rho}\tilde{f}$ *in der oberen Zeile von* (7. 24) *stimmt mit* ρf *in der unteren Zeile von* (7. 16) *überein.*

7. 26. $\tilde{\mathrm{N}}\hat{\mathrm{T}}(\mathrm{S}\hat{\otimes}\mathrm{X}, \mathrm{S}\hat{\otimes}\mathrm{Y})$ *ist als Tripelkomplex mit* $\tilde{\mathfrak{T}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ *in natürlicher Weise isomorph.*

7. 27. *Durch die Isomorphismen von* 7. 18 *und* 7. 26 *geht* $\tilde{\sigma}^2$ *in* $'j^1_* : \mathrm{H}_{q+1}\mathfrak{T}^1(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \to \mathrm{H}_{q+2}\tilde{\mathfrak{T}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ *über.*

Dann liest man aus (7. 24) unter Beachtung der Definition von ω^1 (7. 19) die Behauptung von 7. 8 ab. Der Isomorphismus $\tilde{\omega}$ ist die Zusammensetzung

$$(7.\ 28)\quad \tilde{\omega} : \mathrm{H}\tilde{\mathfrak{T}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \cong \mathrm{H}\tilde{\mathrm{N}}\hat{\mathrm{T}}(\mathrm{S}\hat{\otimes}\mathrm{X}, \mathrm{S}\hat{\otimes}\mathrm{Y}) \xrightarrow{(\tilde{\rho}\tilde{f})_*^{-1}} \mathrm{HT}(\mathrm{S}\hat{\otimes}\mathrm{X}, \mathrm{S}\hat{\otimes}\mathrm{Y}) \xrightarrow{\mathrm{T}(\psi, \psi)_*} \mathrm{HT}(\mathrm{SX}, \mathrm{SY}).$$

Beweis von 7. 25 (vgl. 6. 22). — Nach Definition von Q (5. 31) ist $\hat{\mathrm{T}}(\mathrm{S}\hat{\otimes}\mathrm{X}, \mathrm{Q}\hat{\otimes}\mathrm{Y})_{*,q,*} = \mathrm{T}(\mathrm{S}\hat{\otimes}\mathrm{X}, \mathrm{Q}\hat{\otimes}\mathrm{Y})$, und alle s.s. Operatoren ∂''_i, s''_i der zweiten s.s. Struktur von $\hat{\mathrm{T}}(\mathrm{S}\hat{\otimes}\mathrm{X}, \mathrm{Q}\hat{\otimes}\mathrm{Y})$ sind Identitäten. Daraus folgt die erste Behauptung.

In $\rho''\tilde{f} : \mathrm{T}(\mathrm{S}\otimes\mathrm{X}, \mathrm{Q}\otimes\mathrm{Y})_m \to (t\mathrm{N}''\hat{\mathrm{T}}(\mathrm{S}\hat{\otimes}\mathrm{X}, \mathrm{Q}\hat{\otimes}\mathrm{X}))_m$ liefern nach dem, was eben bewiesen wurde, nur die Komponenten $\rho''\tilde{f}_{p,q,r}$ $(p+q+r=m)$ mit $q=0$ einen Beitrag. Nach den Definitionen von f (2. 15) und $\tilde{f}$ (7. 23) ist aber

$$f_{p,r} = \tilde{f}_{p,0,r} : \mathrm{T}(\mathrm{S}_m\otimes\mathrm{X}_m, \mathrm{Y}_m) \to \mathrm{T}(\mathrm{S}_p\otimes\mathrm{X}_r, \mathrm{Y}_r),\quad p+r=m,$$

also $f = \rho'' \tilde{f}$. Durch Zusammensetzen mit

$$\rho' : N''W \to N'N''W = \tilde{N}W$$

erhält man die zweite Behauptung.

Beweis von 7. 26. — Nach Definition von S (5. 29) ist

$$\tilde{T}(S \hat{\otimes} X, S \hat{\otimes} Y)_{p,q,*} = T(S_p \otimes X, S_q \otimes Y) = T(\oplus^p X, \oplus^q Y).$$

Wie im Beweis von 6. 23 bestimmt man $(D'W)_{p,q,*}$ und $(D''W)_{p,q,*}$ für $W = \tilde{T}(S \hat{\otimes} X, S \hat{\otimes} Y)$ und zeigt unter Verwendung der direkten Zerlegung (7. 21), daß es einen Isomorphismus

$$(\tilde{N}W)_{p,q,*} \cong T_{p,q}(X, \ldots, X, Y, \ldots, Y) = \tilde{\mathfrak{T}}(X, Y)_{p,q,*}$$

gibt, so daß die Projektionen $\tilde{\rho} : W \to \tilde{N}W$ und

$$\tilde{\rho} : T(\oplus^p X, \oplus^q Y) \to T_{p,q}(X, \ldots, X, Y, \ldots, Y)$$

einander entsprechen. Daraus schließt man ebenso wie früher, daß die ersten beiden Randoperatoren ∂', ∂'' von $\tilde{N}W$ gerade den in 7. 7 für $\tilde{\mathfrak{T}}(X, Y)$ definierten entsprechen ([12]).

Beweis von 7. 27. — Wir müssen eine Nullhomotopie von $t\tilde{N}\tilde{T}(S \hat{\otimes} X, C \hat{\otimes} Y)$ angeben. Sei $s : C_p \to C_{p+1}$ wie im Beweis von 6. 24. Setzt man $s'' = T(\iota, s \otimes \iota)$, so ist s'' eine Nullhomotopie von $\tilde{T}(S \hat{\otimes} X, C \hat{\otimes} Y)$ bezüglich des zweiten Randoperators ∂'' und mit den beiden anderen Randoperatoren ∂', ∂''' vertauschbar. s'' ist i.a. keine Nullhomotopie bezüglich des totalen Randoperators $\partial = \partial' + (-1)^p \partial'' + (-1)^{p+q} \partial'''$ (auf $\tilde{T}(S \hat{\otimes} X, C \hat{\otimes} Y)_{p,q,r}$), aber man erhält eine solche Nullhomotopie, wenn man s'' durch $(-1)^p s''$ ersetzt. An dieser Stelle kommt also das Vorzeichen $(-1)^p$ herein. Es würde nicht auftreten, wenn man die Rolle der beiden Variablen vertauscht hätte. Das erklärt den Unterschied zwischen $'j^1$ in 7. 8 und j^2 in (7. 9). Im übrigen verläuft der Beweis von 7. 27 wie der von 6. 24, und wir können die Einzelheiten übergehen.

Damit ist der Beweis von 7. 8 beendet.

([12]) Für die Anwendung, die wir von 7. 8 gemacht haben (7. 14), war übrigens die explizite Kenntnis der Randoperatoren ∂' und ∂'' in $\tilde{\mathfrak{T}}(X, Y)$ nicht erforderlich.

7. 29. Beweis von 7. 13. — Wir betrachten das Diagramm

(7. 30)

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{T}(X, Y) \arrow[dd, "\bar{g}"] & T(S\hat{\otimes}X, S\hat{\otimes}Y) \arrow[l, "\rho"'] \arrow[dd, "g"] & & \\
& & T(S\otimes X, S\otimes Y) \arrow[ul, "f"'] \arrow[dl, "\tilde{f}"] \arrow[r, "T(\psi,\psi)_*"] & T(SX, SY) \\
\tilde{\mathfrak{T}}(X, Y) & \tilde{T}(S\hat{\otimes}X, S\hat{\otimes}Y) \arrow[l, "\tilde{\rho}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Die obere Zeile stammt aus dem Beweis von 6. 4 (angewandt auf den Funktor $T : \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}'$) und liefert beim Übergang zur Homologie den Isomorphismus $\omega : H\mathfrak{T}(X, Y) \cong HT(SX, SY)$ (6. 21). Entsprechend ist die untere Zeile dem Beweis von 7. 8 entnommen und liefert $\tilde{\omega} : H\tilde{\mathfrak{T}}(X, Y) \cong HT(SX, SY)$ (7. 24, 7. 28). Dabei wurde $\mathfrak{T}(X, Y)$ mit $N'T(S\hat{\otimes}X, S\hat{\otimes}Y)$ (6. 23) und $\tilde{\mathfrak{T}}(X, Y)$ mit $\tilde{N}\tilde{T}(S\hat{\otimes}X, S\hat{\otimes}Y)$ (7. 26) identifiziert. Die Morphismen g und $\bar{g}$ sind noch zu definieren.

Wir können $\tilde{T}(S\hat{\otimes}X, S\hat{\otimes}Y)$ als s.s. Doppelobjekt V über der Kategorie der s.s. Objekte über $\mathfrak{A}'$ auffassen, indem wir

$$\begin{aligned}
V_{p,q} &= \tilde{T}(S\hat{\otimes}X, S\hat{\otimes}Y)_{p,q,*} = T(S_p\otimes X, S_q\otimes Y) \\
V_{\alpha,\beta} &= \tilde{T}(S\hat{\otimes}X, S\hat{\otimes}Y)_{\alpha,\beta,\iota} = T(S_\alpha\otimes\iota, S_\beta\otimes\iota)
\end{aligned}$$

setzen. $T(S\hat{\otimes}X, S\hat{\otimes}Y)$ entspricht dann dem Diagonalobjekt von V. Sei $g : dV \to tV$ der Alexander-Whitney-Morphismus (2. 15). Man verifiziert leicht $gD\,dV \subset D'V \cup D''V$, folglich wird durch Übergang zu den Quotienten $\bar{g} : N\,dV \to tN'N''V = t\tilde{N}V$ induziert (vgl. [13], 2. 1 *a*). In Anbetracht der vorgenommenen Identifizierungen sind damit die Morphismen g und $\bar{g}$ in (7. 30) definiert. Es sind Kettenmorphismen der totalen Komplexe. Offenbar ist das Quadrat in (7. 30) kommutativ. Aus den expliziten Definitionen (2. 15, 7. 23) entnimmt man $gf = \tilde{f}$, d.h. auch das Dreieck in (7. 30) ist kommutativ (13). Wenn wir nun zeigen, daß $\bar{g} = \xi$ ist, so haben wir 7. 13 bewiesen.

Die Komponente

$$g_{p,q} : T(S_m\otimes X, S_m\otimes Y) \to T(S_p\otimes X, S_q\otimes Y), \quad m = p + q,$$

von g ist durch $g_{p,q} = T(\partial_{p+1}\partial_{p+2}\cdots\partial_m\otimes\iota, (\partial_0)^p\otimes\iota)$ definiert (2.15).

(13) Uns würde auch $gf \simeq \tilde{f}$ genügen. Das schließt man ohne Rechnung aus 2. 9 *b*), übertragen auf *s.s.* Tripelobkejte.

Nach Definition von S (5. 29) ist $S_m \otimes X = \bigoplus_{k=1}^m \gamma_k^m \times X = \bigoplus^m X$, und mit den Bezeichnungen von 7. 11 gilt $\partial_{p+1}\partial_{p+2} \dots \partial_m \otimes \iota = \xi'_p$ (Projektion auf die ersten p Summanden) und $(\partial_0)^p \otimes \iota = \xi''_q$ (Projektion auf die letzten q Summanden). Also ist

$$g_{p,q} = T(\xi'_p, \xi''_q) : T(\bigoplus^m X, \bigoplus^m Y) \to T(\bigoplus^p X, \bigoplus^q Y).$$

Die Morphismen ρ und $\tilde{\rho}$ in (7. 30) sind die natürlichen Projektionen

$$\rho : T(S \hat{\otimes} X, S \hat{\otimes} Y)_{m,*} = T(\bigoplus^m X, \bigoplus^m Y) \to T_m(X, \dots, X, Y, \dots, Y)$$
$$\tilde{\rho} : \tilde{T}(S \hat{\otimes} X, S \hat{\otimes} Y)_{p,q,*} = T(\bigoplus^p X, \bigoplus^q Y) \to T_{p,q}(X, \dots, X, Y, \dots, Y)$$

(s. Beweise von 6. 23 und 7. 26). Daß das Quadrat in (7. 30) kommutativ ist, bedeutet

$$\bar{g}_{p,q}\rho = \tilde{\rho} g_{p,q}.$$

Bezeichnet $\lambda : T_m(X, \dots, X, Y, \dots, Y) \to T(\bigoplus^m X, \bigoplus^m Y)$ die natürliche Injektion, so gilt $\rho\lambda = \iota$. Es folgt

$$\bar{g}_{p,q} = \bar{g}_{p,q}\rho\lambda = \tilde{\rho} g_{p,q}\lambda = \tilde{\rho} T(\xi'_p, \xi''_q)\lambda = \xi_{p,q}$$

(letzteres nach Definition, 7. 12), also $\bar{g} = \xi$.

8. — ANWENDUNGEN AUF DERIVIERTE FUNKTOREN

Sei wieder $T : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ ein kovarianter Funktor zwischen abelschen Kategorien mit $T(0) = 0$. Wir setzen jetzt noch voraus, daß die Kategorie $\mathfrak{A}$ hinreichend viele projektive Objekte enthält, d.h. daß jedes $A \in \mathfrak{A}$ Quotient eines projektiven Objekts ist. Dann gibt es zu jedem $A \in \mathfrak{A}$ und jeder ganzen Zahl $n \geq 0$ eine projektive s.s. Auflösung X von (A, n) in $\mathfrak{A}$ (4. 1, 4. 3). Der q-te (links-)derivierte Funktor L_qT ist durch

$$L_qT(A, n) = H_qTX$$

definiert (4. 5).

8. 1. *Ist* X *eine (projektive) s.s. Auflösung von* (A, n), *so ist die Einhängung* SX *eine (projektive) s.s. Auflösung von* $(A, n+1)$.

Beweis. — Nach 4. 2 genügt, es die entsprechende Behauptung für die normalen Komplexe NX und NSX zu beweisen. Wegen $NSX = SNX$ (5. 3) folgt diese unmittelbar aus der Definition der Einhängung eines Kettenkomplexes (5. 1).

Zum Begriff der s.s. Auflösung gehört es, daß ein Isomorphismus $H_n(X) \cong A$ *festgelegt* ist. Wir legen $H_{n+1}SX \cong A$ so fest, daß der Einhängungsisomorphismus $\sigma : H_nX \cong H_{n+1}SX$ (6. 5 mit T = Identität) der Identität von A entspricht.

8. 2. Der Einhängungsmorphismus $\sigma_X(T) : H_qTX \to H_{q+1}TSX$ (5. 9) liefert demnach

$$\sigma = \sigma_A(T) : L_qT(A, n) \to L_{q+1}T(A, n+1),$$

und aus (5. 10) folgt, daß $\sigma(T)$ *eine natürliche Transformation von* $L_qT(\ , n)$ *in* $L_{q+1}T(\ , n+1)$ *ist.*

Die Ergebnisse von §§ 6, 7 lassen sich direkt auf $\sigma_A(T)$ als Spezialfall von $\sigma_X(T)$ anwenden. Wir diskutieren einige dieser Anwendungen im einzelnen:

8. 3. *Ist entweder* T *additiv oder* $q < 2n$, *so ist*

$$\sigma_A(T) : L_qT(A, n) \to L_{q+1}T(A, n+1)$$

ein Isomorphismus. Für $q = 2n$ *ist* $\sigma_A(T)$ *ein Epimorphismus.* Das folgt aus 6. 5 und 6. 12. Ist nämlich X eine s.s. Auflösung von (A, n), so ist X trivial unterhalb n im Sinne von 6. 8.

Nach diesem Resultat können wir die Funktoren $L_{q+n}T(\ \ , n)$ für alle $n > q$ miteinander identifizieren und dadurch den *q-ten stabilen derivierten Funktor* $L_q^S T$ definieren. Ist T additiv, so entfällt die Einschränkung $n > q$, und $L_q^S T = L_qT(\ \ , 0)$ stimmt mit dem gewöhnlichen derivierten Funktor L_qT überein (4. 7). Man kann zeigen, daß $L_q^S T$ stets ein *additiver* Funktor ist.

8. 4. Entsprechendes gilt für Funktoren von mehreren Variablen. Wir führen es für $T(A, B)$, $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$ aus. Dabei setzen wir auch von $\mathfrak{B}$ voraus, daß es eine abelsche Kategorie ist, die hinreichend viele projektive Objekte enthält. Die derivierten Funktoren werden durch

$$L_qT(A, n; B, m) = H_qT(X, Y)$$

definiert, wobei X und Y projektive s.s. Auflösungen von (A, n) bzw. (B, m) sind. Ist $T(A, 0) = T(0, B) = 0$ für alle $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$, so sind nach 5. 15 die partiellen Einhängungen

$$\sigma^1 = \sigma^1_{A,B}(T) : L_qT(A, n; B, m) \to L_{q+1}T(A, n+1; B, m)$$
$$\sigma^2 = \sigma^2_{A,B}(T) : L_qT(A, n; B, m) \to L_{q+1}T(A, n; B, m+1)$$

definiert. Aus 7. 3 und 7. 4 folgt:

8. 5. *Ist entweder* T *additiv in der ersten Variablen oder* $q < 2n + m$, *so ist* $\sigma^1_{A,B}(T)$ *ein Isomorphismus. Für* $q = 2n + m$ *ist* $\sigma^1_{A,B}(T)$ *ein Epimorphismus.*

Entsprechendes gilt für $\sigma^2_{A,B}(T)$. Nach 7. 10 ist $\sigma^2\sigma^1 = -\sigma^1\sigma^2$. Um Kommutativität zu erreichen, ersetzen wir σ^2 durch

$$'\sigma^2 = (-1)^n\sigma^2 : L_qT(A, n; B, m) \to L_{q+1}T(A, n; B, m+1).$$

Dann ist $'\sigma^1\sigma^2 = \sigma^1{}'\sigma^2$; wir können die Funktoren

$$L_{q+n+m}T(A, n; B, m)$$

für alle $n > q$ und $m > q$ durch die Zusammensetzungen von σ^1 und $'\sigma^2$ miteinander identifizieren und auf diese Weise den *q-ten stabilen derivierten Funktor* $L_q^S T(A, B)$ definieren.

8. 6. *Ist* T *additiv in jeder der beiden Variablen, so ist*

$$L_q^S T(A, B) = L_{q+n+m} T(A, n; B, m)$$

für alle n, m und stimmt mit dem gewöhnlichen derivierten Funktor $L_q T(A, B)$ *überein.*

Beweis. — Die erste Behauptung ist klar nach 8. 5 und liefert insbesondere $L_q^S T(A, B) = L_q T(A, 0; B, 0) = H_q T(X, Y)$, wobei X und Y projektive s.s. Auflösungen von (A, 0) bzw. (B, 0) sind. Nach dem Satz von Eilenberg-Zilber-Cartier (2. 9) ist der Kettenkomplex $kT(X, Y) = kd\hat{T}(X, Y)$ (2. 10) mit dem totalen Komplex $t\hat{T}(X, Y)$ homotopieäquivalent. Für additives T stimmen aber die Doppelkomplexe $k\hat{T}(X, Y)$ und $T(kX, kY)$ überein. Daraus folgt $H_q T(X, Y) = H_q T(kX, kY)$, und kX, kY sind projektive Auflösungen von A bzw. B im üblichen Sinn [7].

8. 7. Sei nun wieder T ein Funktor einer Variablen mit $T(0) = 0$. Ist T *quadratisch*, so ist der Mischeffekt $T_2(A, B)$ in jeder der beiden Variablen additiv. Aus 6. 6 ergibt sich die exakte Folge

$$\cdots \xrightarrow{\bar\beta} L_q T_2(A, n; A, n) \xrightarrow{\alpha_*} L_q T(A, n) \xrightarrow{\sigma} L_{q+1} T(A, n+1)$$
$$\xrightarrow{\bar\beta} L_{q-1} T_2(A, n; A, n) \xrightarrow{\alpha_*} L_{q-1} T(A, n) \xrightarrow{\sigma} \cdots$$

Nach 8. 6 kann man darin $L_q T_2(A, n; A, n)$ durch $L_{q-2n} T_2(A, A)$ ersetzen. α_* wird durch die Kodiagonale $\alpha : T_2(A, A) \to TA$ (5. 23) induziert. Aus 7. 14 folgt, daß $\bar\beta$ unter Verwendung unserer Identifizierungen (8. 6) mit

$$\beta_* : L_{q+1} T(A, n+1) \to L_{q+1} T_2(A, n+1; A, n+1) = L_{q-2n-1} T_2(A, A)$$

übereinstimmt, möglicherweise bis auf das Vorzeichen. β_* wird durch die Diagonale $\beta : TA \to T_2(A, A)$ (5. 23) induziert. Zusammenfassend stellen wir fest :

8. 8. *Ist T quadratisch, so ist die Folge*

$$\cdots \xrightarrow{\beta_*} L_{q-2n}T_2(A, A) \xrightarrow{\alpha_*} L_qT(A, n) \xrightarrow{\sigma} L_{q+1}T(A, n+1) \xrightarrow{\beta_*} L_{q-2n-1}T_2(A, A) \xrightarrow{\alpha_*} L_{q-1}T(A, n) \xrightarrow{\sigma}$$

exakt.

Im Falle eines beliebigen Funktors T tritt an die Stelle der exakten Folge die spektrale Folge von 6. 7. Wir verzichten auf eine erneute Formulierung für die derivierten Funktoren. Dagegen wollen wir 5. 25 und 6. 11 übertragen. Aus 5. 25 ergibt sich :

8. 9. *In der Folge*

$$(F_q) \quad L_qT_2(A, n; A, n) \xrightarrow{\alpha_*} L_qT(A, n) \xrightarrow{\sigma} L_{q+1}T(A, n+1) \xrightarrow{\beta_*} L_{q+1}T_2(A, n+1; A, n+1)$$

ist $\sigma\alpha_* = 0$ *und* $\beta_*\sigma = 0$.

Für $q \leq 3n$ gilt nach 8. 5.

$$L^S_{q-2n-1}T_2(A, A) = L_{q-1}T_2(A, n; A, n) = L_{q+1}T_2(A, n+1; A, n+1),$$

d.h. das letzte Glied von (F_q) stimmt mit dem ersten von (F_{q-1}) überein. Durch Zusammensetzen erhält man

$$\begin{aligned}(F) \quad & L_{3n}T_2(A, n; A, n) \xrightarrow{\alpha_*} L_{3n}T(A, n) \xrightarrow{\sigma} L_{3n+1}T(A, n+1) \\ & \xrightarrow{\beta_*} L^S_{n-1}T_2(A, A) \xrightarrow{\alpha_*} L_{3n-1}T(A, n) \xrightarrow{\sigma} L_{3n}T(A, n+1) \\ & \xrightarrow{\beta_*} L^S_{n-2}T_2(A, A) \xrightarrow{\alpha_*} \cdots .\end{aligned}$$

8. 10. *Die Folge* (F) *ist exakt.*

Beweis. — Sei X eine projektive s.s. Auflösung von (A, n). Offenbar stimmen dann die Morphismen σ und α_* in (F) mit den entsprechenden in 6. 11 überein. Nach 7. 14 ist ferner $\beta_* = \pm\bar{\beta}$ (unter Verwendung unserer Identifizierungen im Anschluß an 8. 5). Also folgt die Behauptung aus 6. 11.

8. 11. *Beispiel.* — Sei $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$ die Kategorie der abelschen Gruppen. Nimmt man für T den Funktor « Gruppenring » oder « Symmetrische Algebra », so gehen die vorstehenden Sätze in bekannte Resultat für die Eilenberg-MacLaneschen Gruppen $H_q(A, n; G)$ über (vgl. 4. 15, 4. 16).

Um das etwas genauer auszuführen, setzen wir $TA = \bar{Z}A \otimes G$

wie in 5. 13 ($\mathbf{Z}A$ = Gruppenring von A, $\overline{\mathbf{Z}A} = \mathbf{Z}A/\mathbf{Z}0$, G eine feste abelsche Gruppe). Sei X eine (freie) s.s. Auflösung von (A, n). Als s.s. Menge ist X ein Eilenberg-MacLanescher Komplex K(A, n) (s. Beweis von 4. 16). Da kTX der Kettenkomplex von X mod 0 ist, gilt

$$L_q T(A, n) = H_q TX = H_q(X, 0; G) = H_q(A, n; G) \quad \text{für} \quad q > 0.$$

Die Einhängung SX ist ein Eilenberg-MacLanescher Komplex K(A, $n+1$) und $\sigma_A(T) : L_q T(A, n) \to L_{q+1}(A, n+1)$ stimmt mit dem üblichen Einhängungshomomorphismus

$$\sigma : H_q(A, n; G) \to H_{q+1}(A, n+1; G), \qquad q > 0,$$

überein (5. 13). Der bekannte Satz, daß σ für $q < 2n$ ein Isomorphismus und für $q = 2n$ ein Epimorphismus ist ([12] 20. 4, [26] VI Prop. 2), erweist sich damit als Spezialfall von 8. 3.

8. 9 besagt, daß die Einhängung alle zerlegbaren Elemente von $H_q(A, n; G)$ annulliert, und daß alle Bilder bei der Einhängung primitiv sind. 8. 10 liefert eine partielle Umkehrung dieser Aussagen in demselben Umfang, wie man sie aus der exakten Folge von G. W. Whitehead-Barcus-Meyer [31], [2] schließen kann (6. 16). Ein Element von $H_q(A, n; G) = H_q(X; G)$ $q > 0$, heißt dabei zerlegbar, wenn es Bild bei der «Multiplikation» $\alpha_* : H_q(X \times X, X \vee X; G) \to H_q(X; G)$ ist, und primitiv, wenn es im Kern der «Diagonale» $\beta_* : H_q(X; G) \to H_q(X \times X, X \vee X; G)$ liegt (5. 24, 5. 26). Häufig wird der Begriff « zerlegbar » enger gefaßt, indem man voraussetzt, daß G ein Ring ist, und nur die Bilder bei der Zusammensetzung

$$\bigoplus_{i=1}^{q-1} H_i(X; G) \otimes H_{q-i}(X; G) \to H_q(X \times X, X \vee X; G) \xrightarrow{\alpha_*} H_q(X; G)$$

(Pontrjaginsche Multiplikation) zerlegbar nennt. Wenn G ein Körper ist, so sind beide Begriffe gleichwertig.

9. — KONTRAVARIANTE UND RECHTSDERIVIERTE FUNKTOREN. DIE KOBAR-KONSTRUKTION

Wir haben bisher nur kovariante Funktoren und ihre Linksderivierten behandelt. Analog kann man Linksderivierte eines kontravarianten und Rechtsderivierte eines ko- oder kontravarianten Funktors definieren. Wir werden zeigen, wie man durch Übergang zur dualen Kategorie alle diese Fälle auf den bisher behandelten zurückführen kann. Am Schluß des Paragraphen deuten wir eine Dualisierung der Bar-Konstruktion an, die Kobar-Konstruktion.

9. 1. Sei $\mathfrak{C}$ irgendeine Kategorie. Die *duale Kategorie* $\mathfrak{C}^*$ ([4] I, 4; [16] 1. 1) hat dieselben Objekte wie $\mathfrak{C}$. Ferner ist $\mathrm{Hom}^*(A, B) = \mathrm{Hom}\,(B, A)$, und die Zusammensetzung der Morphismen in $\mathfrak{C}^*$ geschieht wie in $\mathfrak{C}$, nur in umgekehrter Reihenfolge. Die « Identität » $\mathfrak{d} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}^*$ ist ein kontravarianter Funktor, und $\mathfrak{d}\mathfrak{d}$ ist die Identität von $\mathfrak{C}$.

Ist $\mathfrak{C}$ additiv oder abelsch, so auch $\mathfrak{C}^*$.

9. 2. Sei nun $T : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ irgendein kontravarianter Funktor. Ist C ein graduiertes Objekt über $\mathfrak{C}$, so definieren wir das graduierte Objekt TC über $\mathfrak{C}$, durch

$$(TC)_q = T(C_{-q}).$$

Um Minuszeichen zu vermeiden, benutzen wir manchmal die Schreibweise $C^q = C_{-q}$. Ist C ein Kettenkomplex ($\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$ additive Kategorien, T additiv), so setzen wir

$$\partial^{TC} = T(\partial^{C}).$$

Ist X ein s.s. Objekt über $\mathfrak{C}$ ($\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$ und T wieder beliebig), so wird TX ein neuartiges Gebilde, nämlich ein *negatives s.s. Objekt* (ko-s.s. Objekt) über $\mathfrak{C}'$. Wir definieren

$$(TX)_q = T(X_{-q}), \qquad q = 0, -1, -2, \ldots$$
$$(TX)_\alpha = T(X_\alpha) : (TX)_{-p} \to (TX)_{-q}, \quad \alpha : [p] \to [q] \text{ monoton.}$$

9. 3. Allgemein sprechen wir von einen *negativen s.s. Objekt* Y über einer Kategorie $\mathfrak{C}$, wenn eine Folge $Y_0, Y_{-1}, Y_{-2}, \ldots$ von Objekten aus $\mathfrak{C}$ gegeben ist und zu jeder monotonen Abbildung $\alpha : [p] \to [q]$ $(p, q \geq 0)$ ein Morphismus $Y_\alpha : Y_{-p} \to Y_{-q}$, so daß

(i) $\quad Y_\iota = \iota \quad$ mit $\quad \iota =$ Identität,

(ii) $\quad Y_{\alpha\beta} = Y_\alpha \circ Y_\beta \quad$ mit $\quad \beta : [r] \to [p]$ monoton.

M.a.W.: Y ist ein *kovarianter* Funktor aus der Kategorie der monotonen Abbildungen in $\mathfrak{C}$.

Wir setzen

$$\partial_i = Y_{\varepsilon^i} : Y_{-q} \to Y_{-q-1}, \qquad i = 0, \ldots, q+1$$
$$s_i = Y_{\eta^i} : Y_{-q} \to Y_{-q+1}, \qquad i = 0, \ldots, q-1$$

und bezeichnen diese Morphismen als Seiten-bzw. Ausartungsoperatoren (vgl. 1. 2). Ist $\mathfrak{C}$ eine additive Kategorie, so können wir den Randoperator

$$\partial = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \partial_i : Y_{-q} \to Y_{-q-1}$$

bilden und Y als (negativen) Kettenkomplex auffassen. (Zum Beweis von $\partial\partial = 0$ genügt es zu bemerken, daß $\mathfrak{d}Y$ ein gewöhnliches (positives) s.s. Objekt über $\mathfrak{C}^*$ ist).

9. 4. Sei nun $T : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ ein kontravarianter Funktor zwischen abelschen Kategorien mit $T(0) = 0$. Dann ist $\mathfrak{d}T : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'^*$ ein kovarianter Funktor mit $\mathfrak{d}T(0) = 0$, auf den wir die Definitionen und Ergebnisse der vorhergehenden Paragraphen anwenden können. Für ein s.s. Objekt X über $\mathfrak{A}$ haben wir z.B. den Einhängungsmorphimus

$$\sigma = \sigma_X(\mathfrak{d}T) : H_q\mathfrak{d}TX \to H_{q+1}\mathfrak{d}TSX.$$

Ist C irgendein Kettenkomplex, so gilt

(9. 5) $\qquad H\mathfrak{d}C = \mathfrak{d}HC \qquad$ d.h. $\; H_q\mathfrak{d}C = \mathfrak{d}H_{-q}C$

([4] II, 1). Folglich liefert die Anwendung von $\mathfrak{d}$ auf $\sigma_X(\mathfrak{d}T)$ den Einhängungsmorphismus

$$\sigma = \sigma_X(T) : H_{-q-1}TSX \to H_{-q}TX$$

für einen kontravarianten Funktor T.

9. 6. Die Bar-Konstruktion $\mathfrak{T}^*X$ für den Funktor $T^* = \mathfrak{d}T$ ist durch

$$(\mathfrak{T}^*X)_{p,*} = T_p^*(X, \ldots, X)$$
$$\partial' = \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i \alpha_i : (\mathfrak{T}^*X)_{p,*} \to (\mathfrak{T}^*X)_{p-1,*}$$

gegeben (6. 3). Wendet man $\mathfrak{d}$ auf das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & H_{q+1}T^*SX \arrow[d, phantom, "\wr\|"] \\ H_qT^*X \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[dr, "i_*"'] & \\ & H_{q+1}\mathfrak{T}^*X \end{tikzcd}$$

von 6. 4 an, so erhält man

$$\begin{tikzcd} & H_{-q-1}TSX \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[d, phantom, "\wr\|"] \\ H_{-q}TX & \\ & H_{-q-1}\mathfrak{T}X \arrow[ul, "p_*"] \end{tikzcd}$$

mit $\mathfrak{T}X = \mathfrak{d}\mathfrak{T}^*X$. $\mathfrak{T}X$ ist ein negativer Doppelkomplex, und $p : \mathfrak{T}X \to (\mathfrak{T}X)_{-1,*} = TX$ ist die natürliche Projektion. Sie ist ein Kettenmorphismus des totalen Komplexes $t\mathfrak{T}X$ vom Grade 1. Alle Korollare von 6. 4 haben eine offensichtliche Übertragung auf kontravariante Funktoren.

9. 7. Wir lassen nun die Voraussetzung $T(0) = 0$ weg, nehmen aber zusätzlich an, daß jedes Objekt von $\mathfrak{A}$ Quotient eines projektiven ist. Die *Rechtsderivierten* des *kontravarianten* Funktors $T : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ werden durch

$$R^qT(A, n) = R_{-q}T(A, n) = \mathfrak{d}L_q(\mathfrak{d}T)(A, n), \qquad A \in \mathfrak{A}$$

definiert (vgl. [4], III, 6). Alle Sätze über die Linksderivierten von kovarianten Funktoren (§ 8) lassen sich durch « Dualisieren » auf R^qT übertragen.

Ist X eine projektive s.s. Auflösung von (A, n), so gilt

$$R^qT(A, n) = \mathfrak{d}H_q\mathfrak{d}TX = H_{-q}TX,$$

wobei TX ein negatives s.s. Objekt ist.

9. 8. *Beispiele.* — Sei $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$ die Kategorie der abelschen Gruppen, G eine feste abelsche Gruppe und

$$\begin{aligned} TB &= \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}B, G) \\ T'B &= \mathrm{Hom}(SA(B), G), \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{Z}B$ den Gruppenring und SA(B) die symmetrische Algebra der abelschen Gruppe B bezeichnet (vgl. 4. 15).

9. 9. Satz. — *Die Derivierten* $R^qT(B, n)$, $n \geq 0$, *und* $R^qT'(B, n)$, $n > 0$, *sinds als Funktoren von* B *mit den Eilenberg-MacLaneschen Kohomologiegruppen* $H^q(B, n; G)$ *äquivalent.*

Der Beweis verläuft wörtlich wie der von 4. 16 mit folgenden Unterschieden : 1) TX ist jetzt der *Kokettenkomplex* von X mit Koeffizienten in G. 2) $\mathbf{Z}SP^\infty Y \otimes G$ in der letzten Zeile ist durch Hom $(\mathbf{Z}SP^\infty Y, G)$ zu ersetzen.

9. 10. Wir kehren nun wieder zu den Voraussetzungen von 9. 7 zurück In Anlehnung an 4. 8 definieren wir RT als Funktor von graduierten Objekten über $\mathfrak{A}$ zu graduierten Objekten über $\mathfrak{A}'$ durch

$$RT = \mathfrak{d} \circ L(\mathfrak{d}T).$$

9. 11. *Beispiele.* — Sei jetzt $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$ die Kategorie der Moduln über einem kommutativen nullteilerfreien Hauptidealring Λ. π sei eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}(m)$, die auf $\bigotimes^m B$, $B \in \mathfrak{A}$, durch Vertauschung der Faktoren operiert. Wir setzen

$$\begin{aligned} VB &= (\textstyle\bigotimes^m B)/\pi && \text{(vgl. 4. 10)} \\ V'B &= (\textstyle\bigotimes^m B)^\pi && \text{(vgl. 4. 13)} \\ UB &= \mathrm{Hom}\,(B, \Lambda). \end{aligned}$$

Für einen Kettenkomplex C bezeichne $H^*C = HUC$ die Kohomologie. Wie in 4. 10 und 4. 13 ergibt sich für einen freien s.s. Λ-Modul X

$$\begin{aligned} H^*(\textstyle\bigotimes^m X/\pi) &\cong R(UV)HX \\ H^*((\textstyle\bigotimes^m X)^\pi) &\cong R(UV')HX \qquad (9.\ 12) \\ H^*((\textstyle\bigotimes^m X)^{\mathfrak{S}(m)}) &\cong R(U\Gamma_m)HX \end{aligned}$$

(letzteres weil Γ_m auf freien Moduln mit V' für $\pi = \mathfrak{S}(m)$ übereinstimmt). Für endlich erzeugte freie Moduln stimmt UV mit V'U überein. Ist H_nX für jedes n endlich erzeugt, so kann

man freie. s.s. Auflösungen von $(H_n X, n)$ finden, die in jeder Dimension endlich erzeugt sind. Aus der ersten Zeile von (9. 12) folgt in diesen Fall

$$
\begin{aligned}
(9.13) \qquad & H^*(\otimes^m X/\pi) \cong R(V'U)HX \\
& H^*(\otimes^m X/\mathfrak{S}(m)) \cong R(\Gamma_m U)HX.
\end{aligned}
$$

Man beachte, daß die Isomorphismen (9. 12), (9. 13) ebenso wie die analogen in der Homologie (4. 10-4. 13) keine Äquivalenzen von Funktoren sind.

9. 14. Wir behalten die Festsetzungen von 9. 11 bei und spezialisieren $\Lambda = \mathbf{Z}$. Dann ist nach 9. 9 für $n > 0$ und irgendeine abelsche Gruppe B

$$H^q(B, n; \mathbf{Z}) = R^q(U \circ SA)(B, n).$$

Die symmetrische Algebra ist durch

$$SA(B) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} SP^m B = Z \oplus B \oplus \bigoplus_{m=2}^{\infty} (\otimes^m B/\mathfrak{S}(m))$$

definiert. Es folgt $U \circ SA = \prod_{m=0}^{\infty} U \circ SP^m$ und daher

$$R^q(U \circ SA)(B, n) = \prod_{m=0}^{\infty} R^q(U \circ SP^m)(B, n).$$

Das Produkt rechts hat aber für jedes feste q nur endlich viele nicht-triviale Faktoren. Das folgt z.B. aus 12. 1. Wenn man B als endlich erzeugt voraussetzt, was wir jetzt ohnehin tun wollen, kann man es auch aus der bekannten Tatsache entnehmen, daß $H_q(B, n; \mathbf{Z})$ endlich erzeugt. ist Wir können also weiterschließen

$$R^q(U \circ SA)(B, n) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} R^q(U \circ SP^m)(B, n) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} R^q(\Gamma_m \circ U)B, n),$$

letzteres wegen $U \circ SP^m = \Gamma_m \circ U$ für freie endlich erzeugte abelsche Gruppen (vgl. 9. 11). In der Kategorie der endlich erzeugten abelschen Gruppen gilt demnach die Äquivalenz

$$(9.15) \qquad H^q(B, n; \mathbf{Z}) = R^q(\Gamma \circ U)(B, n)$$

mit $\Gamma = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \Gamma_m$ ($\Gamma_0 B = \mathbf{Z}$, $\Gamma_1 B = B$ für jedes B).

9. 16. *Beispiel.* — Ist weiterhin $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$ die Kategorie der abelschen Gruppen und bezeichnet TB jetzt die Tensoralgebra

von $B \in \mathfrak{A}$, so gilt $H^*(\Omega SP) \cong R(UT)H(P)$ für jedes zusammenhängende Polyeder P (vgl. 4. 17).

9. 17. Rechtsderivierte von kovarianten und linksderivierte von kontravarianten Funktoren. — Sei $T: \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ irgendein Funktor zwischen abelschen Kategorien. Dann definieren wir für alle $n \leq 0$

$$R^q T(A, n) = R^q(T\mathfrak{d})(\mathfrak{d}A, -n), \qquad T \text{ kovariant}$$
$$L_q T(A, n) = L_q(T\mathfrak{d})(\mathfrak{d}A, -n), \qquad T \text{ kontravariant}$$

$A \in \mathfrak{A}$ (vgl. [4], III, 6). Um sicher zu sein, daß diese Bildungen existieren, müssen wir annehmen, daß jedes Objekt in $\mathfrak{A}^*$ Quotient eines projektiven ist. Das bedeutet: Jedes Objekt von $\mathfrak{A}$ läßt sich in ein injektives einbetten.

Als *negative s.s. Auflösung von* (A, n), $A \in \mathfrak{A}$, $n \leq 0$, bezeichnen wir ein negatives s.s Objekt Y über $\mathfrak{A}$ zusammen mit einen bestimmten Isomorphismus $H_n Y \cong A$, so daß $Y_i = 0$ für $i > n$ und $H_i Y = 0$ für $i < n$. Y heißt injektiv, wenn jedes Y_i injektiv ist.

Sei nun Y eine injektive negative s.s. Auflösung von (A, n) in $\mathfrak{A}$. Dann ist $\mathfrak{d}Y$ eine projektive (positive) s.s. Auflösung von $(\mathfrak{d}A, -n)$ in $\mathfrak{A}^*$. Wendet man darauf $T\mathfrak{d}$, an so erhält man $T\mathfrak{d}\,\mathfrak{d}Y = TY$, und es folgt

$$R^q T(A, n) = H_{-q} TY, \qquad T \text{ kovariant}$$
$$L_q T(A, n) = H_q TY, \qquad T \text{ kontravariant}$$

(nach 9. 7 bzw. 4. 6). Im ersten Fall ist TY ein negatives, im zweiten ein positives, d.h. gewöhnliches, s.s. Objekt.

9. 18. Als Funktoren von graduierten Objekten definieren wir

$$RT = R(T\mathfrak{d}) \circ \mathfrak{d}, \qquad T \text{ kovariant}$$
$$LT = L(T\mathfrak{d}) \circ \mathfrak{d}, \qquad T \text{ kontravariant}$$

(vgl. 9. 10, 4. 8).

9. 19. *Beispiele.* — Sei Λ ein Körper und $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$ die Kategorie der endlich erzeugten Vektorräume über Λ. $U: \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ bezeichne wie in 9. 11 den Funktor $UA = \text{Hom}(A, \Lambda)$, $A \in \mathfrak{A}$. Dann ist $U \circ U$ mit der Identität von $\mathfrak{A}$ äquivalent, und man kann die duale Kategorie $\mathfrak{A}^*$ so mit $\mathfrak{A}$ identifizieren, daß

$\mathfrak{d}:\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}^*$ und $U:\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$ einander entsprechen. Damit gehen die Definitionen von 9. 18 in

$$\begin{aligned} RT &= R(TU)\circ U, && T \text{ kovariant} \\ LT &= L(TU)\circ U, && T \text{ kontravariant} \end{aligned}$$

über [14].

Mit den Bezeichnungen von 9. 11 gilt $UV = V'U$ und $UV' = VU$ in ganz $\mathfrak{A}$. Ferner ist $H^*C = HUC = UHC$ für jeden Kettenkomplex C über $\mathfrak{A}$. Aus (9. 12) folgt daher

$$\begin{aligned} H^*(\otimes^m X/\pi) \cong R(UV)HX &= R(V'U)HX \\ &= R(V')UHX = R(V')H^*X \end{aligned}$$

und analog

$$H^*((\otimes^m X)^\pi) \cong R(V)H^*X.$$

Diese Beispiele beruhen also auf den ganz speziellen Eigenschaften der Kategorie und sind etwas künstlich. Beispiele wesentlich anderer Art für die Definitionen 9. 17, 9. 18 bei nicht-additiven Funktoren sind uns nicht bekannt. Im additiven Fall hat man natürlich die Funktoren Ext^q als wichtigstes Beispiel von Rechtsderivierten eines kovarianten Funktors.

9. 20. Die Kobar-Konstruktion. — Sei $T:\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}'$ ein kovarianter Funktor zwischen abelschen Kategorien mit $T(0)=0$ und X ein s.s. Objekt über $\mathfrak{A}$. Wir gehen davon aus, daß die Bar-Konstruktion $\mathfrak{T}X$ mit dem Doppelkomplex $N'T(S\,\hat{\otimes}\,X)$ isomorph ist (6. 23). Dabei ist S die durch (5. 29) definierte s.s. abelsche Gruppe, und N' bezeichnet das Normalisieren bezüglich der ersten s.s. Struktur des s.s. Doppelobjekts $T(S\,\hat{\otimes}\,X)$ (6. 17). Eine in gewisser Weise duale Bildung ist

$$\mathfrak{T}^{\#}X = N'T(US\,\hat{\otimes}\,X).$$

Dabei ist der kontravariante Funktor U durch $UG = \mathrm{Hom}(G, \mathbf{Z})$, G abelsche Gruppe, definiert. US ist eine negative s.s. abelsche Gruppe (9. 2). $US\,\hat{\otimes}\,X$ und damit $T(US\,\hat{\otimes}\,X)$ sind bigraduierte Objekte, deren Bestandteile vom Bigrad (p, q) nur dann von 0 verschieden sind, wenn $p \leq -1$ und $q \geq 0$. Bezüglich der ersten Grauduierung sind es negative, bezüglich der zweiten positive s.s. Objekte. N' bezeichnet das

[14] Diese etwas ungenaue Schlußweise kann leicht präzisiert werden.

Normalisieren bezüglich der ersten (negativen) s.s. Struktur. Allgemein definieren wir für ein negatives s.s. Objekte Y den ausgearteten bzw. normalen Kettenkomplex durch

$$\mathrm{DY} = \mathfrak{d}\mathrm{D}\mathfrak{d}\mathrm{Y} = \bigcup_i \text{Kobild } s_i = \mathrm{Y}/\bigcap_i \text{Kern } s_i$$

$$\mathrm{NY} = \mathfrak{d}\mathrm{N}\mathfrak{d}\mathrm{Y} = \bigcap_{i>0} \text{Kokern } \partial_i = \mathrm{Y}/\bigcup_{i>0} \text{Bild } \partial_i.$$

9. 21. « Dual » zum Beweis von 6. 23 kann man zeigen

$$(\mathfrak{T}^{\#}\mathrm{X})_{-p,*} = \mathrm{T}_p(\mathrm{X}, \ldots, \mathrm{X})$$

$$\partial' = \sum_{i=1}^{p} (-1)^i \beta_i : (\mathfrak{T}^{\#}\mathrm{X})_{-p,*} \to (\mathfrak{T}^{\#}\mathrm{X})_{-p-1,*}.$$

Dabei ist T_p der p-te Mischeffekt von T (4. 18). $\beta_i : \mathrm{T}_p \to \mathrm{T}_{p+1}$ ist eine natürliche Transformation, die zu α_i (6. 2) « dual » ist und folgendermaßen definiert wird : Seien

$$\mathrm{T}_p(\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_p) \underset{\rho}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \mathrm{T}(\mathrm{A}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{A}_p)$$

die natürlichen Morphismen wie in 6. 1. $\varkappa_j : \mathrm{A} \to \bigoplus^p \mathrm{A}$ bezeichne die Injektion des j-ten Summanden und $\pi_j : \bigoplus^{p+1}\mathrm{A} \to \mathrm{A}$ die Projektion auf den j-ten Summanden. Wir definieren dann $\beta_i' : \bigoplus^p \mathrm{A} \to \bigoplus^{p+1}\mathrm{A}$, $i = 1, \ldots, p$ durch

$$\pi_k \beta_i' \varkappa_j = \begin{cases} \iota, & k = j \leq i \quad \text{oder} \quad k - 1 = j \geq i \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist $\mathfrak{A}$ eine Kategorie von abelschen Gruppen, so bedeutet das

$$\beta_i'(a_1, \ldots, a_p) = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_p).$$

Schließlich setzen wir

$$\beta_i = \rho \circ \mathrm{T}\beta_i' \circ \lambda : \mathrm{T}_p(\mathrm{A}, \ldots, \mathrm{A}) \to \mathrm{T}_{p+1}(\mathrm{A}, \ldots, \mathrm{A}).$$

$\beta_1 : \mathrm{TA} \to \mathrm{T}_2(\mathrm{A}, \mathrm{A})$ stimmt offenbar mit der Diagonale β von 5. 23 über ein.

Die Konstruktion $\mathfrak{T}^{\#}\mathrm{X}$ steht zur cobar construction von Adams [1] in derselben Beziehung wie $\mathfrak{T}\mathrm{X}$ zur bar construction von Eilenberg-MacLane (6. 26).

9. 22. Die natürliche Projektion $p : \mathfrak{T}^{\#}\mathrm{X} \to (\mathfrak{T}^{\#}\mathrm{X})_{-1,*} = \mathrm{TX}$ ist für den totalen Komplex $t\mathfrak{T}^{\#}\mathrm{X}$ ein Kettenmorphismus vom

Grade 1. Es liegt nahe zu vermuten, daß es dual zu 6. 4 einen Isormorphismus $HTX \cong H\mathfrak{T}^{\#}SX$ gibt, so daß das Diagramm

$$(9.23)\qquad \begin{tikzcd} H_qTX \arrow[dr, "\sigma"] \arrow[d, phantom, "\cong" sloped] & \\ H_q\mathfrak{T}^{\#}SX \arrow[r, "p_*"'] & H_{q+1}TSX \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Das würde eine neue Möglichkeit zur Untersuchung des Einhängungsmorphismus' σ bieten. Es ist uns jedoch nicht gelungen, den Beweis von § 6 übertragen. Mit anderen Methoden haben wir die Vermutung für Funktoren endlichen Grades (d.h. $T_k = 0$ für genügend großes k) bestätigt Sie folgt dann auch für direkte Summen von solchen, also z.B. für $T = \bigoplus_{m=1}^{\infty} SP^m$ (symmetrische Algebra). Da wir keine Anwendungen davon machen wollen, gehen wir nicht näher darauf ein. Fragt man nach den Folgerungen aus (9. 23), die den Korollaren von 6. 4 entsprechen, so ist zunächst nichts anderes zu erwarten als eine Wiederholung der Aussagen 6. 5, 6. 6, 6. 11, 6. 12. Nur an die Stelle von 6. 7 tritt eine neue spektrale Folge.

ANWENDUNG AUF SYMMETRISCHE PRODUKTE UND EILENBERG-MACLANE-KOMPLEXE

In den folgenden Paragraphen ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$ die Kategorie der abelschen Gruppen. Ein s.s. Objekt X über $\mathfrak{A}$ heißt auch FD-*Komplex* (s. [12], 2).

Wir betrachten $\mathfrak{S}(n)$-Produkte im Sinne von Beispiel 4.10 und sprechen dann von (n-fachen) symmetrischen Produkten, in Zeichen $\mathrm{SP}^n\mathrm{X}$. Das analog definierte symmetrische Produkt einer s.s. Menge (eines Raumes) E wird ebenfalls mit $\mathrm{SP}^n\mathrm{E}$ bezeichnet.

Die Ergebnisse der Paragraphen 10, 11 werden ohne Benutzung der Bar-Konstruktion § 6 gewonnen.

10. — ZERLEGBARE UND PRIMITIVE ELEMENTE IN SYMMETRISCHEN PRODUKTEN

10. 1. SATZ. — *Ist n keine Primzahlpotenz, dann sind alle Elemente in* $H(SP^n X)$ *zerlegbar* (s. 5. 24), *und nur das Nullelement ist primitiv* (s. 5. 24). *Ist $n = p^j$, $j > 0$, p eine Primzahl, dann sind alle Elemente in* $pH(SP^n X)$ (*d.h. alle p-fachen*) *zerlegbar, und jedes primitive Element $\neq 0$ hat die Ordnung p. Dabei ist* X *ein beliebiger* (*nicht notwendig freier*) FD-*Komplex.*

Derselbe Satz gilt für Homologie mit beliebigen Koeffizienten.

10. 2. KOROLLAR. — *Ist n keine Primzahlpotenz, dann ist der Einhängungshomomorphismus* $\sigma : H_i(SP^n X) \to H_{i+1}(SP^n SX)$ *der Nullhomomorphismus. Ist $n = p^j$, $j > 0$, p prim, dann ist $p\sigma = 0$. Dasselbe Ergebnis gilt für Homologie mit beliebigen Koeffizienten.*

Das Korollar folgt unmittelbar aus 10. 1, z.B. weil σ alle zerlegbaren Elemente annulliert (s. 5. 25).

BEWEIS für 10. 1. — Es sei zunächst daran erinnert, daß die Mischeffekte (s. 4. 18) von SP^n die folgende Gestalt haben (s. [9], 8. 4)

$$(10.\ 3) \qquad SP^n_2(X, Y) = \bigoplus_{i=1}^{n-1} SP^i X \otimes SP^{n-i} Y,$$

allgemeiner

$$(10.\ 4) \quad SP^n_r(X_1, \dots, X_r) = \bigoplus_{i_\nu > 0,\ \Sigma i_\nu = n} SP^{i_1} X_1 \otimes \cdots \otimes SP^{i_r} X_r.$$

(N.B. $\otimes$ bezeichnet das *kartesische* Produkt $\times$ von FD-Komplexen im Sinne von [12], 5. Vgl. 1. 23).

Die Abbildungen $\alpha : SP^n_2(X, X) \to SP^n X$ (« Kodiagonale »; s. 5. 23) bezw. $\beta : SP^n X \to SP^n_2(X, X)$ (« Diagonale »; s. 5. 23) zerfallen nach 10. 3 in Kompononten

$$(10.5) \qquad \alpha_{i,\,n-i} : SP^i X \otimes SP^{n-i} \to SP^n X$$

bezw.

$$(10.6) \qquad \beta_{i,\,n-i} : SP^n X \to SP^i X \otimes SP^{n-i} X.$$

Wir betrachten $\mathfrak{S}(i) \times \mathfrak{S}(n-i)$ als Untergruppe von $\mathfrak{S}(n)$, indem wir $\mathfrak{S}(i)$ auf den Zahlen $1, 2, \ldots, i$ und $\mathfrak{S}(n-i)$ auf $i+1, i+2, \ldots, n$ operieren lassen. Dann ist

$$\otimes^n X/\mathfrak{S}(i) \times \mathfrak{S}(n-i) = SP^i X \otimes SP^{n-i} X,$$

d.i. das $\mathfrak{S}(i) \times \mathfrak{S}(n-i)$-Produkt von X, und es gilt

10. 7. Hilfssatz. — *Die Abbildung $\alpha_{i,\,n-i}$ bezw. $\beta_{i,\,n-i}$ stimmt mit der natürlichen Projektion $\pi : \otimes^n X/\mathfrak{S}(i) \times \mathfrak{S}(n-i) \to \otimes^n X/\mathfrak{S}(n)$ bezw. mit dem Transferhomomorphismus*

$$\tau : \otimes^n X/\mathfrak{S}(n) \to \otimes^n X/\mathfrak{S}(i) \times \mathfrak{S}(n-i)$$

überein.

Der *Transferhomomorphismus* τ (s. [30], 11) entsteht aus der Abbildung

$$(10.8) \qquad \otimes^n X \to \otimes^n X, \qquad a \to \Sigma\gamma a, \qquad a \in \otimes^n X$$

durch Übergang zu den Quotienten. Dabei ertreckt sich die Summe $\Sigma\gamma$ über ein (beliebiges) Repräsentantensystem $\{\gamma\}$ für die Rechtsrestklassen von $\mathfrak{S}(i) \times \mathfrak{S}(n-i) \subset \mathfrak{S}(n)$.

Aus der Definition 10. 8 und aus 10. 7 folgt (s. [30], 11. 3).

10. 9. Korollar. — *Die zusammengesetzte Abbildung*

$$SP^n X \xrightarrow{\beta_{i,\,n-i}} SP^i X \otimes SP^{n-i} X \xrightarrow{\alpha_{i,\,n-i}} SP^n X$$

multipliziert jedes Element mit dem Binomialkoeffizienten $\binom{n}{i}$.

Für jedes $u \in H(SP^n X)$ ist also $\binom{n}{i} u$ zerlegbar, und für jedes primitive u ist $\binom{n}{i} u = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Der Satz 10. 1 ist daher eine Folge von

10. 10. Hilfssatz. — *Der größte gemeinsame Teiler der Binomialkoeffizienten* $\binom{n}{i}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, *ist* p *falls* $n = p^j$, $j > 0$, p *prim, und ist* 1 *sonst.*

Beweis für 10. 7. — Die direkte Summendarstellung

(10. 11) $\quad \mathrm{SP}^n(\mathrm{X}_1 \oplus \mathrm{X}_2) \cong \bigoplus_{i=0}^n \mathrm{SP}^i\mathrm{X}_1 \otimes \mathrm{SP}^{n-i}\mathrm{X}_2$

aus der 10. 3 hervorgeht, wird folgendermaßen gewonnen (s. [9], 8. 4). Seien $j_\nu : \mathrm{X}_\nu \to (\mathrm{X}_1 \oplus \mathrm{X}_2)$ bezw. $p_\nu : (\mathrm{X}_1 \oplus \mathrm{X}_2) \to \mathrm{X}_\nu$, $\nu = 1, 2$, die natürliche Injektion bezw. Projektion. Dann entsteht die zu 10. 11 gehörige Injektion

$$j_{i,n-i} : \mathrm{SP}^i\mathrm{X}_1 \otimes \mathrm{SP}^{n-i}\mathrm{X}_2 \to \mathrm{SP}^n(\mathrm{X}_1 \oplus \mathrm{X}_2)$$

aus der Abbildung

$$\bigotimes{}^i\mathrm{X}_1 \otimes \bigotimes{}^{n-i}\mathrm{X}_2 \xrightarrow{\bigotimes^i j_1 \otimes \bigotimes^{n-i} j_2} \bigotimes{}^i(\mathrm{X}_1 \oplus \mathrm{X}_2) \otimes \bigotimes{}^{n-i}(\mathrm{X}_1 \oplus \mathrm{X}_2) = \bigotimes{}^n(\mathrm{X}_1 \oplus \mathrm{X}_2)$$

durch Übergang zu den Quotienten.

Ist $\mathrm{X}_1 = \mathrm{X}_2 = \mathrm{X}$ und $\alpha' : \mathrm{X} \oplus \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ die Addition, dann ist $\alpha' j_\nu = \iota$ (= Identität), also wird die Zusammensetzung

$$\mathrm{SP}^i\mathrm{X} \otimes \mathrm{SP}^{n-i}\mathrm{X} \xrightarrow{j_{i,n-i}} \mathrm{SP}^n(\mathrm{X} \oplus \mathrm{X}) \xrightarrow{\mathrm{SP}^n(\alpha')} \mathrm{SP}^n\mathrm{X}$$

durch die identische Abbildung von $\bigotimes^n\mathrm{X}$ induziert; diese Zusammensetzung ist aber gerade $\alpha_{i,n-i}$.

Nun zu $\beta_{i,n-i}$. Ist $y_1 \otimes \cdots \otimes y_n \in {}^n\bigotimes(\mathrm{X}_1 \oplus \mathrm{X}_2)$ und $y = [y_1, \ldots, y_n]$ sein Bild in $\mathrm{SP}^n(\mathrm{X}_1 \oplus \mathrm{X}_2)$, dann erhält man die zu 10. 11 gehörige Projektion

$$p_{i,n-i} : \mathrm{SP}^n(\mathrm{X}_1 \oplus \mathrm{X}_2) \to \mathrm{SP}^i\mathrm{X}_1 \otimes \mathrm{SP}^{n-i}\mathrm{X}_2,$$

indem man, auf alle möglichen Weisen, auf i Komponenten y_μ von y die Abbildung p_1, auf die anderen p_2 anwendet und summiert (s. [9], 8), d.h. $p_{i,n-i}$ ist die Zusammensetzung

(10. 12) $\quad \mathrm{SP}^n(\mathrm{X}_1 \oplus \mathrm{X}_2) \xrightarrow{\tau} \mathrm{SP}^i(\mathrm{X}_1 \oplus \mathrm{X}_2) \otimes \mathrm{SP}^{n-i}(\mathrm{X}_1 \oplus \mathrm{X}_2) \xrightarrow{\mathrm{SP}^i p_1 \otimes \mathrm{SP}^{n-i} p_2} \mathrm{SP}^i\mathrm{X}_1 \otimes \mathrm{SP}^{n-i}\mathrm{X}_2,$

wobei τ der oben erklärte Tranfer ist. Die Abbildung $\beta_{i,n-i}$ erhält man also, indem man vor 10. 12 (mit $\mathrm{X}_1 = \mathrm{X}_2 = \mathrm{X}$) noch die Abbildung

$\mathrm{SP}^n(\beta') : \mathrm{SP}^n\mathrm{X} \to \mathrm{SP}^n(\mathrm{X} \oplus \mathrm{X}) \quad (\beta' : \mathrm{X} \to \mathrm{X} \oplus \mathrm{X}$ die Diagonale)

schaltet. Betrachten wir nun das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
SP^n(X\oplus X) \arrow[r, "\tau"] & SP^i(X\oplus X)\otimes SP^{n-i}(X\oplus X) \arrow[dr, "SP^ip_1\otimes SP^{n-i}p_2"] & \\
 & & SP^iX\otimes SP^{n-i}X \\
SP^nX \arrow[uu, "SP^n(\beta')"] \arrow[r, "\tau"'] & SP^iX\otimes SPX^{n-i}X \arrow[uu, "SP^i\beta'\otimes SP^{n-i}\beta'"] \arrow[ur, "\iota"'] &
\end{tikzcd}$$

Das linke Quadrat ist kommutativ wegen der Natürlichkeit von τ, das rechte Dreieck wegen $p_\nu\beta' = \iota$, also

$$\beta_{i,\,n-i} = (SP^ip_1 \otimes SP^{n-i}p_2)\circ\tau\circ SP^n\beta' = \tau, \qquad \text{qed.}$$

Beweis für 10. 10. — Sei p eine Primzahl und p^r die höchste Potenz von p, die in n aufgeht, also $n = p^rm$, $m \not\equiv 0 \bmod p$. Wir haben zu zeigen: Ist $m > 1$, dann $\gamma(n) \not\equiv 0 \bmod p$; ist $m = 1$, dann $\gamma(n) \equiv 0 \bmod p$, $\gamma(n) \not\equiv 0 \bmod p^2$, wobei $\gamma(n) = \text{g.g.T}\binom{n}{i}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Dazu betrachten wir das Polynom $(x+y)^n$ in Unbestimmten x, y. Ist $m > 1$, dann gilt modulo p

$$\begin{aligned}\Sigma_{i=0}^n\binom{n}{i}x^iy^{n-i} &= (x+y)^n \equiv (x^{p^r}+y^{p^r})^m \\ &\equiv x^n + mx^{n-p^r}y^{p^r} + \cdots + y^n \not\equiv x^n + y^n,\end{aligned}$$

also $\gamma(n) \not\equiv 0$.

Ist $m = 1$, dann rechnen wir modulo p^2 und erhalten

$$\begin{aligned}\Sigma_{i=0}^n\binom{n}{i}x^iy^{n-i} &= (x+y)^n = (x+y)^{p^{r-1}p} = (x^{p^{r-1}} + y^{p^{r-1}} + pR)^p \\ &\equiv (x^{p^{r-1}} + y^{p^{r-1}})^p = x^n + px^{n-p^{r-1}}y^{p^{r-1}} + \cdots + y^n \not\equiv x^n + y^n,\end{aligned}$$

wie behauptet.

11. — ZERLEGBARE UND PRIMITIVE ELEMENTE IN EILENBERG-MACLANE-KOMPLEXEN

Es sei K ein FD-Komplex mit *Ergänzung* $\eta : K \to Q$ und *Grundpunkt* $\varepsilon : Q \to K$. Dabei ist Q der FD-Komplex eines Punktes (d. h. $Q_j = Z$ für alle j, $Q_\alpha = \iota$ für alle monotonen Abbildungen α), η und ε sind FD-Abbildungen und $\eta\varepsilon = \iota$. Es folgt

(11. 1) $\quad K \cong Q \oplus K^0 \quad$ mit $\quad K^0 = \mathrm{Kern}\,(\eta)$.

Das Tensorprodukt zweier FD-Komplexe (s. 1. 23) mit Ergänzung und Grundpunkt besitzt eine natürliche Ergänzung und einen Grundpunkt, nämlich

$$K \otimes K' \xrightarrow{\eta \otimes \eta'} Q \otimes Q \cong Q$$

und

$$Q \cong Q \otimes Q \xrightarrow{\varepsilon \otimes \varepsilon'} K \otimes K'.$$

Eine *Multiplikation* in K ist eine FD-Abbildung

(11. 2) $\quad \mu : K \otimes K \to K,$

die mit Ergänzung und Grundpunkt verträglich ist. Die Zahl $1 = 1_q \in Z = Q_q$ ist dann Einselement für $\mu_q : K_q \otimes K_q \to K_q$, und η ist eine multiplikative Abbildung. μ induziert eine (gewöhnliche) FD-Abbildung $\mu^0 : K^0 \otimes K^0 \to K^0$ und ist umgekehrt durch μ^0 vollständig bestimmt.

Die Bildelemente beim induzierten Homomorphismus der Homologie,

$$H(\mu^0) : H(K^0 \otimes K^0) \to H(K^0) \subset H(K),$$

allgemeiner

$$H(\mu^0; G) : H(K^0 \otimes K^0; G) \to H(K^0; G) \subset H(K; G),$$

heißen *zerlegbar* (bezüglich μ) [15].

Eine *Komultiplikation* (auch « Diagonale ») in K ist eine FD-Abbildung

$$(11.3) \qquad \nu : K \to K \otimes K,$$

die mit Ergänzung und Grundpunkt verträglich ist. ν induziert eine FD-Abbildung $\nu^0 : K^0 \to K^0 \otimes K^0$ und ist umgekehrt durch ν^0 vollständig bestimmt. Die Elemente im Kern des induzierten Homomorphismus

$$H(\nu^0; G) : H(K^0; G) \to H(K^0 \otimes K^0; G)$$

heißen *primitiv* (bezüglich ν) [15].

Assoziativität und *Kommutativität* der Abbildung μ bezw. ν sind wie üblich definiert.

11. 4. *Beispiele.* — (i) Sei X ein beliebiger FD-Komplex und

$$(11.5) \qquad SA(X) = Q \otimes SP^1X \otimes SP^2X \otimes \cdots = \bigoplus_{i=0}^{\infty} SP^iX$$

seine symmetrische Algebra (s. [9], 10). Projektion auf den Summanden Q bezw. Injektion von Q in SA(X) definieren Ergänzung und Grundpunkt in SA(X). Wendet man auf die Abbildung $\alpha' : X \oplus X \to X$ bezw. $\beta' : X \to X \oplus X$ den Funktor SA an und beachtet, daß $SA(X \oplus X) = SA(X) \otimes SA(X)$ ist (s. [9], 10. 9), dann erhält man eine (kommutative und assoziative) Multiplikation und Komultiplikation in SA. Die zerlegbaren bezw. primitiven Elemente bezüglich $SA(\alpha')$ bezw. $SA(\beta')$ stimmen offenbar gerade mit den früher definierten (s. 5. 24) zerlegbaren bezw. primitiven Elementen des Funktors $SA(X)^0$ überein (wobei derIndex ^{0} wie oben den Kern der Ergänzung bezeichnet). Da SA(X) direkte Summe der SP^iX ist, gilt dasselbe für die zerlegbaren bezw. primitiven Elemente. Wir können also 10. 1 anwenden und erhalten

[15] Diese Definition ist etwas allgemeiner als die übliche, in welcher nur die Bilder bei der zusammengesetzten Abbildung

$$H(K^0) \otimes H(K^0) \to H(K^0 \otimes K^0) \to H(K^0)$$

zerlegbar heißen. Eine ähnliche Bemerkung gilt für primitive Elemente.

11. 6. SATZ. — *Die Elemente der Gruppe*

$$H_i(SA(X); G)/[H_i(SP^1X; G) + \text{zerlegbare Elemente}], \quad i > 0$$

bezw.

$$[\text{primitive Elemente von } H_i(SA(X); G)]/H_i(SP^1X; G), \quad i > 0$$

haben endliche quadratfreie Ordnung, m.a.W. diese Gruppen sind direkte Summen von zyklischen Gruppen von Primzahlordnung.

(ii) Sei M eine s.s. Menge mit Grundpunkt $b_0 \in M_0$. Dann ist der FD-Komplex ZM von M ein FD-Komplex mit Ergänzung, Grundpunkt (induziert durch $M \to b$ bezw. $b \to M$, wo $b_i = s_0^i(b_0)$) und Komultiplikation (induziert durch die geometrische Diagonale $M \to M \times M$, $\sigma \to (\sigma, \sigma)$). Ist M außerdem mit einer Multiplikation $M \times M \to M$ versehen, bezüglich der die b_i Einselemente sind, dann spricht man von einem (evtl. nicht-assoziativen) s.s. Monoid. Auf ZM wird dann eine Multiplikation induziert. Via ZM können wir dann von zerlegbaren oder primitiven Elementen in H(M) sprechen.

11. 7. SATZ. — *Es sei* M *ein zusammenhängendes* (d.h. $\pi_0(M) = 0$) *kommutatives assoziatives s.s. Monoid.*

$$\Phi_i : \pi_i(M) \to H_i(M)$$

bezeichne den Hurewiczhomomorphismus und $D(H_i(M))$ *bezw.* $P(H_i(M))$ *die zerlegbaren bezw. primitiven Elemente. Dann ist*

$$H_i(M)/[D(H_i(M) + \text{Bild } (\Phi_i))], \qquad i > 0$$

eine direkte Summe von zyklischen Gruppen von Primzahlordnung.

Ist $\pi_1(M) = 0$, *dann gilt dasselbe für die Gruppe*

$$P(H_i(M))/\text{Bild } (\Phi_i), \qquad i > 0.$$

BEWEIS. — Ist E eine (zusammenhängende) s.s. Menge, mit Grundpunkt, dann ist das unendliche symmetrische Produkt SPE ein zusammenhängendes kommutatives, assoziatives s.s. Monoid (s. [24], 2. 10). Nach [32], Beweis zu 7. 1, gibt es zu jedem M ein E und einen Homomorphismus $SPE \to M$, der Isomorphismen aller Homotopiegruppen und Homologiegruppen induziert; außerdem kann man annehmen, daß $\Phi_i : \pi_i(E) \to H_i(E)$ epimorph ist (E kann als « wedge » von

« Moore-Komplexen » gewählt werden). Wir brauchen die Behauptung also nur für solche Monoide SPE zu beweisen.

Nun gibt es einen natürlichen multiplikativen Isomorphismus

$$(11.8) \qquad \mathrm{ZSPE} \simeq \mathrm{SA}(\mathrm{ZE}^0) \quad (\text{s. [9], 10. 10}),$$

wobei ZE wie oben den FD-Komplex von E und ZE^0 den Kern der Ergänzung bezeichnet. Dabei wird $\mathrm{ZE} = \mathrm{ZSP}^1\mathrm{E}$ isomorph auf $\mathrm{Q} \oplus \mathrm{SP}^1(\mathrm{ZE}^0)$ abgebildet. Daher folgt die erste Behauptung von 11. 7 aus der ersten Behauptung von 11. 6.

Die zweite Behauptung können wir zunächst nicht genau so beweisen, weil der Isomorphismus 11. 8 nicht mit der Komultiplikation verträglich ist. Wenn aber $\pi_1(\mathrm{M}) = 0$ ist, dann können wir annehmen, daß E Einhängung einer anderen s.s. Menge ist (nach Konstruktion in [32], 7). Dann folgt die 2. Behauptung analog zur ersten aus 11. 6 und dem

11. 9. Hilfssatz. — *Ist* E *eine Einhängung,* $\mathrm{E} = \mathrm{SE}'$, *dann ist der Isomorphismus* 11. 8 *bis auf Homotopie mit der Komultiplikation verträglich.*

Beweis. — Wir identifizieren die beiden Seiten von 11. 8 und haben dann zwei Komultiplikationen ν^1, ν^2 in $\mathrm{X} = \mathrm{SA}(\mathrm{ZE}^0)$, von denen wir zeigen wollen, daß sie homotop sind. Dazu betrachten wir die Alexander-Whitney Abbildung

$$f : \mathrm{X} \otimes \mathrm{X} \to k\mathrm{X} \otimes k\mathrm{X} \qquad (\text{s. [13], 2. 9})$$

und zeigen, daß $f\nu^1 = f\nu^2$ ist; daraus folgt die Behauptung, weil f eine Homotopieäquivalenz ist.

Beide Komultiplikationen sind multiplikativ, wenn wir in $\mathrm{X} \otimes \mathrm{X}$ die Multiplikation des Tensorproduktes benutzen $((x_1 \otimes x_2)(y_1 \otimes y_2) = y_1 y_1 \otimes x_2 y_2))$. Auch f ist multiplikativ für eine geeignete multiplikative Struktur in $k\mathrm{X} \otimes k\mathrm{X} : f$ bildet $\mathrm{X}_r \otimes \mathrm{X}_r$ in $\bigoplus_{i=0}^r \mathrm{X}_i \otimes \mathrm{X}_{r-i}$ ab, und die Komponente $f_{i,r-i}$: $\mathrm{X}_r \otimes \mathrm{X}_r \to \mathrm{X}_i \otimes \mathrm{X}_{r-i}$ ist gegeben durch $f_{i,r-i}(x \otimes y) = \tilde{\delta}^{r-i} x \otimes \delta_0^i y$, wobei $\tilde{\delta}$ jeweils den letzten Seitenoperator bezeichnet. Multipliziert man in $\mathrm{X}_i \otimes \mathrm{X}_{r-i}$ nun nach der Regel

$$(x_1 \otimes x_2)(y_1 \otimes y_2) = x_1 y_1 \otimes x_2 y_2,$$

dann ist $f_{i,r-i}$ offenbar multiplikativ.

Weil $\mathrm{SA}(\mathrm{ZE}^0)$ multiplikativ von $\mathrm{ZE}^0 = \mathrm{SP}^1(\mathrm{ZE}^0)$ erzeugt

wird, brauchen wir die zu beweisende Gleichung $f_{i,r-i}\nu^1 = f_{i,r-i}\nu^2$ also nur für die Elemente von ZE^0 bezw. eine Basis von ZE^0 zu zeigen. Die Gruppe $(ZE^0)_r$ besitzt als Basis die Elemente $x = \sigma - b$, wobei $b = b_r \in E_r$ den Grundpunkt bezeichnet und σ alle anderen r-Simplexe von E durchläuft. Ist ν^2 etwa die « geometrische » und ν^1 die « algebraische » Komultiplikation, dann ist

$$\nu^2(x) = \nu^2(\sigma - b) = \sigma \otimes \sigma - b \otimes b = (x + b) \otimes (x + b) - b \otimes b$$
$$= x \otimes b + b \otimes x + x \otimes x = \nu^1(x) + x \otimes x.$$

Zu zeigen ist also

$$f_{i,r-i}(x \otimes x) = \tilde{\partial}^{r-i} x \otimes \partial_0^i x = 0.$$

Dies ist eine Gleichung, die man leicht in jeder Einhängung verifiziert (s. [21], 2). In anderen Worten besagt sie: *Ist σ ein r-Simplex und $\tilde{\partial}^{r-i}\sigma \neq b$, dann ist $\partial_0^i \sigma = b$.*

Die wichtigsten Beispiele von kommutativen, assoziativen s.s. Monoiden sind die Eilenberg-MacLane-Komplexe $M = K(A, n)$. Für diesen Fall geben wir 11. 7 noch eine etwas andere und allgemeinere Formulierung, nämlich

11. 10. Satz (vgl. [5], Exp. 11, Thm. 2). — *Die Gruppen*

$$H_i(A, n; G)/D(H_i(A, n; G)), \qquad n > 0, \quad i > n + 1$$

und

$$P(H_i(A, n; G)), \qquad n > 1, \quad i > n + 1$$

sind direkte Summen von zyklischen Gruppen von Primzahlordnung. Dabei bezeichnet D *wie in* 11. 7 *die zerlegbaren und* P *die primitiven Elemente.* G *ist eine beliebige Koeffizientengruppe.*

Insbesondere hat das Bild beim Einhängungshomomorphismus

$$\sigma : H_{i-1}(A, n-1; G) \to H_i(A, n; G), \quad n > 1, \ i > n + 1,$$

als Untergruppe von $P(H_i(A, n; G))$ *diese Eigenschaft.*

Beweis. — Für $G = Z$ ist 11. 10 eine Folge von 11. 7, weil $\pi_i K(A, n) = 0$ ist für $i > n + 1$ (ferner ist $H_{n+1}(A, n; Z) = 0$, $H_n(A, n; Z) = \pi_n K(A, n)$).

Für den allgemeinen Fall benutzen wir den Satz (s. [25], 3. 7), daß man $K(A, n)$ als unendliches symmetrisches Produkt SPE schreiben kann (bis auf Homotopieäquivalenz),

wobei E ein Moore-Komplex mit $H_i(E) = 0$ für $i \neq 0, n$, $H_n(E) = A$ ist. Wegen 11. 8 folgt die Behauptung über $H_i(A, n; G)/D(H_i(A, n; G))$ dann aus der ersten Behauptung von 11. 6, und die Aussage über $P(H_i(A, n; G))$ wegen 11. 9 aus der zweiten Behauptung von 11. 6. Man hat nur zu beachten, daß $H_i(SP^1(ZE^0); G) = 0$ ist für $i \neq n, n+1$.

11. 11. Bermerkung. — Entsprechende Sätze wie wir sie in §§ 10-12 für Homologiegruppen ableiten, gelten natürlich auch für die Kohomologie. Wir beschränken uns darauf, das Gegenstück zur ersten Behauptung von 11. 10 zu formulieren, nämlich

11. 12. Satz. — *Die Gruppe*

$$\mathfrak{A}(A, n; G, q) \subset H^q(A, n; G)$$

der additiven Kohomologieoperationen mit $n > 0$, $q > n + 1$ *(beliebige Keoffizienten) ist eine direkte Summe von zyklischen Gruppen von Primzahlordnung.*

Mit anderen Worten: *Außer evtl. den Koeffizientenhomomorphismen* (d.h. $q = n$) *und den Bocksteinoperatoren* (d.h. $q = n + 1$) *gibt es keine additive Kohomologieoperation der Ordnung* p^2, *p prim.*

12. — HOMOLOGIE UND HOMOTOPIE SYMMETRISCHER PRODUKTE

Unter Benutzung des Bar-Konstruktion $\mathfrak{S}\mathfrak{P}^n$ beweisen wir die folgenden Sätze ([16]).

12. 1. Satz. — *Es sei* X *ein freier* FD-*Komplex und* $H_j(X) = 0$ *für* $j < k$, $k > 0$. *Dann ist*

(12. 2) $$H_i(SP^nX) = 0 \quad \textit{für} \quad i < n.$$

Ist $k > 1$, *dann gilt allgemeiner*

(12. 3) $$H_i(SP^nX) = 0 \quad \textit{für} \quad i < k + 2n - 2.$$

Für symmetrische Produkte besteht die exakte Folge 6. 11 in einem größeren Dimensionsbereich:

12. 4. Satz. — *Es sei* X *ein freier* FD-*Komplex und* $H_j(X) = 0$ *für* $j < k$, $k > 1$. *Dann existiert eine exakte Folge*

(12. 5) $$H_i(SP_2^n(X, X)) \xrightarrow{\alpha_*} H_i(SP^nX) \xrightarrow{\sigma} H_{i+1}(SP^nSX) \xrightarrow{\bar{\beta}} H_{i-1}(SP_2^n(X, X)) \xrightarrow{\alpha_*} H_{i-1}(SP^nX)$$

für $i < 3k + 2n - 5$. *Der Homomorphismus* $\bar{\beta}$ *stimmt wie in* 7. 14 *bis auf einen Isomorphismus*

$$H_{i-1}(SP_2^n(X, X)) \cong H_{i+1}(SP_2^n(SX, SX))$$

mit β_*: $H_{i+1}(SP^nSX) \to H_{i+1}(SP_2^n(SX, SX))$ *überein.*

(16) Diese Sätze folgen zum Teil auch aus den Ergebnissen von J. C. Moore über die Gruppen H(SP^{n}X) (unveröffentlicht). Ein Spezialfall von 12. 1 findet sich in [23], App.
Zusatz bei der Korrektur: Die wichtigsten Resultate dieses Paragraphen wurden auf einem anderen Wege auch von Clare Friedmann gefunden.

Für $n = 2$ besteht die Folge 12. 5 natürlich für alle i, weil SP^2 ein quadratischer Funktor ist (s. 6. 6). Für $n = 3$ stimmt die Schranke $3k + 2n - 5$ mit $3k + 1$ (vgl. 6. 11) überein, für $n > 3$ liegt sie höher.

Einsetzen von 12. 1 in die in 12. 5 auftretenden Mischeffekte SP^n_2 (vgl. 10. 3) gibt

12. 6. Korollar. — *Sind* X, k *wie in* 12. 4, *dann ist der Einhängungshomomorphismus*

$$\sigma : H_i(SP^n X) \to H_{i+1}(SP^n SX)$$

ein Isomorphismus für $i < 2k + 2n - 4$ *und ein Epimorphismus für* $i = 2k + 2n - 4$.

Wegen 10. 1 folgt hieraus

12. 7. Korollar. — *Seien* X, k *wie in* 12. 4 *aber* $k > 2$. *Ist* n *keine Primzahlpotenz, dann ist*

(12. 8)
$$H_i(SP^n X) = 0 \quad \text{für} \quad i < 2k + 2n - 4 = (k + 2n - 2) + (k - 2).$$

Ist $n = p^r$, $r > 0$, p *prim, dann ist*

(12. 9) $$pH_i(SP^n X) = 0 \qquad \text{für} \qquad i < 2k + 2n - 4.$$

Schließlich beweisen wir noch

12. 10. Satz. — *Sind* X, k *wie in* 12. 7 *und ist* $n = p^r$, $r > 0$, p *prim, dann gilt*

$$H_{k+2n-2}(SP^n X) \cong H_k(X) \otimes Z_p.$$

Man kann zeigen, daß dieser Isomorphismus im wesentlichen durch das Wort $\sigma^{k-2}\gamma_p^r\sigma^2$ im Sinne von [5], Exp. 9 gegeben ist; wir gehen hierauf jedoch nicht näher ein.

Unter Benutzung der Ergebnisse von [32] erhalten wir aus 12. 3 und 12. 10 durch « geometrische Realisierung »

12. 11. Satz. — *Es sei* E *ein zusammenhängender* CW-*Komplex und* $H_i(E) = 0$ *für* $0 < i < k$, $k > 1$. *Dann gilt*

(12. 12) $$\pi_i(SP^n E) \cong H_i(E) \quad \textit{für} \quad i < k + 2n - 1, \quad n > 1.$$

Ist $k > 2$ *und* $n + 1$ *keine Primzahlpotenz, dann gilt auch noch*

(12. 13) $$\pi_{k+2n-1}(SP^n E) \cong H_{k+2n-1}(E).$$

Ist dagegen $n+1=p^r$, $r>0$, p prim (und $k>2$), dann gibt es eine exakte Folge

$$(12.14)\quad H_{k+2n}(E)\to H_k(E)\otimes Z_p \to \pi_{k+2n-1}(SP^nE)\to H_{k+2n-1}(E)\to 0.$$

Im Falle $H_1(E)\neq 0$ ist es uns nicht gelungen, einen entsprechenden Satz zu beweisen. Die Schwierigkeit tritt beim (relativen) Satz von Hurewicz auf, weil nun SP^nE, $n>1$, nicht mehr einfach zusammenhängend ist. Modulo dieser Lücke würde sich ergeben $\pi_i(SP^nE)\cong H_i(E)$, $i<n$, $E=$ zusammenhängender CW-Komplex. Für $i=1$ ist dies der Inahlt von

12. 15. Satz (P. A. Smith [27]). — *Sei E ein zusammenhängender CW-Komplex. Dann ist der durch die Inklusion $i: E\to SP^nE$ induzierte Homomorphismus $i_*:\pi_1(E)\to\pi_1(SP^nE)$, $n>1$, epimorph und besitzt als Kern die Kommutatorgruppe von $\pi_1(E)$, also*

$$\pi_1(SP^nE)\cong H_1(E)\quad \textit{für}\quad n>1.$$

Allgemeiner gilt dieselbe Beziehung für das ρ-Produkt $\times^nE/\rho$ von E (s. [9], 6. 2) *wenn ρ eine beliebige transitive Untergruppe von $\mathfrak{S}(n)$, $n>1$, ist.*

Da Smith nur den Fall $\rho=\mathfrak{S}(2)$ formuliert, geben wir einen Beweis von 12. 15 am Ende dieses Paragraphen.

Beweis für 12. 1. — Wir zeigen zunächst, daß dieser Satz richtig ist für eine direkte Summe

$$(12.16)\qquad X=\oplus_\nu X^\nu,$$

falls er für jeden Summanden gilt. Nach [9], 8. 4 ist

$$(12.17)\qquad SP^nX=\oplus_{\Sigma i_\nu=n}\otimes_\nu SP^{i_\nu}X^\nu.$$

Die Homologie von $SP^{i_\nu}X^\nu$ $(i_\nu>0)$ ist null unterhalb der Dimension i_ν (im Falle $k=1$) bezw. $k+2i_\nu-2$ (im Fall $k>1$). Auf Grund der Künnethformeln liefert der Summand $\otimes_\nu SP^{i_\nu}X^\nu$ von SP^nX also nur dann einen Beitrag zur i-ten Homologiegruppe, wenn $i\geq\Sigma i_\nu=n$ ist (im Falle $k=1$) bezw. (im Falle $k>1$) für

$$(12.18)\quad i\geq(k+2i_1-2)+\cdots+(k+2i_r-2) = rk+2n-2r=k+2n-2+(r-1)(k-2)\geq k+2n-2,$$

wenn wir etwa annehmen, daß gerade die ersten r Exponenten i_ν größer als null sind.

Damit ist 12. 1 für X nachgewiesen. Für $k > 2$ kann übrigens in 12. 18 nur dann das Gleichheitszeichen stehen, wenn $r = 1$ ist, also

$$(12.19) \qquad H_{k+2n-2}(SP^n X) \cong \oplus_\nu H_{k+2n-2}(SP^n X^\nu).$$

Für spätere Zwecke notieren wir das Ergebnis der Rechnung 12. 18 noch in

12. 20. Hilfssatz. — *Es seien* X^ν *freie* FD-*Komplexe*, $i_\nu > 0$ *ganze Zahlen*, $\nu = 1, 2, \ldots, r$, $n = \Sigma i_\nu$, *und es gelte*

$$H_j(SP^{i_\nu} X^\nu) = 0 \qquad \textit{für} \qquad j < k + 2i_\nu - 2.$$

Dann ist

$$H_j(SP^{i_1} X^1 \otimes \cdots \otimes SP^{i_r} X^r) = 0 \qquad \textit{für} \qquad j < r(k-2) + 2n.$$

Zum Beweis von 12. 1 können wir X als endlich erzeugt voraussetzen (d.h. X_i endlich erzeugt für alle i), weil sowohl die Bildung symmetrischer Produkte als auch die von Homologiegruppen mit dem direkten Limes vertauschbar sind. Ist X_i endlich erzeugt, dann auch $(SP^n X)_i$ und $H_i(SP^n X)$. Wegen der universellen Koeffizientenformel genügt es dann zum Beweis von 12. 1 zu zeigen, daß in den betrachteten Dimensionen i die Homologiegruppen von $SP^n X$ mit Koeffizienten in jedem Primkörper $\varkappa$ null sind. Diese Gruppen

$$H_i(SP^n X \otimes \varkappa) = H_i(SP^n(X \otimes \varkappa)),$$

hängen aber nur von den Gruppen $H_j(X \otimes \varkappa)$ ab (s. [9], 5. 11). Ist nun Q der FD-Komplex eines Punktes, $S^m Q$ seine m-fache Einhängung, dann können wir offenbar eine direkte Summe von Komplexen $S^m Q$ bilden, die dieselbe Homologie mit Koeffizienten in $\varkappa$ hat wie X. Wie oben bemerkt, brauchen wir dann die Behauptung nur für die Komplexe $S^k Q$ zu beweisen. Dies geschieht durch Induktion nach k.

Unter Benutzung der geometrischen Deutung von SP^n (vgl. Beweis zu 12. 11) ergibt nach sich [32], 6. 4. 6 und 3. 2

$$(12.21) \qquad H_i(SP^n SQ) = 0 \qquad \text{für} \quad i \geq 0 \quad \text{und} \quad n > 1.$$

$$(12.22) \qquad H_i(SP^n S^2 Q) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad i \neq 2n \\ Z & \text{für} \quad i = 2n. \end{cases}$$

Ein von [32] unabhängiger Beweis folgt weiter unten.

Nun der Schritt von k nach $k+1$ $(k \geq 2)$: In der Bar-Konstruktion $\mathfrak{S}\mathfrak{P}^n S^k Q$ (6. 3) treten die Mischeffekte $SP^{i_1}S^kQ \otimes \cdots \otimes SP^{i_r}S^kQ$ auf, deren Homologie nach 12. 20 null ist unterhalb der Dimension $r(k-2)+2n \geq k+2n-2$; für den Totalgrad ist noch $r \geq 1$ hinzuzufügen. Also ist die i-te Homologiegruppe von $\mathfrak{S}\mathfrak{P}^n S^k Q$ bezüglich des zweiten Randoperators null unterhalb der Dimension $k+1+2n-2$, also auch $0 = H_i(\mathfrak{S}\mathfrak{P}^n S^k Q) \cong H_i(SP^n S^{k+1} Q)$ (6. 4) für $i < k+1+2n-2$, wie behauptet.

12. 23. Beweis für 12. 21. — Man sieht sofort, daß alle π-Produkte (s. 4. 10) von Q mit Q übereinstimmen; insbesondere ist $SP^iQ = Q$ und $SPQ^1 \otimes SP^iQ = SP^{i+1}Q = Q$.

Wir zeigen nun, daß die Bar-Konstruktion $\mathfrak{S}\mathfrak{P}^n Q$ azyklisch ist für $n > 1$. Dazu konstruieren wir eine Nullhomotopie

$$s: SP^n_r(Q, \ldots, Q) \to SP^n_{r+1}(Q, \ldots, Q), \quad r = 1, 2, \ldots, \quad n > 1,$$

bezüglich des ersten Randoperators ∂' von $\mathfrak{S}\mathfrak{P}^n Q$ wie folgt: s bildet den Summanden $SP^{i_1}Q \otimes \cdots \otimes SP^{i_r}Q$ von $SP^n_r(Q, \ldots, Q)$ identisch auf den Summanden $SP^1Q \otimes SP^{i_1-1}Q \otimes \cdots \otimes SP^{i_r}Q$ von $SP^n_{r+1}(Q, \ldots, Q)$ ab, falls $i_1 > 1$ ist, und s ist null auf den Summanden mit $i_1 = 1$. Wir übergehen den leichten Nachweis, daß $\partial' s + s\partial' = \iota$ ist. Die Homologie von $\mathfrak{S}\mathfrak{P}^n Q$ bezüglich ∂' ist also null, also auch $H(SP^n SQ) = H(\mathfrak{S}\mathfrak{P}^n Q) = 0$, wie behauptet.

12. 24. Beweis für 12. 22. — In der Bar-Konstruktion $\mathfrak{S}\mathfrak{P}^n SQ$ haben nach 12. 21 alle Terme $SP^{i_1}SQ \otimes \cdots \otimes SP^{i_r}SQ$ verschwindende Homologie, es sei denn $i_1 = i_2 = \cdots = i_r = 1$, also $r = n$. In diesem Falle ist die n-te Gruppe (Totalgrad $= 2n$) frei zyklisch, alle anderen sind null (Künneth-Formel). Die erste Spektralfolge von $\mathfrak{S}\mathfrak{P}^n SQ$ (vgl. 6. 7) entartet also und liefert die Gleichung 12. 22.

Beweis für 12. 4. — In der Bar-Konstruktion $\mathfrak{S}\mathfrak{P}^n X$ haben nach 12. 20 alle Terme $SP^{i_1}X \otimes \cdots \otimes SP^{i_r}X$ mit $r \geq 3$ verschwindende Homologie unterhalb der Dimension $3k+2n-6$, d.h. unterhalb des Totalgrades $3k+2n-3$. Der Unter-Doppelkomplex (vgl. 6. 3)

$$U = \left\{ SP^n X \xleftarrow{\alpha} SP^n_2(X, X) \right\} \tag{12. 25}$$

von $\mathfrak{S}\mathfrak{P}^n X$ hat also bis zum Totalgrad $3k+2n-5$ einschließlich dieselbe Homologie wie $\mathfrak{S}\mathfrak{P}^n X$ (der Quotient nach U hat verschwindende Homologie bezüglich des 2. Randoperators, also auch bezüglich des totalen), d. h.

$$H_i(U) \cong H_i(\mathfrak{S}\mathfrak{P}^n X) \cong H_i(SP^n SX), \qquad i \leq 3k+2n-5.$$

Die gesuchte Folge 12. 5 ist nun einfach ein Teil der exakten Homologiefolge von

$$0 \to SP^n X \to U \to SP^n_2(X, X) \to 0 \qquad \text{(s. 12. 25)}$$

Die zusätzliche Aussage über $\overline{\beta}$ beweist man wie 7. 14.

Beweis für 12. 6 und 12. 7. — Die Homologie von

$$SP^n_2(X, X) = \bigoplus_{i=1}^{n-1} SP^i X \otimes SP^{n-i} X \qquad (10.\ 3)$$

ist nach 12. 20 null unterhalb der Dimension $2k+2n-4$. Die Behauptung 12. 6 folgt daher aus der Exaktheit von 12. 5.

Für 12. 7 können wir X als Einhängung annehmen, $X = SX'$. In den angegebenen Dimensionen ist $\sigma : H_{i-1}(SP^n X') \to H_i(SP^n X)$ epimorph nach 12. 6. Daraus folgt die Behauptung wegen 10. 2.

Beweis für 12. 10. — Wir wissen bereits (s. 12. 3 und 12. 9), daß $H_{k+2n-3}(SP^n X) = 0$, $pH_{k+2n-2}(SP^n X) = 0$ ist. Nach der universellen Koeffizientenformel folgt

$$H_{k+2n-2}(SP^n X \otimes Z_p) = H_{k+2n-2}(SP^n X) \otimes Z_p = H_{k+2n-2}(SP^n X).$$

Die linke Seite hängt nur von $H(X \otimes Z_p)$ ab; wir können also (wie beim Beweis zu 12. 1) den Komplex X durch eine direkte Summe von Komplexen $S^m Q$ ersetzen. Wegen 12. 19 können wir uns dann auf den Fall $X = S^k Q$ beschränken.

Nach 12. 6 ist

$$\sigma : H_{k+2n-2}(SP^n S^k Q) \cong H_{k+1+2n-2}(SP^n S^{k+1} Q), \qquad k \geq 3;$$

wir brauchen also nur den Fall $k = 3$ zu betrachten. Hier haben wir eine exakte Folge (s. 12. 5)

(12. 26)

$$H_{2n}(SP^n_2(S^2Q, S^2Q)) \xrightarrow{\alpha_*} H_{2n}(SP^n S^2 Q) \xrightarrow{\sigma} H_{2n+1}(SP^n S^3 Q) \to 0.$$

Nach 12. 22 ist $H_{2n}(SP^nS^2Q) = \mathbf{Z}$, ebenso

$$H_{2n}(SP^iS^2Q \otimes SP^{n-i}S^2Q) = \mathbf{Z},$$

und die Abbildung

$$\alpha_*: H_{2n}(SP^iS^2Q \otimes SP^{n-i}S^2Q) \to H_{2n}(SP^nS^2Q)$$

ist die Multiplikation mit dem Binomialkoeffizienten $\binom{n}{i}$; letzteres sieht man am besten aus der geometrischen Interpretation von SP^n (die Abbildung $SP^iS^2 \times SP^{n-i}S^2 \to SP^nS^2$, $S^2 =$ 2-Sphäre, hat den Abbildungsgrad $\binom{n}{i}$); man kann aber auch rein algebraisch beweisen, daß der Transfer $H_{2n}(\tau)$ aus 10. 7 hier ein Isomorphismus ist. Die Behauptung

$$H_{2n+1}(SP^nS^3Q) \cong \mathbf{Z}_p$$

folgt daher aus 10.10.

Beweis für 12. 11. — Es genügt den Satz für s.s. Mengen (= c.s.s. Komplexe) zu beweisen, weil jeder CW-Komplex vom gleichen Homotopietyp wie die geometrische Relasierung einer s.s. Menge ist (vgl. [9], 7 für diese Argumentation).

Wir wählen einen Grundpunkt $b \in E_0$. $X = (\mathbf{Z}E)^0$ sei der FD-Komplex mit Ergänzung null von E (s. 11. 4 (ii)). Dann ist $SP^{n+1}X$ der FD-Komplex von $SP^{n+1}E$ modulo SP^nE (s. [9], 9), also

$$(12.\ 27) \qquad H(SP^{n+1}X) \cong H(SP^{n+1}E,\ SP^nE).$$

Wegen $H_1(E) = 0$ ist SP^nE, $n > 1$, einfach zusammenhängend (s. 12. 15). Wir können also den Satz von Hurewicz auf das Paar $(SP^{n+1}E, SP^nE)$, $n > 1$, anwenden und erhalten wegen 12. 3

$$(12.\ 28) \quad \pi_i(SP^{n+1}E, SP^nE) = 0 \quad \text{für} \quad i < k + 2n, \quad n > 1,$$

und für $k > 2$

(12. 29)

$$\pi_{k+2n}(SP^{n+1}E, SP^nE) \cong \begin{cases} H_k(E) \otimes \mathbf{Z}_p, & \text{falls} \quad n+1 = p^r, \quad p \text{ prim} \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Setzen wir diese Werte in die exakte Homotopiefolge

$$\to \pi_{i+1}(SP^{n+1}E,\ SP^nE) \to \pi_i(SP^nE) \to \pi_i(SP^{n+1}E) \\ \to \pi_i(SP^{n+1}E,\ SP^nE) \to$$

von $(SP^{n+1}E,\ SP^nE)$ ein, so erhalten wir (induktiv)

$$(12.30)\quad \pi_i(SP^nE) \cong \pi_i(SP^{n+1}E) \cong \pi_i(SP^{n+2}E) \cong \cdots \pi_i(SP^\infty E), \\ i < k + 2n - 1, \qquad n > 1,$$

und falls $n + 1$ keine Primzahlpotenz ist, auch noch

$$(12.31)\qquad \pi_{k+2n-1}(SP^nE) \cong \pi_{k+2n-1}(SP^\infty E).$$

Im Falle $n + 1 = p^r$, p prim, ergibt sich eine exakte Folge

$$(12.32)\quad \pi_{k+2n}(SP^\infty E) \to H_k(E) \otimes Z_p \to \pi_{k+2n-1}(SP^nE) \\ \to \pi_{k+2n-1}(SP^\infty E) \to 0.$$

Wegen $\pi_j(SP^\infty E) \cong H_j(E)$ (s. [32], 6. 10) ist damit der Satz bewiesen.

Beweis für 12. 15. — Wie beim Beweis zu 12. 11 können wir E als s.s. Menge voraussetzen.

Wir betrachten zunächst die Projektion $p : \times^n E \to \times^n E/\rho$. Wie man leicht sieht, besitzt jeder Kantenweg w in $\times^n E/\rho$ ein Urbild $\tilde{w}$ bezüglich p. Ist w ein geschlossener Kantenweg in $\times^n E/\rho$ mit dem Anfangspunkt in der Diagonale Δ von $\times^n E/\rho$ ($= p$-Bild der Diagonale von $\times^n E$), dann ist jedes Urbild $\tilde{w}$ von w ebenfalls geschlossen, denn über Δ ist p umkehrbar eindeutig. Da man sich bei der Bildung von π_1 auf Kantenwege beschränken kann, ist demnach

$$p_* : \pi_1(\times^n E) \to \pi_1(\times^n E/\rho)$$

ein Epimorphismus.

Die n natürlichen Injektionen $i^\nu : E \to \times^n E$ (nach Auswahl eine Grundpunktes in E) induzieren einen Isomorphismus $\pi_1(\times^n E) \cong \pi_1(E) \oplus \pi_1(E) \oplus \cdots$ (s. [29], 17. 8), und ρ permutiert diese Summanden transitiv. Daher ist schon $i_* = p_* i^\nu_* :$ $\pi_1(E) \to \pi_1(\times^n E/\rho)$ ein Epimorphismus.

Seien nun $x_1,\ x_2 \in \pi_1(\times^n E/\rho)$ und etwa

$$x_\nu = i_*(y_\nu) = p_*(i^\nu_*(y_\nu)), \qquad \nu = 1, 2.$$

Dann ist $i^1_*(y_1) . i^2_*(y_2) = i^2_*(y_2) . i^1_*(y_1)$, also nach Anwenden von p_* $x_1 . x_2 = x_2 . x_1$. Also ist $\pi_1(\times^n E/\rho)$ eine abelsche Gruppe.

Betrachten wir nun das kommutative Diagramm

$$
(12.33)\qquad
\begin{array}{ccc}
\pi_1(E) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(\times^n E/\rho) \\
\Phi\downarrow & & \downarrow\Phi \\
H_1(E) & \xrightarrow[H_1(i)]{} & H_1(\times^n E/\rho)
\end{array}
$$

(Φ der Hurewiczhomomorphismus). $H_1(i)$ ist monomorph (s. [9], 9), also ist der Kern von $H_1(i) \circ \Phi$ die Kommutatorgruppe von $\pi_1(E)$. Der Kern von i_* kann also nicht größer sein, aber auch nicht kleiner, weil $\pi_1(\times^n E/\rho)$ abelsch ist, qed.

LITERATUR

[1] J. F. Adams, On the cobar construction, *Proc. Nat. Acad. Sci., USA*, 42 (1956), 409-412.

[2] W. D. Barcus-J. P. Meyer, The suspension of a loop space, *Amer. J. Math.*, 80 (1958), 895-920.

[3] N. Bourbaki, *Séminaire*, Exposé 170, de A. Dold, Dezember, 1958, Paris.

[4] D. Buchsbaum, Exact categories and duality, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 80 (1955), 1-34.

[5] H. Cartan, Algèbres d'Eilenberg-MacLane et homotopie, *Séminaire*, H. Cartan, 7 (1954-1955), Paris.

[6] H. Cartan, Quelques questions de topologie, *Séminaire*, H. Cartan, 9 (1956-1957), Paris.

[7] H. Cartan-S. Eilenberg, Homological Algebra, *Princeton University Press*, Princeton, N.J. 1956.

[8] C. Chevalley, Fundamental concepts of algebra, *Academic Press Inc.*, New York, 1956.

[9] A. Dold, Homology of symmetric products and other functors of complexes, *Ann. of Math.* 68 (1958), 54-80.

[10] A. Dold, Zur Homotopietheorie der Kettenkomplexe, *Math. Annalen*, 140 (1960), 278-298.

[11] A. Dold-D. Puppe, Non-additive functors, their derived functors, and the suspension homomorphism, *Proc. Nat. Acad. Sci., USA*, 44 (1958), 1065-1068.

[12] S. Eilenberg-S. MacLane, On the groups $H(\pi, n)$ I, *Ann. of Math.*, 58 (1953), 55-106.

[13] S. Eilenberg-S. MacLane, On the groups $H(\pi, n)$ II, *Ann. of Math.*, 60 (1954), 49-139.

[14] S. Eilenberg-J. A. Zilber, On products of complexes, *Amer. J. Math.*, 75 (1953), 200-204.

[15] R. Godement, Topologie algébrique et théorie des faisceaux, *Act. Sci. Ind.*, 1252, Hermann, Paris, 1958.

[16] A. Grothendieck, Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tôhoku Math. J.*, 9 (1957), 119-121.

[17] D. M. Kan, Abstract Homotopy II, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 42 (1956), 255-258.

[18] D. M. Kan, Functors involving css-complexes, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 87 (1958), 330-346.

[19] D. M. Kan, On the homotopy relation for css-maps, *Bol. Soc. Mat. Mexicana* (1957), 75-81.

[20] S. MacLane, Simplicial topology I, Lecture notes by J. Yao, *University of Chicago*, 1959.

[21] J. Milnor, The construction FK, Mimeographed notes, *Princeton University*, 1956.

[22] J. C. Moore, Semi-simplicial complexes, Mimeographed notes, *Princeton University*, 1955-1956.

[23] M. Nakaoka, Decomposition theorems for homology groups of symmetric groups, *Ann. of Math.*, 71 (1960), 16-42.

[24] D. Puppe, Homotopie und Homologie in abelschen Gruppen- und Monoidkomplexen I, *Math. Zeitschr.*, 68 (1958), 367-406.

[25] D. Puppe, Homotopie und Homologie in abelschen Gruppen- und Monoidkomplexen II, *Math. Zeitschr.*, 68 (1958), 407-421.

[26] J. P. Serre, Homologie singulière des espaces fibrés. Applications, *Ann. of Math.*, 54 (1951), 425-505.

[27] P. A. Smith, Manifolds with abelian fundamental groups, *Ann. of Math.*, 37 (1936), 526-533.

[28] E. Spanier, Infinite symmetric products, functions spaces, and duality, *Ann. of Math.*, 69 (1959), 142-148.

[29] N. E. Steenrod, The topology of fibre bundles, *Princeton University Press*, Princeton N.J. 1951.

[30] N. E. Steenrod, Cohomology operations derived from the symmetric group, *Comment. Math. Helv.*, 31 (1957), 195-218.

[31] G. W. Whitehead, On the homology suspension, *Ann. of Math.*, 62 (1955), 254-268.

[32] A. Dold-R. Thom, Quasifaserungen und unendliche symmetrische Produkte, *Ann. of Math*,, 67 (1958), 239-281.

d. 8-12-1960 16-1-61

D. PUPPE A. DOLD

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
11 (1961), 313-384.

ANNEAU DES ENDOMORPHISMES D'UN MODULE DE TYPE FINI SUR UN ANNEAU LOCAL

par **Jean-Pierre LAFON** (Clermont-Ferrand).

INTRODUCTION

Ce travail est consacré à l'étude de l'anneau $\mathfrak{L}(E)$ des A-endomorphismes d'un module de type fini E sur un anneau local A d'idéal maximal m et de corps des restes k. Toutefois, certains des résultats obtenus sont valables dans le cas plus général où A est un anneau commutatif à élément unité et, d'autre part, quand seule intervient la structure de A-module de $\mathfrak{L}(E)$, il n'est souvent pas plus difficile d'étudier le A-module $\mathrm{Hom}_A(E,F)$ où E et F sont deux A-modules de type fini.

Nous rappelons dans un chapitre préliminaire quelques définitions et résultats classiques.

Le chapitre 1 traite de propriétés générales de l'anneau $\mathfrak{L}(E)$: représentation matricielle, comparaison de topologies naturelles. Nous montrons que le radical de Jacobson r de l'anneau $\mathfrak{L}(E)$ contient l'idéal bilatère $\mathrm{Hom}_A(E, mE)$. Enfin, l'utilisation d'un théorème d'Azumaya nous donne une condition nécessaire pour que r soit égal à $m\mathfrak{L}(E)$ dans le cas où A est hensélien.

Nous exposons dans le chapitre 2 une technique utilisée très souvent dans tout ce travail. A tout sous-module caractéristique C est associée une suite exacte :

$$O \to \mathrm{Hom}_A(E, C) \to \mathfrak{L}(E) \to \mathfrak{L}(E/C)$$

et l'image de $\mathfrak{L}(E)$ dans $\mathfrak{L}(E/C)$, c'est-à-dire $\mathfrak{L}(E)/\mathrm{Hom}_A(E, C)$, est une approximation de $\mathfrak{L}(E)$ par un sous-anneau de $\mathfrak{L}(E/C)$.

Le cas où $C = mE$ est intéressant par sa simplicité et conduit déjà à des résultats; l'anneau $\mathfrak{L}(E)/\mathrm{Hom}_A(E, mE)$ est alors

une sous-algèbre de l'algèbre $\mathfrak{L}(E/mE)$ sur k et nous obtenons même ainsi une représentation fidèle de cette algèbre. La réciproque est, évidemment, intéressante pour la construction d'exemples et de contre-exemples : toute représentation fidèle d'une algèbre à élément unité de dimension finie sur un corps k peut être obtenue par le procédé ci-dessus à partir d'un anneau local A de corps des restes k et d'un A-module de type fini E convenablement choisis. La technique utilisée conduit naturellement à la conjecture suivante : tout anneau qui est un module de type fini sur son centre est le quotient d'un anneau $\mathfrak{L}(E)$ où E est un module de type fini sur un anneau convenable. Nous vérifions la validité de cette conjecture dans quelques cas particuliers.

Si E et F sont deux A-modules de type fini, l'étude de la surjectivité de l'application naturelle de $\mathrm{Hom}_A(E, F)$ dans $\mathrm{Hom}_k(E/mE, F/mF)$ conduit à des critères simples de liberté pour E.

Nous caractérisons les algèbres à élément unité de dimension finie sur un corps k qui peuvent être obtenues par le procédé précédent à partir d'un module somme directe de modules monogènes.

Nous montrons, enfin, que l'homomorphisme naturel de $\mathfrak{L}(E)$ dans $\mathfrak{L}(E/m^iE)$ n'est pas en général surjectif pour i grand mais qu'il en est ainsi si A est un anneau de valuation discrète.

Le chapitre 3 contient une ébauche de théorie des idéaux de l'anneau $\mathfrak{L}(E)$. En fait, notre étude se limite à l'étude des idéaux maximaux bilatères, à droite et à gauche. Par exemple, les idéaux bilatères maximaux sont de deux types : si I est un tel idéal, il peut effectivement se produire que $\Sigma_{u \in I} u(E)$ soit E tout entier. S'il n'en est pas ainsi, I est de la forme $\mathrm{Hom}_A(E, C)$ où C est un sous module caractéristique qui peut être choisi maximal. Réciproquement, si C est un sous-module caractéristique maximal, l'idéal $\mathrm{Hom}_A(E, C)$ est bilatère maximal. Pour un idéal à droite maximal, on a une situation analogue : il suffit de remplacer sous module caractéristique par sous-module. Il n'est pas vrai, toutefois, que si R est un sous module maximal, $\mathrm{Hom}_A(E, R)$ est un idéal à droite maximal.

Le chapitre 4 contient une étude du dual $E^* = \mathrm{Hom}_A(E, A)$ du A-module E. Une partie est destinée à expliciter des lemmes

utiles pour le chapitre suivant. Nous cherchons ensuite des conditions pour que l'anneau $\mathfrak{L}(E^*)$ soit anti-isomorphe à l'anneau $\mathfrak{L}(E)$. Nous étudions enfin la forme bilinéaire induite sur $(E^*/mE^*) \times (E/mE)$ par la forme bilinéaire canonique sur $E^* \times E$.

Nous cherchons dans le chapitre 5 à caractériser les modules de type fini E sur un anneau commutatif A tels que l'anneau $\mathfrak{L}(E)$ soit commutatif. Il en est ainsi si E est isomorphe à un idéal a de A contenant au moins un élément régulier. Par passage au contre-module, nous nous ramenons à la recherche des A-modules E tels que $\mathfrak{L}(E) = A$. Si l'anneau A est intègre ou plus généralement somme directe d'un nombre fini d'anneaux intègres, cette condition implique que le module E est isomorphe à un idéal de A. Des contre-exemples montrent qu'il n'en est plus ainsi dans le cas général. Ce problème conduit assez naturellement à la recherche de structures de A-algèbres sur un A-module de type fini E : un élément du dual conduit à une telle structure et l'algèbre obtenue est associative.

Le chapitre 6 est réservé à l'étude d'un endomorphisme particulier sous les hypothèses successives A local hensélien, puis A local factoriel hensélien. Nous généralisons des propositions bien connues pour les endomorphismes d'espaces vectoriels de dimension finie, notamment en ce qui concerne la diagonalisation éventuelle de tels endomorphismes.

Je suis heureux de pouvoir témoigner ma reconnaissance à M. Samuel, M. Dubreil, M. le Doyen Pérès et M. Chevalley pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail.

PRÉLIMINAIRES

1. — Anneaux.

Un anneau local A est un anneau commutatif à élément unité tel que l'ensemble des éléments non inversibles de A soit un groupe additif qui est alors le plus grand idéal de A, idéal que nous noterons m. Nous désignerons parfois par k le corps des restes A/m. Nous ne supposerons pas nécessairement qu'un anneau local est noethérien mais il en sera ainsi le plus souvent. En ce cas, $\hat{A}$ sera le complété de A.

L'analogue non commutatif sera appelé complètement primaire : c'est un anneau C tel que l'ensemble des éléments non inversibles à droite soit un idéal à droite. Nous renvoyons à (8) où de tels anneaux sont appelés locaux pour la démonstration du fait que cet idéal I, bilatère puisqu'il est le radical de Jacobson de C est aussi l'ensemble des éléments non inversibles à gauche. L'anneau quotient C/I est un corps non nécessairement commutatif.

Un anneau local A sera dit hensélien si : pour tout polynôme unitaire $f(X)$ de $A[X]$ et toute décomposition $\bar{f}(X) = \bar{g}(X)\bar{h}(X)$ du polynome $\bar{f}(X)$ obtenu en réduisant modulo m les coefficients de $f(X)$ en produit de deux polynômes unitaires étrangers $\bar{g}$ et $\bar{h}$ de $k[X]$, il existe deux représentants $g(X)$ et $h(X)$ de $\bar{g}(X)$ et $\bar{h}(X)$ respectivement tels que $f(X) = g(X)h(X)$. Nous utiliserons pour l'étude d'un endomorphisme particulier les caractérisations données par Azumaya [1] et plus particulièrement le théorème suivant :

Théorème A. — *Soient* A *un anneau local hensélien,* R *une* A-*algèbre* A-*module de type fini et* I *un idéal bilatère de* R.

Pour tout système $\overline{p}_1, \ldots, \overline{p}_n$ d'idempotents deux à deux orthogonaux de R/I, *il existe dans* R *un système* $p_1, \ldots, p_n$ *d'idempotents deux à deux orthogonaux tels que* p_i *soit un représentant de* $\overline{p}_i$ *pour* $i = 1, \ldots, n$.

Nous ne redonnerons pas ici la démonstration de ce théorème. Rappelons qu'un anneau local complet est hensélien (Cohen). Dans ce cas important, le lemme bilinéaire de Samuel [18] permet de simplifier sensiblement la démonstration du théorème A, théorème qui généralise des résultats classiques pour les algèbres de dimension finie sur un corps k.

2. — Modules.

Les modules seront toujours supposés *unitaires*. Un A-module E est dit de type fini s'il existe un système fini $e_1, \ldots, e_n$ de générateurs de E sur A.

Si A est local d'idéal maximal m, le A-module E/mE est, en fait, muni d'une structure de k-espace vectoriel et c'est cette structure que nous considérerons. Si E est de type fini il résulte du lemme de Nakayama qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $e_1, \ldots, e_n$ engendrent E sur A est que les classes $\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n$ modulo mE engendrent le k-espace vectoriel E/mE. Si $\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n$ constituent une base de E/mE sur k, nous dirons que le système $e_1, \ldots, e_n$ est un système *minimal* de générateurs de E sur A. Il en résulte immédiatement que deux systèmes minimaux de générateurs ont le même nombre d'éléments et que, si $e_1, \ldots, e_n$ est un système minimal, aucun e_i ne peut s'exprimer comme combinaison linéaire des e_j avec $j \neq i$.

Nous utiliserons souvent le A-module libre L engendré par un système minimal donné. Nous appellerons parfois *premier terme d'une résolution minimale pour* E la suite exacte

$$O \to R \to L \to E \to O$$

où R est le sous-module des relations.

Ce sous module est contenu dans mL et le k-espace vectoriel L/mL est isomorphe au k-espace vectoriel E/mE.

Nous noterons $\mathfrak{L}(E)$ l'anneau des A-endomorphismes du A-module E. Un sous-module C de E est dit complètement

caractéristique si $u(C) \subset C$ pour tout endomorphisme u de E. Pour simplifier nous dirons qu'un tel sous-module est *caractéristique*; ce terme est en général réservé pour désigner un sous module C tel que $u(C) \subset C$ pour tout automorphisme u de E mais comme cette notion ne sera pas utilisée dans ce travail, notre convention ne saurait créer de confusions.

Si A est un anneau local noethérien de complétion $\hat{A}$ et si E est un A-module de type fini, rappelons que le complété $\hat{E}$ de E dans la topologie m-adique s'identifie canoniquement à $\hat{A} \otimes_A E$: il a une structure de $\hat{A}$-module de type fini. Il résulte des propriétés décrites dans le paragraphe suivant que si F est un sous module $\widehat{E/F} = \hat{E}/\hat{F}$ et, en particulier, $\hat{E}/\hat{m}\hat{E}$ s'identifie à E/mE. Un système minimal de générateurs de E sur A est aussi un système minimal de générateurs de $\hat{E}$ sur $\hat{A}$.

3. — Propriétés de platitude.

Rappelons que, si A est un anneau et si B est un A-module, B est dit A-plat si le foncteur $T(M) = B \otimes_A M$ est exact.

Le théorème qui suit sera pour nous d'un grand intérêt :

THÉORÊME 19. — *Soit* A *un anneau noethérien et soit* B *un anneau* A-*plat. Si* M *et* N *sont deux* A-*modules,* N *étant de type fini, on a un isomorphisme canonique :*

$$B \otimes_A \mathrm{Hom}_A (M, N) \simeq \mathrm{Hom}_B (M \otimes_A B, N \otimes_A B).$$

Deux exemples importants sont fournis par la complétion et la localisation. Si A est local noethérien de complétion $\hat{A}$ et si E et F sont deux A-modules de type fini, $\widehat{\mathrm{Hom}_A (E, F)}$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{Hom}_{\hat{A}} (\hat{E}, \hat{F})$. Il en résulte que, dans un certain nombre de questions, on peut se ramener au cas où l'anneau A est complet mais cette simplification apparente est souvent illusoire.

Si S est une partie multiplicative de A, c'est-à-dire une partie de A telle que $S.S \subset S$, $1 \in S$ et $0 \notin S$, on peut former l'anneau généralisé des quotients par rapport à S. Rappelons que si n est l'ensemble des a de A tels qu'il existe s de S avec $sa = 0$, n est un idéal de A distinct de A. Si ε est l'homomorphisme

canonique de A sur A/n, dans l'anneau total des fractions de A/n, les éléments $\varepsilon(a)\varepsilon(s)^{-1}$ avec $a \in A$ et $s \in S$ forment un sous-anneau A_S. Nous noterons comme dans (7) a/s l'élément $\varepsilon(a)\varepsilon(s)^{-1}$. On vérifie sur ces éléments les règles habituelles du calcul des fractions. De plus, $a/s = 0$ signifie qu'il existe s' dans S tel que $s'a = 0$.

Si M est un A-module, désignons par M_S le A_S-module $A_S \otimes_A M$ et posons $m/s = \varepsilon(s)^{-1} \otimes m$ si $s \in S$ et $m \in M$. On vérifie les formules usuelles et que tout élément de M_S est de la forme m/s (7). Nous utiliserons, enfin, le lemme suivant dont la démonstration se trouve dans (7) :

Lemme. — *Soient* M *un* A-*module et* S *une partie multiplicative de* A. *Pour que* $m/s = 0$ *avec* $m \in M$ *et* $s \in S$, *il faut et il suffit qu'il existe* $s' \in S$ *tel que* $s'm = 0$.

La démonstration de la platitude de A_S se trouve dans (7) par exemple.

CHAPITRE PREMIER

GÉNÉRALITÉS SUR $\mathfrak{L}(E)$

I. Représentation matricielle de $\mathfrak{L}(E)$.

Si, en principe, nous essayons d'obtenir des démonstrations intrinsèques, la représentation matricielle de $\mathfrak{L}(E)$ nous sera utile dans certaines questions et au moins pour les exemples.

On connait bien l'anneau d'endomorphismes d'un module libre L de type fini sur un anneau commutatif A : c'est, en effet, un anneau total de matrices $M_n(A)$ sur l'anneau A. L'étude d'un anneau $\mathfrak{L}(E)$ pour un A-module E non libre est bien plus compliquée car, pour qu'une matrice agisse sur un système de générateurs comme un endomorphisme il faut qu'elle respecte les relations. De façon plus précise.

Proposition 1. — *Soient* A *un anneau commutatif et* E *un* A-*module. Si* $E = L/R$ *où* L *est un* A-*module libre,* $\mathfrak{L}(E)$ *est le quotient* $M(L, R)/\mathrm{Hom}_A(L, R)$ *où* $M(L, R)$ *est l'anneau des endomorphismes* u^* *de* L *tels que* $u^*(R) \subset R$.

Cette démonstration est très classique et le résultat ne serait pas changé si on supposait seulement L projectif mais cette distinction est pour nous sans intérêt. Considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
O \arrow[r] & R \arrow[r] & L \arrow[r, "p"] & E \arrow[r] \arrow[d, "u"] & O \\
O \arrow[r] & R \arrow[r] & L \arrow[r, "p"'] & E \arrow[r] & O
\end{tikzcd}$$

up est un homomorphisme de L dans E; la projectivité de L

implique, alors, l'existence d'un $u^*: L \to L$ tel que le rectangle

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{p} & E \\ {\scriptstyle u^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ L & \xrightarrow{p} & E \end{array}$$

soit commutatif. Désignons par v la restriction de u^* à R; le fait que $pu^* = up$ nous donne $pv(R) = up(R) = 0$; donc, $v(R)$ est contenu dans le noyau de p qui est R et u^* satisfait bien à $u^*(R) \subset R$.

Réciproquement, si $u^*: L \to L$ est tel que $u^*(R) \subset R$, u^* induit un homomorphisme $u: L/R = E \to E$.

Nous avons, donc, une application surjective de M(L, R) sur $\mathfrak{L}(E)$ et le noyau en est, évidemment, $\mathrm{Hom}_A(L, R)$.

Corollaire. — *Soient* A *un anneau noethérien,* E *un* A-*module engendré par n éléments. Les matrices que nous allons considérer seront toutes à coefficients dans* A. *Il existe une matrice* P *à n lignes et p colonnes telle que si* $\tilde{M}$ *est l'anneau des matrices carrées* M *d'ordre n satisfaisant à l'équation matricielle* $MP = PM'$ *et si* $\tilde{O}$ *est l'idéal de* M *formé des matrices de la forme* PB' *avec* B' *matrice à p lignes et colonnes, l'anneau* $\mathfrak{L}(E)$ *soit isomorphe à l'anneau quotient* $\tilde{M}/\tilde{O}$.

Ceci est la simple traduction matricielle de la proposition 1. Les hypothèses faites sur A et E permettent de prendre L et R de type fini. Faisons choix d'une base $x_1, \ldots, x_n$ pour L et d'un système (fini) de générateurs $(y_1, \ldots, y_p)$ pour le sous-module des relations R. Alors, $\tilde{M}$ est isomorphe à M(L, R) : on traduit la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{i} & L \\ {\scriptstyle v}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u^*} \\ R & \xrightarrow{i} & L \end{array}$$

oú i est l'injection de R dans L; la matrice P est la matrice (a_{ji}) si $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}x_i$ $(j = 1, \ldots, p)$. Quant à $\tilde{O}$, il est isomorphe à $\mathrm{Hom}_A(L, R)$, la traduction matricielle résultant du fait que si $u^*: L \to L$ est tel que $u^*(L) \subset R$, il peut, en fait, s'écrire iu^* et réciproquement.

Si $u \in \mathfrak{L}(E)$ et si $e_1, \ldots, e_n$ est un système de générateurs de

E supposé de type fini sur A, nous appellerons *matrice de représentation* de u par rapport au système de générateurs ci-dessus une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans A, (a_{ji}) telle que $u(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}e_j$.

Il résulte immédiatement de ce qui précède :

Corollaire. — *Si* A *est noethérien,* $\mathfrak{L}(E)$ *est de type fini.*

Remarque très importante. — Si A est local d'idéal maximal m, on peut choisir pour E un système *minimal* de générateurs $e_1, \ldots, e_n$ et prendre pour L le A-module libre de base $x_1, \ldots, x_n$. Dans ces conditions $i(R) \subset mL$ car, sinon, on aurait une relation $a_1e_1 + \cdots + a_ne_n = 0$ avec, au moins, un coefficient, soit a_1 par exemple, non dans m, c'est-à-dire inversible; on pourrait alors, obtenir e_1 comme combinaison linéaire de $e_2, \ldots, e_n$, contrairement à l'hypothèse de minimalité faite sur les e_i.

Bien entendu, nous aurions pu énoncer des résultats analogues à la proposition 1 pour $\mathrm{Hom}_A(E, F)$. Nous n'aurons pas ici à utiliser de tels résultats.

2. Une filtration sur $\mathfrak{L}(E)$.

Les sous-modules $\mathrm{Hom}_A(E, m^iE)$ $(i = 1, \ldots)$ définissent une filtration décroissante de $\mathfrak{L}(E)$. Montrons, d'abord, que $\mathrm{Hom}_A(E, mE)$ est contenu dans le radical de Jacobson r de L(E). Nous nous appuierons sur le :

Lemme. — *Soient* A *un anneau, noethérien,* L *un* A*-module de type fini,* R *un sous-module et* u *un automorphisme de* L *tel que* $u(R) \subset R$. *Alors,* $u^{-1}(R) \subset R$ *et, par suite,* u *induit un automorphisme sur* R *et* L/R.

Nous supposons, en effet, $u(R) \subset R$, soit $R = u^{-1}u(R) \subset u^{-1}(R)$. Nous obtenons une chaîne croissante $R \subset u^{-1}(R) \subset \cdots \subset u^{-p}(R) \subset \cdots$ qui doit être stationnaire. Il existe donc un entier p, tel que $u^{-p}(R) = u^{-p-1}(R)$ et on en déduit $R = u(R)$; la restriction de u à R est, donc, surjective; elle est injective comme u et c'est donc un automorphisme de R. Si $\bar{u}$ est induit par u sur L/R, $\bar{u}$ est, évidemment surjective. Elle est injective car $\bar{u}(\bar{x}) = 0$ implique $u(x) \in R$, donc, $x \in R$ et $\bar{x} = 0$.

Voici une démonstration différente où A n'est plus supposé

noethérien mais où L est supposé libre. Elle est moins agréable mais assez utile.

Lemme *bis*. — *Soit* A *un anneau commutatif et soit* R *un sous-module du* A*-module libre de type fini* L. *Si* u *est un automorphisme de* L *tel que* $u(\mathrm{R}) \subset \mathrm{R}$, *alors* $u^{-1}(\mathrm{R}) \subset \mathrm{R}$ *et* u *induit un automorphisme sur* R *et* L/R.

Soit, en effet, $x_1, \ldots, x_n$ une base de L sur A et soit (a_{ji}) la matrice de u par rapport à cette base. Désignons par $\chi_u(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^n + a_1\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + a_n$ le polynôme caractéristique de (a_{ji}). Il résulte du théorème d'Hamilton Cayley que $\chi_u(u) = 0$ et, d'autre part, puisque u est un automorphisme de L, $a_n = \det(a_{ji})$ est inversible dans A. On écrira, alors, $u^{-1} = -(a_n)^{-1}(u^{n-1} + a_1u^{n-2} + \cdots + a_{n-1})$, formule qui montre que u^{-1} est un polynôme en u à coefficients dans A. Il est, donc, tel que $u^{-1}(\mathrm{R}) \subset \mathrm{R}$. D'où le résultat.

Revenons au cas où A est local et soit $\mathrm{E} = \mathrm{L}/\mathrm{R}$ où L est le A-module libre engendré par un système minimal de générateurs de E. Le lemme nous montre que si $u : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ est induit par un automorphisme u^* de L, c'est un automorphisme de E. Réciproquement, si u est un automorphisme de E, il existe $u^{-1} : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ tel que $uu^{-1} = 1$. Si u^{-1} est induit par w^* de $\mathfrak{L}(\mathrm{L})$, $u^*w^*(x_i) = x_i + z_i$ où $z_i \in \mathrm{R}$ et donc est dans $m\mathrm{L}$, (x_i) désignant une base de E. Alors, u^*w^* est inversible dans $\mathfrak{L}(\mathrm{L})$ car le déterminant de sa matrice par rapport à la base considérée est congru à 1 modulo m; u^* est, donc, un automorphisme de L.

Proposition 2. — *Soit* A *local et soit* $0 \to \mathrm{R} \to \mathrm{L} \to \mathrm{E} \to 0$ *le premier terme d'une résolution minimale de* E. *Tout automorphisme de* E *est induit par un automorphisme de* L *et, réciproquement, tout automorphisme* u^* *de* L *tel que* $u^*(\mathrm{R}) \subset \mathrm{R}$ *induit un automorphisme de* E.

On en déduit.

Corollaire. — *Soient* A *un anneau local et* E *un* A*-module de type fini. Une condition nécessaire et suffisante pour que l'élément* u *de* $\mathfrak{L}(\mathrm{E})$ *soit un automorphisme de* E *est que, par rapport à un système minimal de générateurs,* u *possède une matrice de représentation inversible. Il en est, alors, de même de toute matrice de représentation par rapport à ce système.*

Il est immédiat que $m^i\mathfrak{L}(E) \subset \mathrm{Hom}_A(E, m^iE)$ car, une condition nécessaire et suffisante pour que $u \in \mathrm{Hom}_A(E, m^iE)$ est que u admette une matrice de représentation (au moins une) à coefficients dans m^i et ceci est, évidemment, le cas si $u \in m^i\mathfrak{L}(E)$. D'autre part, le corollaire ci-dessus nous montre que si $u \in 1 + \mathrm{Hom}_A(E, mE)$, u est inversible. Une caractérisation classique du radical de Jacobson r comme plus grand idéal à gauche (ou à droite) tel que tout élément de $1 + r$ soit inversible montre :

Corollaire. — *On a les inclusions* $m^i\mathfrak{L}(E) \subset \mathrm{Hom}_A(E, m^iE) \subset r$ *pour* $i = 1, \ldots$

On n'a pas forcément $\mathrm{Hom}_A(E, m^i) = m^i\mathfrak{L}(E)$ comme le montre l'exemple suivant : $A = k[[X_1, X_2]]$ et $E = Ae_1 + Ae_2$ avec les relations $X_1e_1 = 0$ et $X_2^2e_2 = 0$. On vérifie, sans difficulté, que $\mathfrak{L}(E)/m\mathfrak{L}(E)$ est isomorphe à l'algèbre des matrices à coefficients dans k de la forme $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & b \end{vmatrix}$, tandis que $\mathfrak{L}(E)/\mathrm{Hom}_A(E, mE)$ est isomorphe à la sous-algèbre obtenue pour $c = 0$.

Nous verrons de nombreux exemples montrant que, en général, $\mathrm{Hom}_A(E, mE)$ est différent de r.

3. Comparaisons de trois topologies.

On peut considérer sur $\mathfrak{L}(E)$ trois topologies naturelles : $a)$ la topologie m-adique; $b)$ la topologie définie par les puissances du radical de Jacobson r; $c)$ la topologie définie par les $\mathrm{Hom}_A(E, m^iE)$.

Si A est noethérien, ces trois topologies sont séparées : c'est clair pour la m-adique et pour celle définie par les $\mathrm{Hom}_A(E, m^iE)$. Dans le cas général, le radical de Jacobson de $\mathfrak{L}(E)/m\mathfrak{L}(E)$ est $r/mL(E)$. Comme $\mathfrak{L}(E)/m\mathfrak{L}(E)$ a une structure de k-algèbre de dimension finie, donc d'anneau artinien, ce radical est nilpotent et il existe un entier p tel que $[r^p + m\mathfrak{L}(E)]/m\mathfrak{L}(E) = 0$ d'où $r^p \subset m\mathfrak{L}(E) \subset r$. La topologie r-adique coïncide, donc, avec la m-adique.

Proposition 3. — *Si* A *est noethérien, il existe un entier* p *tel que pour* $n \geqslant p$, $m^n \operatorname{Hom}_A(E, m^q F) = \operatorname{Hom}_A(E, m^{n+q}F)$ *si* E *et* F *sont deux* A*-modules de type fini.*

On écrit $E = L/R$ où L est libre de type fini; alors, $\operatorname{Hom}_A(E, F)$ est contenu dans $\operatorname{Hom}_A(L, F)$ et $\operatorname{Hom}_A(E, m^n F)$ est contenu dans $\operatorname{Hom}_A(L, m^n F)$. De plus, $\operatorname{Hom}_A(L, m^n F) = m^n \operatorname{Hom}_A(L, F)$ et $\operatorname{Hom}_A(E, m^n F) = \operatorname{Hom}_A(E, F) \cap \operatorname{Hom}_A(L, m^n F)$. On applique alors, le lemme d'Artin-Rees au module $\operatorname{Hom}_A(L, F)$ et au sous-module $\operatorname{Hom}_A(E, F)$. D'où le résultat. Ceci montre, évidemment, que la topologie définie sur $\operatorname{Hom}_A(E, F)$ par les $\operatorname{Hom}_A(E, m^n F)$ coïncide avec la topologie m-adique car, $\operatorname{Hom}_A(E, m^q F)$ est contenu dans $\operatorname{Hom}_A(E, F)$ et on en déduit que $m^n \operatorname{Hom}_A(E, F)$ contient $\operatorname{Hom}_A(E, m^{n'} F)$ pour n' grand.

4. Rappels et interprétation de résultats d'Azumaya.

Dans tout ce paragraphe, nous supposerons l'anneau A local hensélien. Ce sera le cas d'un anneau local noethérien complet mais, aussi, par exemple, de l'anneau $C\{\{X_1, \ldots, X_n\}\}$ des séries convergentes en $X_1, \ldots, X_n$, à coefficients complexes. Le mot « algèbre » aura le sens que lui donne Azumaya : en tant que module, c'est un module de type fini.

Proposition 4 *(Azumaya). — Si* A *est hensélien et si* R *est une algèbre sur* A, *alors* $R = M_{m_1}(C_1) \oplus \cdots \oplus M_{m_p}(C_p) \oplus N$ *où chacun des* C_i *est complètement primaire et où* N *est un sous-groupe du radical de Jacobson* r.

Nous ne démontrerons pas, en détail, cette proposition (1) : la technique est de relever les idempotents, puis les bases canoniques de sous-algèbres de matrices de R/r en idempotents et bases canoniques d'algèbres de matrices de R. Le relèvement ne peut se faire en idempotents centraux en général, ce qui introduit le sous-groupe N de r, sur lequel nous n'avons, d'ailleurs, que peu de contrôle. Nous voyons qu'il y a équivalence entre :

1) *On peut relever les idempotents correspondant aux parties simples de* R/r *en des idempotents centraux de* E.

et

2) R *est une somme directe d'algèbres complètes de matrices sur des anneaux complétement primaires.*

En effet, si $R = e_1Re_1 \oplus \cdots \oplus e_nRe_n$ où les e_i sont des idempotents correspondant aux parties simples de R/r, l'élément x de R s'écrit $x = e_1xe_1 + \cdots + e_nxe_n$ et il en résulte que $xe_i = e_ix$ Si, réciproquement, les e_i sont centraux, on peut écrire

$$x = e_1x + \cdots + e_nx_n, \quad \text{puis} \quad x = e_1xe_1 + \cdots + e_nxe_n.$$

Les conditions ci-dessus seront réalisées dans les deux cas suivants :

3) R *est commutative.*

4) $r = mR$ *(non ramification).*

On peut, en effet, écrire alors $R = (e_1Re_1 + \cdots + e_nRe_n) \oplus mR$ et il suffit d'appliquer le lemme de Nakayama.

Interprétons dans notre cas particulier la condition 1 :

E est un A-module de type fini et nous prenons $R = \mathfrak{L}(E)$, ce qui est licite si A est noethérien. Notons, alors, p_i un idempotent pour éviter une confusion possible. Quel que soit $u \in \mathfrak{L}(E)$, $up_i = p_iu$ implique $u(E_i) = p_i(u(E)) \subset E_i$ si $E_i = p_i(E)$. Ce sous-module E_i est, donc, caractéristique et E est somme directe des E_i. On a, de plus, $\mathfrak{L}(E_i) = M_{n_i}(C_i)$ où C_i est complètement primaire, car $\mathfrak{L}(E) = \mathrm{Hom}_A(E_1, E) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Hom}_A(E_n, E)$ et, puisque E_i est caractéristique, $\mathrm{Hom}_A(E_i, E) = \mathfrak{L}(E_i)$. Or, $\mathrm{Hom}_A(E_i, E) = p_i\mathfrak{L}(E) = M_{n_i}(C_i)$.

Réciproquement, soit $E = \oplus E_i$ où les E_i sont caractéristiques et tels que $\mathfrak{L}(E_i) = M_{n_i}(C_i)$. Si p_i est le projecteur associé à E_i, E_i caractéristique implique : $up_i(E) \subset p_i(E)$ pour tout u de $L(E)$, soit $(1 - p_i)up_i(E) = 0$ et $up_i = p_iup_i$. Mais, on a de même $u(\Sigma_{j\neq i}p_j) = \Sigma_{j\neq i}(p_jup_j)$, soit $p_iu(\Sigma_{j\neq i}p_j) = 0$, Il en résulte que $p_iu = up_i$. Nous avons, donc, montré :

Corollaire. — *Soit* A *un anneau local noethérien hensélien et soit* E *un* A*-module de type fini. Une condition nécessaire pour que* $r = m\mathfrak{L}(E)$ *est que* E *soit somme directe de sous-modules caractéristiques* E_i *tels que* $\mathfrak{L}(E_i)$ *soit égal à* $M_{n_i}(C_i)$ *où* C_i *est complètement primaire. Une condition suffisante est que les* C_i *soient non ramifiés, c'est-à-dire d'idéal maximal* mC_i.

Voici un exemple simple : $A = k[[X_1, X_2]]$ et $E = k[[X_1]] \oplus k[[X_2]]$ d'où $\mathfrak{L}(E) = k[[X_1]] \oplus k[[X_2]]$. Si, en particulier, $\mathfrak{L}(E) = C_1 \oplus \cdots \oplus C_p$ où C_i est complètement primaires, nous voyons que $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$ où les E_i sont caractéristiques indécomposables. On vérifie, alors, sans difficulté (Bourbaki [5]

chap. 7, § 4, ex. 16) qu'il y a unicité de la décomposition de E en somme directe de sous-modules indécomposables.

Ceci constitue dans un cas très particulier une interprétation d'un théorème de Krull-Remak-Schmidt-Azumaya.

Tout ce qui précède est très imprécis. Les problèmes suivants se posent naturellement :

1) Quels anneaux complètement primaires apparaissent dans la décomposition des $\mathfrak{L}(E)$; ce sont évidemment des A-modules de type fini si A est noethérien.

2) Dans le cas $A = Z/p^n$ où Z est l'anneau des entiers et p un nombre premier, Shiffman, Baer et Kaplansky ont montré que si E et F sont des modules non nécessairement de type fini, un isomorphisme de $\mathfrak{L}(E)$ sur $\mathfrak{L}(F)$ provient d'un isomorphisme de E sur F. Quels résultats peut-on espérer pour A local quelconque E et F étant tous deux de type fini ? Nous verrons que le résultat ne peut être que bien plus faible, à propos des $\mathfrak{L}(E)$ commutatifs.

Si A est intègre, de corps des fractions K, $\mathfrak{L}(E) \simeq \mathfrak{L}(F)$ implique $\mathfrak{L}\left(E \otimes_A K\right) \simeq \mathfrak{L}\left(F \otimes_A K\right)$, soit $E \otimes_A K \simeq F \otimes_A K$. Un invariant est, donc, le rang du quotient du module par son sous-module de torsion.

3) Étant donnée une algèbre R à élément unité sur A, à quelle condition existe-t-il un A-module de type fini E tel que $R = \mathfrak{L}(E)$. Si A est intègre, de corps des fractions K, on doit avoir $R \otimes_A K = \mathfrak{L}(E) \otimes_A K$ et $R \otimes_A K$ doit être isomorphe à un $M_n(K)$.

Remarque. — K. Morita dans « Duality for Modules and its Applications to the Theory of Rings with minimum conditions ». Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku. Sec A, vol 16, n° 150, 1958, donne des résultats sur les problèmes 2) et 3) pour A anneau quasi-Frobeniusien.

CHAPITRE II

1. Suite exacte liée à un sous-module caractéristique.

PROPOSITION 1. — *Soit* A *un anneau commutatif à élément unité et soit* E *un* A-*module. Si* C *est un sous-module caractéristique de* E, $\mathrm{Hom}_A(E, C)$ *est un idéal bilatère de* $\mathfrak{L}(E)$.

En effet, C est un sous-module et il en résulte que $\mathrm{Hom}_A(E, C)$ est un idéal à droite car, si $u, v \in \mathrm{Hom}_A(E, C)$ et $w \in \mathfrak{L}(E)$, $(u + v)(E) \subset C$ et $uw(E) \subset u(E) \subset C$. Comme C est caractéristique, si $u \in \mathrm{Hom}_A(E, C)$ et $w \in \mathfrak{L}(E)$, $wu(E) \subset w(C) \subset C$. Donc, $\mathrm{Hom}_A(E, C)$ est aussi un idéal à gauche et, par suite, un idéal bilatère. Nous verrons ultérieurement que $\mathrm{Hom}_A(E, F)$ peut être un idéal bilatère sans que F soit caractéristique.

PROPOSITION 2. — *Avec les mêmes notations, la suite :*

$$(1) \quad O \to \mathrm{Hom}_A(E, C) \to \mathrm{Hom}_A(E, E) \to \mathrm{Hom}_A(E, E/C)$$

est exacte et l'image de $\mathrm{Hom}_A(E, E)$ *dans* $\mathrm{Hom}_A(E, E/C)$ *est un sous-anneau de* $\mathrm{Hom}_A(E/C, E/C)$.

Il est classique que la suite (1) est exacte. Soit $u : E \to E$. Puisque C est caractéristique, $u(C) \subset C$ et u induit un endomorphisme $u : E/C \to E/C$ comme suit : si $x = y$ modulo C, alors, $u(x) = u(y)$ modulo C et si ξ est la classe de x modulo C, nous poserons $\tilde{u}(\xi) =$ classe de $u(x)$ modulo C. L'application $u \to \tilde{u}$ ainsi définie est un homomorphisme de $\mathfrak{L}(E)$ dans $\mathfrak{L}(E/C)$ dont le noyau est, évidemment, l'ensemble des u tels que $u(x) \in C$ quel que soit $x \in E$, c'est-à-dire $\mathrm{Hom}_A(E, C)$.

Le plongement de $\mathrm{Hom}_A(E/C, E/C)$ dans $\mathrm{Hom}_A(E, E/C)$ résulte, d'ailleurs, du fait que la suite exacte $O \to C \to E \to E/C$ fournit la suite exacte

$$O \to \mathrm{Hom}_A(E/C, E/C) \to \mathrm{Hom}_A(E, E/C) \to \mathrm{Hom}_A(C, E/C).$$

En définitive, nous pouvons associer à tout sous-module caractéristique C la suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(E, C) \to \mathfrak{L}(E) \to \mathfrak{L}(E/C)$$

qui nous sera très utile dans tout ce travail.

Un cas important de sous-module caractéristique est celui où $C = IE$ si I est un idéal de A ; le fait que C soit caractéristique résulte de ce que x de C peut s'écrire au moins d'une manière $x = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ avec $a_i \in I$ et $x_i \in E$ et $u(x) = a_1u(x_1) + \cdots + a_nu(x_n)$ est bien dans C.

On a, plus généralement :

Proposition 3. — *Soit* A *un anneau commutatif et soient* E *et* F *deux* A*-modules. Si le sous-module caractéristique* C *de* F *est de la forme* IF *où* I *est un idéal de* A, $\mathrm{Hom}_A(E, F/C)$ *s'identifie canoniquement à* $\mathrm{Hom}_A(E/IE, F/IF)$ *et on a la suite exacte :*

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(E, IF) \to \mathrm{Hom}_A(E, F) \to \mathrm{Hom}_{A/I}(E/IE, F/IF) \to \mathrm{Ext}^1_A(E, IF) \to.$$

Si, en effet, $u \in \mathrm{Hom}_A(E, F/IF)$ et si $x \in IE$, un raisonnement analogue à celui fait ci-dessus montre que $u(x) \in I.F/IF = 0$. Le noyau de u contient, donc, IE et u induit un élément $\tilde{u}$ de $\mathrm{Hom}_A(E/IE, F/IF)$, d'où une application $i : u \to \tilde{u}$ de $\mathrm{Hom}_A(E, F/IF)$ dans $\mathrm{Hom}_A(E/IE, F/IF)$.

Réciproquement, à $\tilde{u}$ de $\mathrm{Hom}_A(E/IE, F/IF)$ faisons correspondre $j(u) = \tilde{u}\varphi$ où φ est l'homomorphisme canonique de E sur E/IE. Il est immédiat que ji (resp. ij) est l'application identique de $\mathrm{Hom}_A(E, F/IF)$ (resp. $\mathrm{Hom}_A(E/IE, F/IF)$). Donc, i est un isomorphisme de $\mathrm{Hom}_A(E, F/IF)$ et j son isomorphisme réciproque.

Un raisonnement analogue montre que $\mathrm{Hom}_A(E/IE, F/IF)$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{Hom}_{A/I}(E/IE, F/IF)$, d'où la suite exacte ci-dessus.

Remarque. — On pourrait pour l'étude de $\mathrm{Hom}_A(E, F)$ considérer des « couples caractéristiques », c'est-à-dire des couples (C, C′) formés du sous-module C de E et d'un sous-module C′ de F tels que $u(C) \subset C'$ pour tout $u \in \mathrm{Hom}_A(E, F)$. On a pour un tel couple, une suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(E, C') \to \mathrm{Hom}_A(E, F) \to \mathrm{Hom}_A(E/C, F/C').$$

Il n'est probablement pas vrai, en général, si C est un sous-module caractéristique que $\mathrm{Hom}_A(E, E/C)$ soit isomorphe à $\mathrm{Hom}_A(E/C, E/C)$. C'est vrai si C est projectif car $u : E \to E/C$ se factorise en $\varphi\nu$ où φ est l'application canonique $E \to E/C$ et $\nu \in \mathfrak{L}(E)$ et on en déduit $u(C) = \varphi[\nu(C)] \subset \varphi(C) = 0$ et le noyau de u contient C. La démonstration s'achève, alors, sans difficulté.

Nous voyons, d'après ce qui précède, que si A est un anneau local d'idéal maximal m, le quotient $\mathfrak{L}(E)/\mathrm{Hom}_A(E, m^iE)$ se plonge dans $\mathfrak{L}(E/m^iE)$. En particulier le premier terme $\mathrm{Hom}_A(E, mE)$ de la filtration décroissante $(\mathrm{Hom}_A(E, m^iE))$ fournit une première approximation de $\mathfrak{L}(E)$ par une sous-algèbre de $\mathfrak{L}(E/mE)$ où E/mE est muni de sa structure d'espace vectoriel sur le corps A/m. Tout le reste de ce chapitre sera consacré à l'étude de cette approximation.

Supposons que A soit local noethérien de complétion $\hat{A}$. Alors, les propriétés de platitude montrent que $\mathfrak{L}(E)/\mathrm{Hom}_A(E, m^iE)$ s'identifie à $\mathfrak{L}(\hat{E})/\mathrm{Hom}_{\hat{A}}(\hat{E}, \hat{m}^i\hat{E})$, ces deux quotients se plongeant dans $\mathfrak{L}(E)/m^iE$. D'autre part, en vertu des théorèmes de Cohen, un anneau local complet est quotient d'un anneau local régulier complet B de même corps des restes et nous voyons que si l'on munit $\hat{E}$ d'une structure naturelle de B-module E_B, $\mathfrak{L}(E_B)/\mathrm{Hom}_B(E_B, mE_B)$ s'identifie canoniquement à $\mathfrak{L}(E)/\mathrm{Hom}_A(E, mE)$. Ceci nous donne une limitation des résultats que l'on pourrait espérer obtenir au moyen de l'approximation que nous avons en vue. D'éventuels contre-exemples liés à une structure pathologique de l'anneau A ne sauraient être donnés par ce procédé.

2. Surjectivité de $\mathrm{Hom}_A(E, F) \to \mathrm{Hom}_k(E/mE, F/mF)$.

Nous avons déjà vu des exemples simples montrant que l'homomorphisme $\mathfrak{L}(E) \to \mathfrak{L}(E)/mE)$ n'est pas surjectif en général. Il le sera, évidemment, si E est libre ou monogène, et, plus généralement, si E est A/a-libre où a est l'annulateur de E.

Considérons, plus généralement, la suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(E, mF) \to \mathrm{Hom}_A(E, F) \xrightarrow{\mathfrak{l}} \mathrm{Hom}_k(E/mE, F/mF) \to \mathrm{Ext}^1_A(E, mF) \to \cdots$$

où E et F sont deux modules de type fini. Nous supposons F fidèle et φ surjectif. Désignons par $\overline{x}_i (i = 1, ..., n)$ (resp. $(\overline{y}_j)$ $(j = 1, ..., p)$) une base de E/mE (resp. F/mF) sur k et par $\overline{u}_{ji}$ l'élément de $\mathrm{Hom}_k(E/mE, F/mF)$ défini par : $\overline{u}_{ji}(\overline{x}_i) = \overline{y}_j$ et $\overline{u}_{ji}(\overline{x}_k) = 0$ si $k \neq i$. La surjectivité de φ assure l'existence de u_{ji} dans $\mathrm{Hom}_A(E, F)$ tel que :

$$u_{ji}(x_i) = y_j \text{ modulo } mF (i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, p)$$

$u_{ji}(x_k) \in mF$ si $k \neq i$, où x_i (resp. y_j) est un représentant de $\overline{x}_i$ (resp. $\overline{y}_j$) dans E (resp. F).

Donnons nous une relation $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ à coefficients a_i dans A. On en déduit $u_{ji}(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n) = 0$, soit $a_iy_j \in (a_1, ..., a_n) mF$, puis $a_iF \subset (a_1, ..., a_n) mF$ et, finalement, $(a_1, ..., a_n)F \subset m(a_1, ..., a_n)F$. Le lemme de Nakayama appliqué au module $(a_1, ..., a_n)F$ montre, alors, que $(a_1, ..., a_n) F = 0$ et, puisque F a été supposé fidèle, $a_i = 0$ $(i = 1, ..., n)$. Il en résulte que $(x_1, ..., x_n)$ qui, à priori, est un système minimal de générateurs de E sur A est une base. Donc, E est libre.

Remarquons que $\mathrm{Ext}^1_A(E, mF) = 0$ implique la surjectivité de φ et que la réciproque est évidente. D'où

Théorème. — *Soient* A *un anneau local d'idéal maximal* m *et de corps des restes* k, E *un* A-*module de type fini*, F *un* A-*module de type fini fidèle. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) E *est* A-*libre.*

2) $\mathrm{Ext}^1_A(E, mF) = 0$.

3) *L'application canonique de* $\mathrm{Hom}_A(E, F)$ *dans* $\mathrm{Hom}_k(E/mE, F/mF)$ *est surjective.*

Remarquons que nous n'avons pas eu besoin de supposer A noethérien.

Le corollaire qui suit nous sera utile ultérieurement.

Corollaire 1. — *Sous les mêmes hypothèses pour* A, *il y a équivalence pour un* A-*module de type fini* E *entre :*

1) E *est* A-*libre.*

2) $\mathrm{Ext}^1_A(E, m) = 0$.

3) *L'application canonique du dual* E^* *de* E *dans le dual* $(E/mE)^*$ *du* k-*espace vectoriel* E/mE *est surjective.*

Si F n'est plus supposé fidèle et admet a pour annulateur, $\mathrm{Hom}_A(E, F)$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{Hom}_{A/a}(E/aE, F/aF)$ et on obtient.

Corollaire 2. — *Sous les mêmes hypothèses pour l'anneau* A *et pour le module* E, *si* F *est un* A-*module de type fini d'annulateur* a *il y a équivalence entre :*

1) E/aE *est* A/a-*libre.*

2) *L'homomorphisme canonique de* $\mathrm{Hom}_A(E, F)$ *dans* $\mathrm{Hom}_k(E/mE, F/mF)$ *est surjectif. Ces deux assertions équivalentes sont impliquées par* $\mathrm{Ext}^1_A(E, mF) = 0$.

Il est, d'ailleurs, facile de montrer que $\mathrm{Ext}^1_{A/a}(E/aE, mF/aF)$ se plonge dans $\mathrm{Ext}^1_A(E, mF)$.

Nous obtenons comme cas particulier :

Corollaire 3. — *Il y a équivalence pour un* A-*module de type fini* E *entre :*

1) E *est* A/a-*libre.*

2) *L'homomorphisme canonique de* $\mathfrak{L}(E)$ *dans* $\mathfrak{L}(E/mE)$ *est surjectif.*

Il est, enfin, possible de donner une forme un peu plus générale au théorème. Supposons que A soit un anneau semi-local noethérien d'idéaux maximaux $m_1, \ldots, m_p$ et de radical de Jacobson r. En localisant par rapport à m_i, nous voyons que la surjectivité de $\mathrm{Hom}_A(E, F) \to \mathrm{Hom}_{A/r}(E/rE, F/rF)$ implique celle de $\mathrm{Hom}_{A_{m_i}}(E_{m_i}, F_{m_i}) \to \mathrm{Hom}_{A/m_i}(E_{m_i}/m_iE_{m_i}, F_{m_i}/m_iF_{m_i})$. Si F a été supposé fidèle, le A_{m_i}-module F_{m_i} est aussi fidèle. La surjectivité en question montre, donc, que E_{m_i} est A_{m_i}-libre pour $i = 1, \ldots, p$. Il est classique que ceci implique que E est projectif. D'où

Corollaire 4. — *Soit* A *un anneau semi-local noethérien de radical de Jacobson* r, *soient* E *un* A-*module de type fini et* F *un* A-*module de type fini fidèle. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1) E *est un* A-*module projectif.*

2) $\mathrm{Ext}^1_A(E, rF) = 0$.

3) *L'homomorphisme canonique*

$$\mathrm{Hom}_A(E, F) \to \mathrm{Hom}_{A/r}(E/rE, F/rF)$$

est surjectif.

Remarquons que nous avons du supposer A noethérien pour pouvoir appliquer le théorème de platitude

$$(\mathrm{Hom}_A(E, F))_{m_i} = \mathrm{Hom}_{A_{m_i}}(E_{m_i}, F_{m_i}).$$

Rappelons, d'autre part, que si le spectre premier de A est connexe [1], il y a équivalence entre E est projectif et E est libre.

Il n'est pas vrai si A n'est pas semi-local de radical de Jacobson r que $rA_m = mA_m$ si m est un idéal maximal comme le montre l'exemple A = Z, anneau des entiers.

On peut se demander ce qu'implique la nullité de certains des termes suivants de la suite des Ext :

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^1_A(E, mF) \to \mathrm{Ext}^1_A(E, F) \to \mathrm{Ext}^1_A(E, E/mF).$$

La nullité de $\mathrm{Ext}^1_A(E, F/mF)$ implique la liberté de F : en effet, si $O \to R \xrightarrow{i} L \to E \to O$ est le premier terme d'une résolution minimale de E, $\mathrm{Ext}^1_A(E, F/mF)$ est isomorphe à $\mathrm{Hom}_k(E/mE, F/mF)$ d'après la suite exacte :

$$O \to \mathrm{Hom}_k(E/mE, F/mF) \to \mathrm{Hom}_k(L/mL, F/mF)$$
$$\to \mathrm{Hom}_k(R/mR, F/mF) \to \mathrm{Ext}^1_A(E, F/mF \to O.$$

Et $\mathrm{Ext}^1_A(E, F/mF) = 0$ implique, donc, $R = mR$ et $R = 0$, puisque L/mL est isomorphe à E/mE.

Nous ne savons pratiquement rien sur la condition $\mathrm{Ext}^1_A(E, F) = 0$. Avec les mêmes notations que précédemment, elle implique l'exactitude de la suite :

$$O \to \mathrm{Hom}_A(E, F) \to \mathrm{Hom}_A(L, E) \to \mathrm{Hom}_A(R, F) \to O.$$

Si $u \in \mathrm{Hom}_A(R, F)$, il existe $v \in \mathrm{Hom}_A(L, F)$ tel que $u = vi$, ce qui donne $u(R) = vi(L) \subset v(mL) \subset mF$. Donc,

$$\mathrm{Hom}_A(R, F) = \mathrm{Hom}_A(R, mF).$$

Si A est un anneau de valuation discrète ou plus généralement si E est de dimension homologique $\leqslant 1$, R est projectif, donc, $\mathrm{Hom}_A(R, mF) = m\,\mathrm{Hom}_A(R, F)$ et on en déduit $\mathrm{Hom}_A(R, F) = 0$ et $R = 0$. Donc, $dh(E) \leqslant 1$ et $\mathrm{Ext}^1_A(E, F) = 0$ sont équivalents à E est libre.

[1] Jean Pierre Serre. Modules projectifs et espaces fibrés à fibre vectorielle. *Séminaire*. P. Dubreil. M. M. Dubreil-Jacotin et C. Pisot. Année 1957-1958.

Remarque. — Le problème reste ouvert de savoir ce qu'implique la sujectivité de $\mathrm{Hom}_A(E, F) \to \mathrm{Hom}_{A/a}(E/aE, F/aF)$ si a est un idéal quelconque de A. Si a est une intersection d'idéaux premiers $p_i (i = 1, \ldots, q)$ la méthode déjà employée montre que si F est fidèle et A noethérien, E_{p_i} est A_{p_i}-libre pour $i = 1, \ldots, q$. Un problème plus général est celui de la surjectivité de $\mathfrak{L}(E) \to \mathfrak{L}(E/C)$ si C est un sous-module caractéristique de E et le problème analogue pour $\mathrm{Hom}_A(E, F)$. Nous obtiendrons, néanmoins, quelques précisions dans le cas où C est un sous-module caractéristique maximal.

3. Toute algèbre à élément unité de dimension finie sur un corps k peut être obtenue comme image d'un anneau $\mathfrak{L}(E)$.

1. Ce paragraphe est essentiellement destiné à montrer qu'une représentation fidèle d'une algèbre à élément unité de dimension finie sur un corps k peut, au moins d'une manière être obtenue par réduction d'un anneau $\mathfrak{L}(E)$ de A-endomorphismes d'un module de type fini E convenable sur un anneau local A de corps des restes k.

Nous allons nous placer pour les préliminaires dans une situation plus générale. Nous désignerons par B un anneau commutatif à élément unité et par H une algèbre à élément unité sur B. Nous identifions B à un sous-anneau de H. L'application $x \to u_x$ de H dans $\mathfrak{L}(H)$ définie par $u_x(y) = xy$ est un homomorphisme de B-algèbres. Elle est injective car de $u_x = u_{x'}$ on déduit $u_x(1) = x = u_{x'}(1) = x'$. C'est donc un isomorphisme d'algèbres de H dans $\mathfrak{L}(H)$. L'image G(H) de H dans $\mathfrak{L}(H)$ est donc isomorphe à H et nous l'appellerons la *représentation régulière gauche de* H.

On définirait de manière analogue, à partir de l'anti-isomorphisme de B-algèbres de H dans $\mathfrak{L}(H)$ défini par $x \to v_x$ où $v_x(y) = yx$ pour y dans H, la *représentation régulière droite* D(H) de H, qui est en fait une anti-représentation. La vérification du fait que le commutant de G(H) (resp. D(H)) dans $\mathfrak{L}(H)$ est D(H) (resp. G(H)) se fait comme dans le cas classique : si u de $\mathfrak{L}(H)$ est tel que $u_x u = u u_x$ pour tout x de H, $u_x u(y) = u u_x(y)$

s'écrit $xu(y) = u(xy)$ et en prenant $y = 1$, $u(x) = xu(1)$, soit $u = \varphi_{u(1)}$. Le bicommutant de G(H) (resp. D(H)) dans $\mathfrak{L}$(H) est donc G(H) (resp. D(H)).

Voici une généralisation de ce résultat. C'est essentiellement sous une forme plus générale et plus naturelle l'exposé d'une technique matricielle de Brauer-Nesbitt [15]. Nous nous limiterons au cas d'une représentation.

Nous nous donnons donc une représentation fidèle de H dans $\mathfrak{L}$(V) où V est un B-module, c'est-à-dire un homomorphisme injectif i de B-algèbres de H dans $\mathfrak{L}$(V) tel que $i\,(1) = 1$ où 1 désigne dans le membre de droite l'application identique de V.

Soit W le B-module des applications B-linéaires : $\varphi : \mathrm{H} \to \mathrm{V}$ telles que $i(x)\varphi = \varphi u_x$ pour tout x de H. Si φ appartient à W, nous avons $i(x)\varphi(y) = \varphi(xy)$ pour tout couple x, y d'éléments de H et, en prenant $y = 1$, $\varphi(x) = i(x)\,(\varphi(1))$. Réciproquement soit z dans V et posons $\varphi_z(x) = i(x)(z)$ pour x dans H. Il est clair que φ_z est B-linéaire; d'autre part, φ_z appartient à W car $i(x)\varphi_z(y) = i(x)(i(y)(z)) = i(x)i(y)(z) = i(xy)(z)$ et

$$\varphi_z u_x(y) = \varphi_z(xy) = i(xy)(z)$$

et, par comparaison, $i(x)\varphi_z = \varphi_z u_x$ pour tout x de H.

L'application $z \to \varphi_z$ de V dans W est un isomorphisme de B-modules de V sur W; il suffit, en effet, de montrer qu'elle est injective et il en est bien ainsi, car de $\varphi_z = \varphi_{z'}$, on déduit $\varphi_z(1) = z = \varphi_{z'}(1) = z'$.

Réciproquement, donnons-nous u dans $\mathfrak{L}$(H) et u' dans $\mathfrak{L}$(V) tels que $u'\varphi_z = \varphi_z u$ pour tout z de V. On en déduit $u'\varphi_z(y) = \varphi_z u(y)$ pour tout y de H, c'est-à-dire :

$$u'i(y)(z) = i(u(y)(z))$$

et, en prenant $y = 1$, $u'(z) = i(u(1))(z)$, soit $u' = i(u(1))$ et u' est élément de i(H). Posons pour simplifier $u(1) = x$. Il vient $i(x)i(y)\,(z) = i(u(y))(z)$, soit $i(xy)(z) = i(u(y))(z)$ et $i(xy) = i(u(y))$ mais i a été supposé injectif et, par suite, $u(x) = xy$ et $u = u_x$.

Plaçons-nous dans la situation suivante : H est un B-module libre et V un B-module libre également. Soient $z_1, \ldots, z_m$ et $x_1, \ldots, x_n$ des bases respectives de V et H sur B. Par rapport à ces bases, l'application B-linéaire $\varphi_i = \varphi_{z_i}$ admet une matrice

P_i de représentation. Posons $A = B[[X_1, \ldots, X_m]]$ et

$$P = X_1P_1 + \cdots + X_mP_m = (C_{ji}),$$

matrice dont les coefficients sont des formes linéaires en $X_1, \ldots, X_m$ à coefficients dans B et d'autre part matrice à m lignes et n colonnes. Enfin, désignons par E le A-module défini comme quotient du A-module libre $V \otimes_B A$ par le sous-module $R = Ay_1 + \cdots + Ay_n$ où $y_i = \sum_{j=1}^m C_{ji}z_j$. Si a est l'idéal $(X_1, \ldots, X_m)$ de A, il est clair que E/aE s'identifie à V en tant que B-module.

Si $M(U)$ est la matrice d'un endomorphisme U de E, il existe une matrice carrée $M(U')$ d'ordre n à coefficients dans A telle que $M(U)P = PM(U')$. La matrice $M(u)$ obtenue en ne conservant que les parties constantes des coefficients de $M(U)$ définit l'endomorphisme induit u sur V et on a les relations : $M(u)P_i = P_iM(u')$ $(i = 1, \ldots, m)$, avec des notations évidentes, en raison de la forme même de P. La traduction matricielle des résultats précédents montre que u appartient à $i(H)$. Nous voyons, donc, que $Im(\mathfrak{L}(E) \to \mathfrak{L}(E/aE))$ est contenu dans $i(H)$.

L'inclusion en sens inverse est immédiate : on considére, en effet, les endomorphismes de E dont une matrice de représentation est à coefficients dans B ; la matrice $M(u')$ correspondante est aussi à coefficients dans B. Un tel endomorphisme est puisque $E/aE = V$, un élément de $i(H)$ et il définit bien un élément de $Im(\mathfrak{L}(E) \to \mathfrak{L}(E/aE))$. Le cas qui nous intéresse le plus est celui où B est un corps k, ce qui assure toutes les conditions imposées et nous obtenons :

Théorème 2. — *Soient* H *une algèbre à élément unité de dimension finie n sur un corps k et* $i(H)$ *une représentation fidèle de* H *dans* $\mathfrak{L}(V)$ *où* V *est un k-espace vectoriel de dimension finie m. Il existe un anneau local* A *de corps des restes k et un* A-*module de type fini* E *tel que :*

1) $E \otimes_A k$ *s'identifie à* V.

2) *Après identification,* $i(H) = Im(\mathfrak{L}(E) \to \mathfrak{L}(V))$.

Explicitons un peu en vue des exemples la représentation matricielle. Avec les notations ci-dessus, $v_j(x) = i(x)(z_j)$ et $v_j(x_k) = i(x_k)(z_j)$. La matrice de v_j par rapport aux bases choisies est donc obtenue par juxtaposition des j-èmes colonnes des matrices de représentation de $i(x_k)$ par rapport à la base z_j.

Exemple 1. — H est l'algèbre des matrices à coefficients dans le corps k de la forme $\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & b \end{vmatrix}$.

P_1 est alors $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ et P_2 est $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

D'où $P = \begin{vmatrix} X_1 & 0 & 0 \\ 0 & X_2 & X_1 \end{vmatrix}$ et H est obtenue, à partir de $A = k[[X_1, X_2]]$ et du module $E = Ae_1 + Ae_2 + Ae_3$ tel que $X_1e_1 = X_2e_2 = X_1e_3 = 0$.

Exemple 2. — H est l'algèbre des matrices à coefficients dans k de la forme :

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{vmatrix}.$$

La matrice P est alors $\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_1 & X_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_3 \end{vmatrix}$.

On prend $A = k[[X_1, X_2, X_3]]$ et $E = Ae_1 + Ae_2 + Ae_3$ avec $X_1e_1 = X_2e_1 = X_1e_2 = X_2e_2 = X_3e_3 = 0$.

Exemple 3. — H est l'algèbre *commutative* des matrices à coefficients dans k de la forme $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}$.

La représentation donnée est la représentation régulière et P est simplement la matrice générique de H. On prendra, donc, $A = k[[X_1, X_2, X_3]]$ et $E = Ae_1 + Ae_2 + Ae_3$ avec les relations $X_1e_1 = 0$; $X_2e_1 + X_1e_2 = 0$; $X_3e_1 + X_1e_3 = 0$.

REMARQUES. — Nous aurions pu prendre des polynômes au lieu de séries formelles sans changer le résultat.

Dans le cas général envisagé au début du paragraphe : B anneau, H algèbre sur B, V, B-module, la difficulté qui se présente pour démontrer un théorème analogue à celui que nous avons obtenu est de tenir compte des relations de V et H.

Soit A un anneau principal et soit H une algèbre à élément unité sur A, de type fini en tant que A-module. Si $H = L/R$ où L est un A-module libre de type fini, en utilisant la représentation régulière de H, on voit que H est isomorphe au

quotient d'un sous-anneau de $\mathfrak{L}(L)$. Or, ce sous-anneau est un A-module libre et on peut lui appliquer ce qui précède. Il existe donc un anneau B, un B-module de type fini E et un idéal I de l'anneau $\mathfrak{L}(E)$ tel que $H = \mathfrak{L}(E)/I$.

4. Cas d'un module de type fini somme directe de modules monogènes.

On suppose que E est somme directe de sous-modules monogènes, $E = \sum_{i=1}^{n} Ae_i$; notons a_i l'annulateur de Ae_i, de sorte que $Ae_i = A/a_i$.

Les formules $v_{ji}(e_i) = \lambda e_j$ et $v_{ji}(e_k) = 0$ si $k \neq i$ définiront, effectivement, un endomorphisme de E si et seulement si $v_{ji}(a_i e_i) = 0$; cette condition se traduit par $\lambda a_i e_j = 0$, c'est-à-dire $\lambda a_i \subseteq a_j$ et, finalement, $\lambda \in (a_j : a_i)$.

Un endomorphisme u de E est combinaison linéaire à coefficients dans A de tels endomorphismes : en effet, si $u(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j$, nous poserons $v_{ji}(e_i) = a_{ji} e_j$ et $v_{ji}(e_k) = 0$ si $k \neq i$. Le fait que u soit un endomorphisme implique $\sum_{j=1}^{n} a_{ji} a_i e_j = 0$, soit $a_{ji} a_i \subset a_j (j = 1, \ldots, n)$ et nous déduisons que v_{ji} est bien un endomorphisme de E.

Il résulte de ce qui précède que $v_{ji}(e_i)$ appartient à $(a_j : a_i)/a_j$. Nous avons alors deux possibilités :

1) $(a_j : a_i)/a_j$ n'est pas A/a_j, c'est-à-dire a_i n'est pas contenu dans a_j. Alors $v_{ji}(e_i)$ appartient forcément à mE.

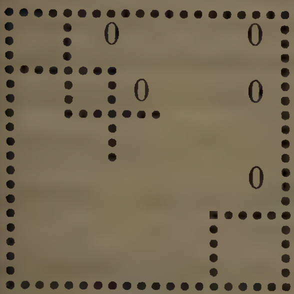
2) a_i est contenu dans a_j et on peut prendre pour $v_{ji}(e_i)$ n'importe quel élément de A/a_j.

Proposition 4. — *Soient* E *un* A-*module somme directe de modules monogènes,* $E = \sum_{i=1}^{n} Ae_i$ *et* a_i *l'annulateur de* Ae_i. *Soit* $(\bar{e}_i)$ *la base correspondante de* E/mE. *Par rapport à cette base, les matrices des éléments de* $\mathrm{Im}(\mathfrak{L}(E) \to \mathfrak{L}(E/mE))$ *ne sont autres que les matrices* (a_{ij}) *telles que* $a_{ij} = 0$ *toutes les fois que* $a_i \not\subset a_j$.

Soit I l'ensemble des indices $(1, \ldots, n)$. Si on écrit $i < j$ chaque fois que $a_i \subset a_j$, on obtient une relation de *préordre* sur I et l'ensemble des couples (i, j) tels que $a_{ij} \neq 0$ n'est autre que le *graphe* de cette relation de préordre.

Cas où A *est un anneau de valuation discrète :* la relation

de préordre devient alors totale. On en déduit, en prenant les a_i dans l'ordre croissant qu'une algèbre qui peut être obtenue à partir d'un module de type fini sur A admet une représentation de la forme ci-contre; où les blocs diagonaux contiennent des éléments arbitraires de k et représentent la partie semi-simple, les blocs inférieurs formés eux aussi d'éléments arbitraires forment le radical; les autres coefficients sont nuls. La réciproque est immédiate.



Nous allons démontrer la réciproque du résultat plus général obtenu ci-dessus. Plus précisément, soit G le graphe d'une relation de préordre sur I $= (1, \ldots, n)$. Nous allons montrer qu'il existe un anneau local A et un A-module E somme directe de n modules monogènes, tels que, par rapport à une base convenable, les matrices des éléments de $\mathrm{Im}(\mathfrak{L}(\mathrm{E}) \to \mathfrak{L}(\mathrm{E}/m\mathrm{E}))$ ne soient autres que les matrices (a_{ij}) telles que $a_{ij} = 0$ pour $(i, j) \notin \mathrm{G}$.

Pour cela notons I′ l'ensemble ordonné associé à l'ensemble préordonné I. Il nous suffira de montrer :

Lemme. — *Soit* A *un anneau local (noethérien) de dimension supérieure ou égale à* 2 *et soit* I′ *un ensemble ordonné fini. Il existe une famille* $(a_i)_{i \in \mathrm{I}'}$ *d'idéaux de* A *deux à deux distincts telle que* $i \to a_i$ *soit un isomorphisme d'ensembles ordonnés.*

Montrons d'abord que si A est un anneau noethérien de dimension supérieure ou égale à 2, A admet une infinité d'idéaux premiers de hauteur 1, donc sans relation d'inclusion. Soit, en effet, q un idéal premier de hauteur 2 et supposons qu'il ne contienne qu'un nombre fini $p_1, \ldots, p_n$ d'idéaux premiers de hauteur 1. Il en résulte que $q = p_1 \cup \cdots \cup p_n$.

En effet, s'il n'en était pas ainsi soit $a \in q - p_1 \cup \cdots \cup p_n$; nous savons que a n'est pas diviseur de 0 car il devrait appartenir à $p_1 \cup \cdots \cup p_n$. Le Hauptidealsatz nous montre, alors, qu'un idéal premier minimal de (a) est de hauteur 1 : or, il est nécessairement contenu dans q et ce ne pourrait être qu'un des p_i, d'où contradiction. Nous sommes donc certains que $q = p_1 \cup \cdots \cup p_n$ mais ceci implique que q est l'un des p_i et ceci est impossible. En résumé, nous savons que si A est un

anneau local noethérien de dimension au moins 2, il existe une suite infinie $(p_1, \ldots, p_n, \ldots)$ d'idéaux premiers de hauteur 1.

Désignons par S l'ensemble des suites $s = (s(i))_{i \in \mathbf{N}}$ d'entiers naturels telles que $s(i) = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices i et munissons S de la relation d'ordre produit $s \leqslant s'$ si et seulement si $s(i) \leqslant s'(i)$ pour tout i. L'application de S dans l'ensemble J des idéaux de A intersections finies de puissances symboliques des p_i définie par $s \rightarrow a_s = \bigcap_{\mathrm{I}} p_i^{(s(i))}$ est, évidemment, une application décroissante. Montrons que c'est un anti-isomorphisme de structures ordonnées :

En effet, si $a_s \subset a_{s'}$, en localisant en p_i, nous obtenons $a_s \mathrm{A}_{p_i} \subset a_{s'} \mathrm{A}_{p_i}$, c'est-à-dire $p_i^{s(\mathrm{A})} \mathrm{A}_{p_i} \subset p_i^{s'(i)} \mathrm{A}_{p_i}$, donc $s(i) > s'(i)$ et $s > s'$.

Nous voulons, en fait, montrer qu'étant donné un ensemble G fini à n éléments toute relation d'ordre sur cet ensemble peut être réalisée avec n idéaux de J muni de la relation d'inclusion. Il nous suffira, d'après ce qui précède, de montrer que la relation d'ordre opposée sur G peut être réalisée avec un sous-ensemble convenable de S. Ceci va résulter du fait que pour tout ordre Υ sur G, le graphe de Υ est l'intersection des graphes des ordres totaux moins fins que Υ et que le graphe de l'ordre produit s'identifie à l'intersection des graphes des ordres des facteurs. (Nous renvoyons à Bourbaki, Livre I, *Théorie des ensembles*, chap. III, § 2, ex. 1).

On sait donc que G muni de la relation d'ordre opposée à la relation d'ordre de départ s'identifie à un sous-ensemble du produit G^n où chaque facteur G est muni d'une relation d'ordre total moins fin que l'ordre considéré sur G. Il est alors immédiat que cet ordre pourra être réalisé au moyen d'un sous-ensemble de S.

Voici des exemples d'algèbres du type précédent en dimension 3 :

$$\begin{vmatrix} z_1 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & z_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} z_1 & 0 & 0 \\ z_2 & z_3 & 0 \\ z_4 & z_5 & z_6 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} z_1 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 \\ z_3 & z_4 & z_5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & 0 \\ z_3 & z_4 & 0 \\ z_5 & z_6 & z_7 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} z_1 & 0 & 0 \\ z_2 & z_3 & z_4 \\ z_5 & z_6 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} z_1 & 0 & 0 \\ z_2 & z_3 & 0 \\ 0 & 0 & z_4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_4 & z_5 & z_6 \\ z_7 & z_8 & z_9 \end{vmatrix}$$

Remarque. — Une condition nécessaire et suffisante pour que le procédé donne comme $\mathrm{I}m(\mathrm{L}(\mathrm{E}) \to \mathrm{L}(\mathrm{E}/m\mathrm{E}))$ une algèbre semi-simple si $\mathrm{E} = \mathrm{A}/a_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{A}/a_n$ est qu'il n'y ait pas de relation d'inclusion entre les a_i. Il en est de même pour que cette algèbre soit commutative :

En effet, s'il n'en est pas ainsi, si l'on prend les matrices :

$$\mathrm{M} = \begin{vmatrix} \ddots & & & \\ & a_{ii} & & \\ & & \ddots & \\ & a_{ij} & a_{jj} & \\ & & & \ddots \end{vmatrix}$$

les coefficients non explicités étant 0, et M′ analogue avec des a' de telle sorte que $a_{ii}a'_{ji} + a_{ji}a'_{jj}$ soit différent de $a'_{ii}a_{ji} + a'_{ii}a_{jj}$, ce qui sera toujours possible, nous voyons que $\mathrm{MM}' \neq \mathrm{M}'\mathrm{M}$, car les expressions ci-dessus sont les coefficients b_{ji} et b'_{ji} de MM′ et M′M.

5. Quelques résultats sur l'homomorphisme $\mathfrak{L}(\mathrm{E}) \to \mathfrak{L}(\mathrm{E}/m^p\mathrm{E})$.

Il résulte d'un théorème d'isomorphisme que $\mathrm{E}/m^p\mathrm{E}/m.\mathrm{E}/m^p\mathrm{E}$ est isomorphe à $\mathrm{E}/m\mathrm{E}$ et, par conséquent, que si $e_1, \ldots, e_n$ est un système minimal de générateurs de E sur A, les classes $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n$ module $m^p\mathrm{E}$ fournissent un système minimal de générateurs de $\mathrm{E}/m^p\mathrm{E}$ sur A/p.

D'autre part, la définition même de l'endomorphisme $\tilde{u}$ de $\mathrm{E}/m^p\mathrm{E}$ induit par l'endomorphisme u de E montre que si (a_{ji}) est, par rapport aux e_i, une matrice de représentation de u, la matrice $(\tilde{a}_{ji})$ obtenue par réduction modulo m^p des coefficients de (a_{ji}) est une matrice de représentation de $\tilde{u}$, par rapport aux $\tilde{e}_i$.

Le premier terme $\mathrm{O} \to \mathrm{R} \to \mathrm{L} \to \mathrm{E} \to \mathrm{O}$ d'une résolution minimale pour E conduit à la suite exacte

$$\mathrm{O} \to (\mathrm{R} + m^p\mathrm{L})/m^p\mathrm{L} \to \mathrm{L}/m^p\mathrm{L} \to \mathrm{E}/m^p\mathrm{E} \to \mathrm{O}$$

qui est le premier terme d'une résolution minimale du A/m^p-module $\mathrm{E}/m^p\mathrm{E}$.

Les classes modulo $m^p\mathrm{L}$ de générateurs $f_i (i = 1, \ldots, m)$ de R forment un système $\tilde{f}_i$ de générateurs de $\mathrm{R} + m^p\mathrm{L}/m^p\mathrm{L}$; il

n'est pas exclus que f_i appartienne à $m^p\mathrm{L}$ et, par suite, donne O par passage au quotient. De toute façon, si la matrice P a la signification de chapitre I, § 1 corollaire de la proposition 1, la matrice $\tilde{\mathrm{P}}$ obtenue par réduction modulo m^p des coefficients de P aura un rôle analogue pour $\mathrm{E}/m^p\mathrm{E}$.

Si E est A/a-libre où a désigne l'annulateur de E, il est clair que l'application $\mathfrak{L}(\mathrm{E}) \to \mathfrak{L}(\mathrm{E}/m^p\mathrm{E})$ est surjective pour tout p supérieur ou égal à 1.

On aurait pu espérer, dans le cas général, que cet homomorphisme deviendrait surjectif pour p grand. L'exemple ci-dessous va nous montrer qu'il n'en est pas ainsi.

Prenons $\mathrm{A} = k[[\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2]]$ où k est un corps et

$$\mathrm{E} = \mathrm{A}/(\mathrm{X}_1) \oplus \mathrm{A}/(\mathrm{X}_2)^2.$$

Désignons par e_1 et e_2 les classes de 1 modulo (X_1) et $(\mathrm{X}_2)^2$ respectivement. Elles engendrent E et satisfont aux relations $\mathrm{X}_1 e_1 = 0$ et $\mathrm{X}_2^2 e_2 = 0$. Enfin, désignons par x_1 et x_2 les classes respectives de X_1 et X_2 modulo $m^p = (\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2)^p$ et par e'_1 et e'_2 les classes de e_1 et e_2 modulo $m^p\mathrm{E}$. Elles engendrent $\mathrm{E}/m^p\mathrm{E}$ sur A/m^p et satisfont aux relations $x_1 e'_1 = 0$ et $x_2^2 e'_2 = 0$. Les formules $u'(e'_2) = x_2^{p-1} e'_1$ et $u'(e'_1) = x_1^{p-1} e'_2$ définissent effectivement un endomorphisme de $\mathrm{E}/m^p\mathrm{E}$ car $u'(x_1 e'_1) = u'(x_2^2 e'_2) = 0$. S'il existait un représentant u de u' dans $\mathfrak{L}(\mathrm{E})$, il serait nécessairement de la forme :

$$\begin{aligned} u(e_2) &= (\mathrm{X}_2^{p-1} + g(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2))e_1 + g(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2)e_2, \\ u(e_1) &= h(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2)e_1 + (\mathrm{X}_1^{p-2} + k(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2))e_2, \end{aligned}$$

où f, g, h sont des séries formelles d'ordre au moins p et k une série formelle d'ordre au moins $p-1$. Or, il est clair que $u(\mathrm{X}_1 e_1) \neq 0$ par exemple et u n'est pas un A-endomorphisme de E.

Un calcul sans difficultés montre que $\mathrm{I}m(\mathfrak{L}(\mathrm{E}) \to \mathfrak{L}(\mathrm{E}/m\mathrm{E}))$ est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & c \end{vmatrix}$, tandis que $\mathrm{I}m(\mathfrak{L}(\mathrm{E}/m^p\mathrm{E}) \to \mathfrak{L}(\mathrm{E}/m\mathrm{E}))$ est isomorphe à k si p est supérieur ou égal à 2.

Cas d'un anneau de valuation discrète. — Il est clair que la validité du contre-exemple ci-dessus tient à des conditions de non divisibilité. Cette constatation est renforcée par :

Proposition 5. — *Soit* A *un anneau de valuation discrète, d'idéal maximal* (t) *et soit* E *un* A*-module de type fini. L'homomorphisme* $\mathfrak{L}(E) \to \mathfrak{L}(E/t^pE)$ *est surjectif pour* p *grand.*

Si $E = L \oplus A/t^{n_1} \oplus \cdots \oplus A/t^{n_r}$ où L est A-libre et où $n_1, \ldots, n$ est une suite décroissante d'entiers positifs, prenons p supérieur ou égal à n_1. Le A/t^p-module E/t^pE s'écrit alors

$$L/t^pL \oplus A/t^{n_1} \oplus \cdots \oplus A/t^{n_r}.$$

Or, nous avons vu qu'un endomorphisme quelconque de E s'obtenait comme combinaison linéaire d'endomorphismes de la forme $u(e_i) = a_{ji}e_j$; $u(e_k) = 0$ si $k \neq i$ où $e_1, \ldots, e_n$ est le système minimal de générateurs choisi et où $a_{ji} \in A$. Nous laissons dans ces conditions le soin de vérifier que tout endomorphisme de E/t^pE, nécessairement combinaison linéaire à coefficients dans A/t^p d'endomorphismes du type analogue à celui décrit ci-dessus, se laisse relever en un endomorphisme de E.

Remarque. — On a les trois diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{L}(E) \arrow[rr] \arrow[dr, "\theta_\infty"'] & & \mathfrak{L}(E/m^pE) \arrow[dl, "\theta_p"] \\ & \mathfrak{L}(E/mE) & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathfrak{L}(E/m^{p+1}E) \arrow[rr, "\psi_p"] \arrow[dr, "\theta_{p+1}"'] & & \mathfrak{L}(E/m^pE) \arrow[dl, "\theta_p"] \\ & \mathfrak{L}(E/mE) & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{L}(E/m^{p+1}E) \arrow[rr, "\psi_p"] \arrow[dr] & & \mathfrak{L}(E/m^pE) \arrow[dl, "\psi_{p-1}"] \\ & \mathfrak{L}(E/m^{p-1}E) & \end{tikzcd}$$

Désignons par S l'image de θ_∞ et S_p l'image de θ_p. Les inclusions suivantes sont immédiates :

$$S \subset \cdots \subset S_{p+1} \cdots \subset S_p \subset \cdots \subset S_1 = \mathfrak{L}(E/mE).$$

La suite (S_p) est évidemment stationnaire car les S_p sont des sous-espaces du k-espace vectoriel S_1 qui est de dimension finie. Le problème se pose donc de savoir quelle est la limite des S_p ou ce qui est équivalent leur intersection. Les remarques qui suivent n'apportent que peu de lumière sur cette question.

Si $\overline{u}$ appartient à $\cap S_p$, supposons que nous sachions relever $\overline{u}$ en u_p de $\mathfrak{L}(E/m^pE)$ de telle sorte que soit satisfaite la condition :

$$\text{(C)} \qquad u_p = \psi_p(u_{p+1}).$$

Montrons qu'il en résulte que $S = \bigcap S_p$. En effet, il est possible de supposer A complet car un passage éventuel au complété ne modifie ni S_p ni S. Or, nous savons (8) que les Hom commutent aux limites projectives et que, d'autre part, le complété $\hat{E}$ de E s'identifie à $\varprojlim (E/m^pE)$ Si (C) est satisfaite, l'élément $(u_1, \ldots, u_p, u_{p+1}, \ldots)$ est donc un élément de $\varprojlim (\mathfrak{L}(E/m^pE)) = \mathfrak{L}(\hat{E}) = \mathfrak{L}(E)$. Son image dans $\mathfrak{L}(E/mE)$ est bien $\overline{u}$ car l'élément $(\overline{u}, \overline{u}, \ldots, \overline{u}, \ldots)$ s'identifie à $\overline{u}$.

Réciproquement, une condition nécessaire pour que $S = \cap S_p$ est que (C) soit satisfaite. Nous n'avons pas résolu le problème de savoir si on peut toujours satisfaire à (C). Bien entendu, si ψ_p est surjectif pour p grand, (C) sera satisfaite de manière évidente mais l'exemple déjà donné dans ce paragraphe montrerait que l'on peut avoir $S = \bigcap S_p$ sans que ψ_p soit surjectif pour p grand.

CHAPITRE III

IDÉAUX DE L'ANNEAU $\mathfrak{L}(E)$.

1. Historique et formulaire :

L'étude des idéaux de l'anneau $\mathfrak{L}(E)$ a été faite dans le cas où A est un anneau local dont l'idéal maximal est engendré par un élément nilpotent, A n'étant pas nécessairement commutatif, par Shiffman [20] pour les idéaux bilatères puis par Baer [2] pour les idéaux à droite et à gauche. On peut, dans ce cas simple, donner, explicitement la structure des sous-modules caractéristiques. Dans le cas A local quelconque et E A-module de type fini ou non, on a un formulaire partiel analogue mais certaines des formules de Shiffman-Baer ne sont plus vraies, même si E est de type fini.

Nous allons nous borner à rappeler le formulaire de Shiffman-Baer pour les idéaux bilatères; le cas des idéaux à droite ou à gauche se traiterait de manière analogue et il suffirait, en fait, de supprimer « caractéristique » pour les modules et de rajouter « à droite » ou « à gauche » pour les idéaux. On peut attacher à un sous-module caractéristique C deux idéaux bilatères : $d(C) = \mathrm{Hom}_A(E, C)$ et $g(C)$ ensemble des $u \in \mathfrak{L}(E)$ dont le noyau contient C. Si C n'était pas caractéristique, $d(C)$ serait un idéal à droite et $g(C)$ un idéal à gauche.

A un idéal bilatère i, on peut associer deux sous-modules caractéristiques :

$$D(i) = \Sigma_{u \in i} u(E)$$

et

$$G(i) = (x \in E / u(x) = 0 \text{ pour tout } u \text{ de } i).$$

Les applications g, G (resp. d, D) définissent une correspon-

dance de Galois (resp. une correspondance de Galois inversée), ce qui entraîne les formules :

1*a*) $G(g(C)) \supset C$		$g(G(i)) \supset i$		
1*b*) $D(d(C)) \subset C$		$d(D(i)) \subset i$		
2*a*) $g(C_1) \supset g(C_2)$	et	$d(C_1) \subset d(C_2)$	si	$C_1 \subset C_2$
2*b*) $G(i) \supset G(j)$	et	$D(i) \subset D(j)$	si	$i \subset j$
3*a*) $g(G(g(C))) = g(C)$		$G(g(G(i))) = G(i)$		
3*b*) $d(D(d(G))) = d(C)$		$D(d(D(i))) = D(i)$		

auxquelles viennent s'ajouter

4) $j.i = 0$ est équivalent à $D(i) \subset G(j)$

5) $$g(C).d(C) = 0.$$

Shiffman déduisait de la validité de ces formules et de la formule :

6) $$d(D(C)) = C \qquad g(G(C)) = C$$

que nous montrerons inexacte dans le cas général, qu'il y avait identité entre idéaux de la forme $d(C)$ (resp. $g(C)$) et idéaux caractéristiques à droite (resp. à gauche) : un idéal d est dit caractéristique à droite (resp. à gauche) s'il existe un idéal a tel que d soit l'annulateur à droite de a (resp. l'annulateur à gauche).

Une partie du résultat de Shiffman se transpose littéralement et on peut montrer :

Proposition 1. — *Un idéal caractéristique à droite (resp. à gauche) est du type* $d(C)$ (*resp.* $g(C)$).

J'ignore si la réciproque est exacte dans notre cas, c'est-à-dire si un idéal $d(C)$ (resp. $g(C)$) est caractéristique à droite (resp. à gauche). Elle l'est dans le cas envisagé par Shiffman.

On peut évidemment mettre sur l'ensemble des sous-modules caractéristiques deux relations d'équivalence par $d(C) = d(C')$ et $g(C) = g(C')$ et leur étude se révélerait peut être fructueuse.

2. Quelques remarques sur les sous-modules caractéristiques.

Si C et C′ sont caractéristiques, il en est de même de $C + C'$ car, si $u \in L(E)$, $u(C + C') = u(C) + u(C') \subset C + C'$. En particulier, si C est caractéristique, il en est de même de $C + mE$

et il résulte du lemme de Nakayama que tout sous-module caractéristique maximal parmi les sous-modules caractéristiques distincts de E contient mE.

Proposition 2. — $\sum_{u \in \mathrm{Hom}_A(E, mE)} u(E) = mE$.

En effet, si (μ_j) $(j = 1, \ldots, p)$ est une base minimale de m sur A, un système de générateurs de mE sur A est constitué par les $\mu_j e_i$ $(j = 1, \ldots, p;\ i = 1, \ldots, n)$. Il suffit, donc, de montrer que $\mu_j e_i$ peut être obtenu dans le premier membre et c'est évident si on prend l'application $\mu_j . 1$ où 1 est l'application identique de E. Il est, d'ailleurs, clair que l'on a un résultat analogue si l'on remplace m par un idéal a quelconque de A.

Si C est un sous-module caractéristique maximal, il peut se faire que l'application canonique de $\mathfrak{L}(E)$ dans $\mathfrak{L}(E/C)$ soit surjective sans que E soit $A/Ann(E)$-libre.

Exemple. — $A = k[[X_1, X_2]]$ et $E \simeq \mathfrak{L}(E) = k[[X_1]] \oplus k[[X_2]]$. Un sous-module caractéristique maximal est, par exemple,

$$C = X_1 k[[X_1]] \oplus k[[X_2]] \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{L}(E/C) = k;$$

or,

$$\mathrm{Hom}_A(E, C) = X_1 k[[X_1]] \oplus k[[X_2]]$$

et donc,

$$\mathfrak{L}(E)/\mathrm{Hom}_A(E, C) = k.$$

Il n'en est pas toujours ainsi : on prend, par exemple, $A = R[[X_1, X_2]]$ où R est le corps des réels et E quotient du A-module libre $Ax_1 \oplus Ax_2$ par le sous-module engendré par

$$y_1 = X_1 x_1 + X_2 x_2 \qquad \text{et} \qquad y_2 = X_2 x_1 + X_1 x_2.$$

Alors, $\mathfrak{L}(E)/\mathrm{Hom}_A(E, mE)$ est isomorphe au corps C des complexes. Le seul sous-module caractéristique maximal est mE mais $\mathfrak{L}(E/mE)$ n'est pas isomorphe à C.

En fait, on a deux possibilités pour un sous-module maximal : il est fidèle ou il ne l'est pas. Dans ce cas, soient F ce module et a son annulateur; il est clair que $F = Ann(a)$, ensemble des $x \in E$ tels que $ax = 0$ si E est lui-même fidèle. Il en résulte que F est caractéristique et que E/F est simple, donc isomorphe au corps des restes k. D'autre part,

$$\mathrm{Hom}_A(E, F) \cap A \subset \mathrm{Hom}_A(E, mE) \cap A = m$$

et, donc, $\mathrm{Hom}_A(E, F) \cap A = m$ et on en déduit que A/m se plonge dans $\mathfrak{L}(E)/\mathrm{Hom}_A(E, F)$, et que ce quotient est $A/m = k$, d'où la surjectivité.

3. Idéaux bilatères maximaux de $\mathfrak{L}(E)$.

LEMME. — *Soit* R *un anneau, non nécessairement commutatif, à élément unité et soit* I *un idéal bilatère maximal de* R, *alors* I *contient le radical de Jacobson* r *de* R.

En effet, si I ne contenait pas r, puisque I est maximal et r bilatère, $I + r = R$: il existerait, donc, $a \in r$ et $b \in I$ tel que $b = 1 - a$ mais $1 - a$ est inversible et ceci impliquerait $I = R$.

Soit, alors, I un idéal bilatère maximal de $\mathfrak{L}(E)$ où E est un module de type fini sur A local. L'idéal I contient le radical de Jacobson r, donc, à fortiori, $\mathrm{Hom}_A(E, mE)$. Le A-module $\mathfrak{L}(E)$ est un A-module noethérien comme quotient d'un sous-anneau de $M_n(A)$ si nous faisons l'hypothèse A *noethérien*. Le A-module I est, donc, engendré par des éléments $u_1, \ldots, u_p$ en nombre fini et si $u \in I$, il s'écrit $a_1u_1 + \cdots + a_pu_p$ avec $a_i \in A$ $(i = 1, \ldots, p)$ et, par suite, $u(E)$ est contenu dans $u_1(E) + \cdots + u_p(E)$ en sorte que $D(I) = u_1(E) + \cdots + u_p(E)$. Nous poserons pour simplifier $D(I) = C$.

Soit φ l'application canonique de $\mathfrak{L}(E)$ dans

$$S = \mathfrak{L}(E)/\mathrm{Hom}_A(E, mE)$$

et soit $\varphi(I) = \bar{I}$: c'est un k-espace vectoriel engendré par les classes $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_p$ de $u_1, \ldots, u_p$ respectivement modulo $\mathrm{Hom}_A(E, mE)$. Posons, enfin, $\bar{C} = C/mE = \bar{u}_1(\bar{E}) + \cdots + \bar{u}_p(\bar{E})$ où $\bar{E}$ est E/mE. Si $v \in \mathrm{Hom}_A(E, C)$ et si $\bar{v} = \varphi(v)$, alors $\bar{v}(\bar{E})$ est contenu dans $\bar{C}$.

Considérons l'idéal à droite I' de $\mathfrak{L}(\bar{E})$ engendré par $\bar{I}$: il est, en tant qu'idéal engendré par $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_p$. Si donc $\bar{u} \in I'$, $\bar{u}$ peut s'écrire $\bar{u}_1\bar{w}_1 + \cdots + \bar{u}_p\bar{w}_p$ où $\bar{w}_i \in \mathfrak{L}(\bar{E})$ pour $i = 1, \ldots, p$. On en déduit que $\bar{u}(\bar{E}) \subset \bar{C}$. Un résultat classique sur les idéaux à droite de $\mathfrak{L}(\bar{E})$ montre que I' est l'ensemble des $\bar{v}$ de $\mathfrak{L}(\bar{E})$ tels que $\bar{v}(\bar{E}) \subset \bar{C}$. Donc $\bar{v}(\bar{E}) \subset \bar{C}$ implique que $\bar{v} \in I'$. En définitive, $v(E) \subset C$ implique $\bar{v} \in I' \cap S$.

$I' \cap S$ est un idéal à droite de S mais c'est également un

idéal à gauche car, si $\bar{v} \in I'$, $\bar{v}$ s'écrit $\bar{u}_1\bar{w}_1 + \cdots + \bar{u}_p\bar{w}_p$ avec les notations ci-dessus. Si $\bar{w} \in S$, $\bar{w}\bar{v} = \bar{w}_1\bar{w}\bar{u}_1, \cdots + \bar{w}\bar{u}_p\bar{w}_p$ mais, comme $\bar{w}\bar{u}_i \in I'(i = 1, \ldots, p)$, on voit que $\bar{w}\bar{v} \in I'$ donc $\bar{w}\bar{v} \in I' \cap S$.

Tout ce qui précède est évidemment valable si I est un idéal bilatère contenant $\mathrm{Hom}_A(E, mE)$. Nous voyons, donc,

Proposition 3. — *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un idéal bilatère* I *contenant* $\mathrm{Hom}_A(E, mE)$ *soit de la forme* $\mathrm{Hom}_A(E, C)$ *est que* $I' \cap S = \bar{I}$ *si* $\bar{I} = I/\mathrm{Hom}_A(E, mE)$ *et* $I' = \bar{I}\mathfrak{L}(\bar{E})$.

En effet, s'il en est ainsi $v(E) \subset C$ implique $\bar{v}(\bar{E}) \subset \bar{C}$ et ceci implique $\bar{v}$ dans $\bar{I}$, soit, puisque I contient $\mathrm{Hom}_A(E, mE)$, v dans I. Il en résulte l'inclusion $\mathrm{Hom}_A(E, C) \subset I$ mais l'inclusion en sens inverse est immédiate. La condition est, donc, suffisante et elle est évidemment nécessaire.

Corollaire. — *Si* S *est commutatif, tout idéal bilatère* I *contenant* $\mathrm{Hom}_A(E, mE)$ *est de la forme* $\mathrm{Hom}_A(E, C)$ *où* C *est caractéristique.*

Nous reportons la démonstration de ce corollaire au paragraphe 8.

Revenons au cas où I est un idéal bilatère maximal : $\mathfrak{L}(E)/I = S/\bar{I}$ est alors une algèbre simple et on a les seules possibilités :

1) $I' \cap S = \bar{I}$, soit $I = \mathrm{Hom}_A(E, C)$. Si C' est un sous-module caractéristique maximal contenant C et distinct de E, $\mathrm{Hom}_A(E, C)$ est contenu dans $\mathrm{Hom}_A(E, C')$ et donc $I = \mathrm{Hom}_A(E, C')$.

2) $I' \cap S = S$. Ceci implique $I' = \mathfrak{L}(\bar{E})$, soit $\bar{C} = \bar{E}$ et, par suite, $C = E$. Nous verrons ultérieurement que ceci est possible.

4. Réciproque.

Nous nous proposons de montrer, réciproquement, que si C est un sous-module caractéristique maximal, $\mathrm{Hom}_A(E, C)$ est un idéal bilatère maximal.

Soit $u \notin \mathrm{Hom}_A(E, C)$. Considérons l'idéal bilatère engendré par u dans $\mathfrak{L}(E)$, c'est-à-dire l'ensemble des sommes finies $x_1uy_1 + \cdots + x_puy_p$ où x_i, $y_i \in \mathfrak{L}(E)$. Il est évident que

$(x_1uy_1 + \cdots + x_puy_p)$ (E) est contenu dans $x_1u(\mathrm{E}) + \cdots + x_pu\mathrm{E}$. Considérons le sous-module $\Sigma_{x_i \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})} x_iu(\mathrm{E})$: il est caractéristique et non contenu dans C car $u(\mathrm{E})$ n'est pas contenu dans C. Il s'ensuit que

$$\mathrm{C} + \Sigma_{x_i \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})} x_iu(\mathrm{E}) = \mathrm{E}.$$

Nous passons au quotient par C pour les modules et par $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}, \mathrm{C})$ pour les idéaux : dans ces deux cas $\tilde{y}$ désignera la classe de y. Il vient si $\tilde{\mathrm{S}}$ est l'image de $\mathfrak{L}(\mathrm{E})$ dans $\mathfrak{L}(\mathrm{E}/\mathrm{C})$

$$\Sigma_{\tilde{x}_i \in \tilde{\mathrm{S}}} \tilde{x}_i\tilde{u}(\mathrm{E}) = \tilde{\mathrm{E}}$$

1) $\tilde{\mathrm{S}}$ *est semi-simple.* — Désignons par rad $(\tilde{\mathrm{S}})$ le radical de Jacobson de $\tilde{\mathrm{S}}$. L'anneau $\tilde{\mathrm{S}}$ est artinien. Soit donc p l'entier tel que rad $(\tilde{\mathrm{S}})^p = 0$ et rad $(\tilde{\mathrm{S}})^{p-1} \neq 0$. Si $\tilde{v}$ est un élément non nul de rad $(\tilde{\mathrm{S}})^{p-1}$ et si $\tilde{u}$ appartient à rad $(\tilde{\mathrm{S}})$, il résulte de ce que $\tilde{x}_i\tilde{u}$ appartient à rad $(\tilde{\mathrm{S}})$ que $\tilde{v}\tilde{x}_i\tilde{u}$ appartient à rad $(\tilde{\mathrm{S}})^p = 0$. Mais, alors, $\tilde{v}(\tilde{\mathrm{E}})$ est contenu dans $\tilde{v}(\Sigma_{\tilde{x}_i \in \tilde{\mathrm{S}}} \tilde{x}_i\tilde{u}(\tilde{\mathrm{E}}))$ et, a fortiori, dans $\Sigma_{\tilde{x}_i \in \tilde{\mathrm{S}}} \tilde{v}\tilde{x}_i\tilde{u}(\tilde{\mathrm{E}})$ qui est 0. Ceci contredit l'hypothèse faite sur $\tilde{v}$ et il s'ensuit que $p = 0$ et rad $(\tilde{\mathrm{S}}) = 0$. Puisque $\tilde{\mathrm{S}}$ est artinien, il est semi-simple.

2) $\tilde{\mathrm{S}}$ *est simple.* — Soit, en effet, $\tilde{u}$ un idempotent non nul dans le centre de $\tilde{\mathrm{S}}$. Alors,

$$(\tilde{1} - \tilde{u})(\tilde{\mathrm{E}}) = \Sigma_{\tilde{x}_i \in \tilde{\mathrm{S}}} \tilde{x}_i(\tilde{1} - \tilde{u})\tilde{u}(\tilde{\mathrm{E}}) = 0 \qquad \text{et} \qquad \tilde{u} = \tilde{1}.$$

En vertu de (6) (corollaire 1 de la proposition 12 du n° 5, § 5), le centre de $\tilde{\mathrm{S}}$ est un corps et $\tilde{\mathrm{S}}$ est simple. Puisque $\mathfrak{L}(\mathrm{E})/\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}, \mathrm{C}) = \tilde{\mathrm{S}}$ est simple, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}, \mathrm{C})$ est un idéal bilatère maximal et nous pouvons énoncer :

Théorème 1. — *Si* I *est un idéal bilatère maximal de* $\mathfrak{L}(\mathrm{E})$, *ou bien* I *est de la forme* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}, \mathrm{C})$ *où* C *est un sous-module qui peut être choisi caractéristique maximal ou bien le sous-module* $\mathrm{D}(\mathrm{I}) = \Sigma_{u \in \mathrm{I}} u(\mathrm{E})$ *est* E *tout entier.*

Réciproquement, si C *est un sous-module caractéristique maximal,* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}, \mathrm{C})$ *est un idéal bilatère maximal.*

On pourra remarquer l'analogie avec la structure des idéaux maximaux (à droite) d'un espace vectoriel de dimension infinie. Cette analogie est assez naturelle dans le cas où l'anneau local A contient un corps isomorphe à A/m.

5. Idéaux à droite maximaux.

Nous reviendrons ultérieurement sur les idéaux bilatères maximaux. En ce qui concerne les idéaux à droite maximaux, le § 3 se transpose littéralement, c'est-à-dire :

THÉORÈME 2. — *Si* I *est un idéal à droite maximal,* I *est ou bien de la forme* $\mathrm{Hom}_A(E, F)$ *où* F *peut être choisi maximal ou bien tel que* $\sum_{u\in I} u(E) = E$.

La réciproque n'est plus vraie; si F est un sous-module maximal $\mathrm{Hom}_A(E, F)$ n'est pas forcément un idéal à droite maximal. La raison en est facile à comprendre; admettons l'analogue du corollaire de la proposition 3 :
Si S *est commutatif, tout idéal à droite maximal est de la forme* $\mathrm{Hom}_A(E, F)$ *où* F *peut être choisi maximal,* forme qui résulte du fait qu'un idéal à droite contenant $\mathrm{Hom}_A(E, mE)$ est nécessairement bilatère.

Si la réciproque était vraie, on aurait si r désigne le radical de Jacobson de $\mathfrak{L}(E)$, $r = \bigcap \mathrm{Hom}_A(E, F)$ où F parcourt l'ensemble des sous-modules maximaux, soit

$$r = \mathrm{Hom}_A(E, \bigcap F) = \mathrm{Hom}_A(E, mE)$$

puisque F est le radical de E, c'est-à-dire mE ((6) § 6 ex. 29). Or, S commutatif n'implique pas S semi-simple :

Exemple : $A = k[[X_1, X_2, X_3]]$ où k est un corps et où X_1, X_2, X_3 sont des variables. On prend $E = Ae_1 + Ae_2 + Ae_3$ avec les relations $X_1e_1 = 0$; $X_2e_1 + X_1e_2 = 0$, $X_3e_3 = 0$.

$S = \mathrm{Im}\,\mathfrak{L}((E) \to \mathfrak{L}(\overline{E}))$ est l'ensemble des matrices de la forme :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

à coefficients dans k.

Considérons le sous-module $F = me_1 + Ae_2 + Ae_3$ où m est l'idéal (X_1, X_2, X_3). Il est clair que F est maximal et on voit, sans difficulté, que $F = Ae_2 + Ae_3$. Il n'est pas caractéristique car si $\overline{F}$ est F/mE, $\overline{F} = k\bar{x}_2 + k\bar{x}_3$ avec des notations

évidentes et si $\bar{u} \in S$, $\bar{u}(\bar{x}_2) = b\bar{x}_1 + a\bar{x}_2$ et $\bar{u}(\bar{x}_3) = c\bar{x}_1 + a\bar{x}_3$ et $\overline{F}$ n'est pas invariant par S.

$\mathrm{Hom}_A(E, mE) = \mathrm{Hom}_A(E, F)$. — En effet, $u \in \mathrm{Hom}_A(E, F)$ est équivalent à $\bar{u} \in \mathrm{Hom}_k(\overline{E}, \overline{F}) \cap S$. Or, $\mathrm{Hom}_k(\overline{E}, \overline{F})$ est l'ensemble des matrices de la forme :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

et on en déduit que $\mathrm{Hom}_k(\overline{E}, \overline{F}) \cap S = (0)$, c'est-à-dire $\mathrm{Hom}_A(E, F)$ contenu dans $\mathrm{Hom}_A(E, mE)$ et puisque l'inclusion en sens inverse résulte de ce que $mE \subset F$, $\mathrm{Hom}_A(E, F) = \mathrm{Hom}_A(E, mE)$.

Nous voyons donc :

1) *Un sous-module non caractéristique peut donner lieu à un idéal bilatère.*

2) *Un sous-module maximal ne donne pas forcément un idéal à droite maximal.*

Si on considère maintenant les deux sous-modules maximaux :

$$C_1 = Ae_1 + Ae_2 + me_3$$
$$C_2 = Ae_1 + me_2 + Ae_3$$

on vérifie comme ci-dessus qu'ils sont caractéristiques et donnent par suite deux idéaux bilatères maximaux $\mathrm{Hom}_A(E, C_1)$ et $\mathrm{Hom}_A(E, C_2)$. Comme S est local, on doit avoir

$$\mathrm{Hom}_A(E, C_1) = \mathrm{Hom}_A(E, C_2) = \mathrm{Hom}_A(E, C_1 \cap C_2)$$

où

$$C_1 \cap C_2 = Ae_1 + me_2 + me_3.$$

D'où

3) *Deux sous-modules caractéristiques distincts peuvent donner le même idéal bilatère.*

6. Idéaux à gauche maximaux.

Tout ce qui sera dit dans ce paragraphe sur les idéaux à gauche maximaux se transpose facilement aux idéaux bilatères maximaux.

Soit I un idéal à gauche maximal de $\mathfrak{L}(E)$. Désignons par $F = F(I)$ l'ensemble des x de E tels que $u(x) \in mE$ pour tout u de I. Si A est noethérien, le A-module I est engendré par $u_1, \ldots, u_p$ et $F = \bigcap F_i$ si F_i est l'ensemble des x de E tels que $u_i(x) \in mE$:

En effet, si $x \in \bigcap F_i$ et $u \in I$, on peut écrire $u = a_1u_1 + \cdots + a_pu_p$ avec a_i dans A et on en déduit

$$u(x) = a_1u_1(x) + \cdots + a_pu_p(x) \in mE \qquad \text{et} \qquad x \in F.$$

Soient $\bar{I} = I/\mathrm{Hom}_A(E, mE)$ et $\bar{F} = F/mE$ et désignons par $'I$ l'idéal à gauche engendré par $\bar{I}$ dans $\mathfrak{L}(\bar{E})$; il est immédiat que $'I$ est l'ensemble des $\bar{\varphi} \in \mathfrak{L}(\bar{E})$ tels que $\bar{\varphi}(\bar{F}) = 0$.

L'idéal $'I \cap S$ est un idéal à gauche de S et nous avons les deux possibilités :

1) $'I \cap S = S$: ceci implique $I' = \mathfrak{L}(\bar{E})$ puis $\bar{F} = 0$ et, finalement, $F = mE$.

2) $'I \cap S = \bar{I}$: l'appartenance de $\bar{u}$ à $\bar{I}$ est équivalente à la conjonction des deux conditions : $\bar{u}$ est dans S et $\bar{u}(\bar{F}) = 0$. On en déduit que u est dans I est équivalent à $u(F) \subset mE$.

THÉORÈME 2. — *Soit* I *un idéal à gauche maximal de* $\mathfrak{L}(E)$. *Soit* F *l'ensemble des x de* E *tels que $u(x)$ appartienne à* mE *pour tout u de* I. *Si* F *est distinct de* mE, I *est l'ensemble des u de* $\mathfrak{L}(E)$ *tels que* $u(F)$ *soit contenu dans* mE. *Dans ce cas,* I *est aussi l'ensemble des u de* $\mathfrak{L}(E)$ *tels que* $u(F')$ *soit contenu dans* mE *où* F' *est un sous-module qui peut être pris minimal parmi les sous-modules contenant* mE.

7. Quelques exemples montrant l'existence éventuelle d'idéaux bilatères présentant les anomalies rencontrées ci-dessus.

Prenons $A = k[[X]]$ et $E = k \oplus k[[X]]/(X^2) \oplus k[[X]]/(X^3)$. L'algèbre S est alors l'ensemble des matrices triangulaires :

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & 0 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{vmatrix}$$

à coefficients dans k.

Désignons par R l'anneau $\mathfrak{L}(\bar{E})$ et prenons I tel que son

image $\bar{\mathrm{I}}$ dans S soit l'idéal de S formé des matrices pour lesquelles $a_3 = 0$. Le quotient $\mathrm{S}/\bar{\mathrm{I}}$ est isomorphe à k et, par suite, I est maximal.

Considérons d'abord I comme idéal à droite et montrons que $\bar{\mathrm{I}}\mathrm{R} = \mathrm{R}$:

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 b_1 & a_2 b_1 & a_3 b_1 \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 & a_3 b_2 \\ a_1 b_3 & a_2 b_3 & a_2 b_3 \end{vmatrix}$$

Il suffit de choisir $b_1, \ldots, b'_3$ de telle sorte que

$$\det \begin{vmatrix} b_1 & b'_1 & b_1 \\ b_2 & b'_2 & b''_2 \\ b_3 & b'_3 & b''_3 \end{vmatrix}$$

soit différent de 0 pour qu'au moyen d'une somme de trois termes convenables du type (1) avec dans le premier les b_i, dans le second les b'_i et dans le troisième les b''_i, on puisse obtenir n'importe quel élément de R par résolution d'un système de Cramer.

Ceci montre que $\sum_{u \in \mathrm{I}} u(\mathrm{E}) = \mathrm{E}$.

Si nous considérons maintenant I comme un idéal à gauche, un procédé analogue (qui revient à faire la symétrie par rapport à la diagonale secondaire) montre que $\mathrm{R}\bar{\mathrm{I}} = \mathrm{R}$ et, par suite, que le sous-module F considéré dans le § 6 est $m\mathrm{E}$.

En compliquant très légèrement cet exemple et plus précisément en prenant des matrices triangulaires d'ordre 4, on verrait que deux idéaux maximaux distincts peuvent donner lieu à cette circonstance.

8. Il est, toutefois, deux cas simples dans lesquels cette circonstance est impossible :

a) *On suppose que* $\mathfrak{L}(\mathrm{E})$ *est complètement primaire.*

Il y a alors dans E au moins un sous-module caractéristique maximal et il fournit l'idéal bilatère maximal. Comme il n'y en a pas d'autre, le résultat annoncé est évident. Ce résultat pourrait être déduit directement du lemme de Nakayama.

b) *On suppose que* $\mathrm{S} = \mathfrak{L}(\mathrm{E})/\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}, m\mathrm{E})$ *est commutatif.*

Ceci constitue la démonstration du corollaire de la proposition 3. Soit I un idéal bilatère contenant $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}, m\mathrm{E})$ et tel que $\bar{\mathrm{I}} = \mathrm{I}/\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}, m\mathrm{E})$ soit premier et montrons que $\bar{\mathrm{I}}\mathrm{R} \cap \mathrm{S} = \bar{\mathrm{I}}$.

Le S-module R est, en effet, de type fini. Soit $(1, Z_2, \ldots, Z_p)$ un système de générateurs de R sur S. On peut écrire si $a \in \bar{I}R$

$$a.1 = i_{11} + i_{12}Z_2 + \cdots + i_{1p}Z_p$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a.Z_p = i_{p1} + i_{p2}Z_2 + \cdots + i_{pp}Z_p$$

La méthode du déterminant de Krull, valable parce que S est commutatif, donne alors pour a une équation de dépendance intégrale $a^p + q_1{}^{p-1} + \cdots + q_p = 0$ où $q_j \in \bar{I}^j$. Donc $a^p \in \bar{I}$ et si $\bar{I}$ est premier ou plus généralement intersection d'idéaux premiers $a \in \bar{I}$. Ceci constitue la démonstration annoncée.

En particulier, un idéal bilatère maximal I est tel que $\bar{I}$ soit premier et I est, donc, de la forme $\mathrm{Hom}_A(E, C)$ avec C caractéristique maximal.

Remarquons que la démonstration faite ci-dessus reste valable si l'on suppose $\bar{I}$ intégralement clos.

9. Un contre-exemple à la formule $D(d(C)) = C$.

Reprenons l'exemple de § 5. Le sous-module C_1 est caractéristique. Posons $I = \mathrm{Hom}_A(E, C_1) = d(C_1)$: il est clair que I contient $\mathrm{Hom}_A(E, mE)$ et, par suite, que $D(I)$ contient mE. Le lemme de Nakayama montre que $D(I) \neq C_1$ équivaut à $D(I)/mE \neq C_1/mE$; $\bar{u}$ appartient à $\bar{I}$ si et seulement si il appartient à $S \cap \mathrm{Hom}_k(E, C_1)$ car S est commutatif. Mais il est immédiat que $\mathrm{Hom}_k(\bar{E}, \bar{C}_1)$ est l'idéal à droite de $\mathfrak{L}(\bar{E})$ formé des matrices de la forme :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

par rapport à la base considérée dans § 5.

Donc, $\mathrm{Hom}_k(\bar{E}, \bar{C})$ est l'ensemble $\bar{I}$ des matrices de la forme :

$$\begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

qui est, d'ailleurs, le radical de S. Il est, alors, immédiat que $D(I)/mE$ est $k\bar{x}_1$ et est contenu strictement dans $\bar{C}_1$ qui est $k\bar{x}_1 + k\bar{x}_2$, car $D(I)/mE$ est $\Sigma_{\bar{u} \in \bar{I}}\bar{u}(\bar{E})$.

CHAPITRE IV

Nous nous proposons de rassembler dans ce chapitre un certain nombre de résultats sur le dual E^* de E.

1. Une généralisation du sous-module de torsion.

PROPOSITION 1 ET DÉFINITION. — *Soient* A *un anneau commutatif,* K *son anneau total des fractions,* E *un* A*-module et* T *un sous-module. Il y a équivalence entre :*

1) T *est le noyau de l'homorphisme* $E \to E \otimes_A K$.

2) T *est l'ensemble des* x *de* E *dont l'annulateur contient un élément régulier de* A.

T *sera dit le sous-module de torsion généralisée de* E.

L'équivalence de 1) et 2) résulte, immédiatement, du lemme 3 des Préliminaires. Le fait pour x de E d'appartenir à T est, donc, équivalent à l'existence de a régulier de A, tel que $ax = 0$. Cette définition a les conséquences suivantes :

T_1) Si l'anneau A est intègre, le sous-module de torsion généralisée coïncide avec le sous-module de torsion.

T_2) T est caractéristique : en effet, si $x \in T$, il existe a régulier de A tel que $ax = 0$ et pour tout $u \in \mathfrak{L}(E)$, $au(x) = 0$ et $u(x) \in T$.

T_3) Le quotient E/T du module E par son sous-module de torsion généralisée n'a pas de torsion généralisée : si $\bar{x} \in E/T$ est tel qu'il existe a régulier de A avec $a\bar{x} = 0$, $ax \in T$ si x est un représentant de $\bar{x}$; il existe, donc, b régulier dans A tel que $bax = 0$ et, par suite, $x \in T$ et $\bar{x} = 0$.

T_4) Si E est fidèle et T de type fini, par exemple si E est noethérien fidèle, E/T est fidèle. Il existe, en effet, a régulier dans A tel que $a\mathrm{T} = 0$. Si b de A est tel que $b \, . \, \mathrm{E/T} = 0$, alors $b\mathrm{E} \subset \mathrm{T}$ et $ab\mathrm{E} = 0$. La fidélité de E montre alors que $ab = 0$ et $b = 0$.

Toutes ses propriétés sont vraies pour le sous-module de torsion dans le cas où A est intègre.

T_5) Contrairement à ce qui se passe dans ce dernier cas, il n'y a pas de raison pour que le sous-module de torsion généralisée soit *pur* : on a, en effet, $b\mathrm{E} \cap \mathrm{T} = b\mathrm{T}$ si b est régulier dans A mais on ne peut rien affirmer si b est diviseur de 0.

T_6) Si E est un A-module, le dual $(\mathrm{E/T})^*$ de E/T est égal au dual E^* de E : en effet, si $u : \mathrm{E} \to \mathrm{A}$ et $x \in \mathrm{T}$, on a $au(x) = 0$ avec a régulier, d'où $u(x) = 0$ et $u(\mathrm{T}) = 0$. Donc, $\mathrm{Hom_A}(\mathrm{T}, \mathrm{A}) = \mathrm{T}^* = 0$. La suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Hom_A}(\mathrm{E/T}, \mathrm{A}) \to \mathrm{Hom_A}(\mathrm{E}, \mathrm{A}) \to \mathrm{Hom_A}(\mathrm{T}, \mathrm{A})$$

donne, alors, le résultat. Le dual d'un module ne peut, donc, déterminer celui-ci qu'au sous-module de torsion généralisée près. Si A est principal, il le détermine effectivement modulo ce sous-module.

T_7) Si le A-module E n'a pas de torsion généralisée, l'application canonique de E dans $\mathrm{E} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K}$ où K est l'anneau total des quotients de A est injective.

2. Ce paragraphe contient essentiellement une présentation légèrement différente de résultats de Rees [16] un peu généralisés.

Proposition 2. — *Soit* A *noethérien intègre, de corps des fractions* K, *et soit* E *un* A-*module de type fini, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) E *est fidèle.*
2) $\mathrm{E} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K}$ *est différent de* 0.
3) $\mathrm{Hom_A}(\mathrm{E}, \mathrm{A})$ *est différent de* 0.
4) $\mathrm{Hom_K}(\mathrm{E} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K}, \mathrm{K})$ *est différent de* 0.

L'équivalence de 2) et 4) est immédiate car $\mathrm{E} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K}$ est un espace vectoriel sur K. Non 2) implique Non 1) car $a\mathrm{E} = 0$

implique $a\left(E \underset{A}{\otimes} K\right)$ si l'on remarque que $(aE) \underset{A}{\otimes} K$ se plonge dans $E \underset{A}{\otimes} K$, en raison de la platitude de K, et que $(aE) \underset{A}{\otimes} K = a\left(E \underset{A}{\otimes} K\right)$ comme on le voit en calculant dans $E \underset{A}{\otimes} K$.

Non 2) implique que E est un module de torsion et, puisque E est de type fini, que E n'est pas fidèle, soit Non 1).

Enfin 3) et 4) sont équivalents car

$$\mathrm{Hom}_K\left(E \underset{A}{\otimes} K,\ K\right) = \mathrm{Hom}_A(E,\ A) \underset{A}{\otimes} K \quad \text{et} \quad \mathrm{Hom}_A(E,\ A)$$

se plonge dans $\mathrm{Hom}_A(E,\ A) \underset{A}{\otimes} K$ car, $\mathrm{Hom}_A(E,\ A)$ est sans torsion.

Théorème 1. — *Soit* A *un anneau noethérien et soit* E *un* A-*module de type fini fidèle. Il y a équivalence pour un* A-*module* F *entre :*

1) $F = 0$.

2) $\mathrm{Hom}_A(E, F) = 0$.

La démonstration de ce lemme s'appuie sur le lemme :

Lemme. — *Si l'idéal p de* A *est premier (ou plus généralement intégralement clos), et si* E *est un* A-*module de type fini fidèle,* E/pE *est fidèle en tant que* A/p-*module.*

Soit, en effet, $\bar{a} \in A/p$ tel que $\bar{a}.E/pE = 0$. Si a est un représentant de $\bar{a}$ dans A, ceci équivaut à $aE \subset pE$, c'est-à-dire, si $e_1, \ldots, e_n$ sont des générateurs de E à : $ae_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ji}e_j$ où $b_{ji} \in p (i = 1, \ldots, n)$. La méthode du déterminant de Krull donne, alors, $\det (b_{ji} - \delta_{ji}a)e_i = 0$ pour $i = 1, \ldots, n$. Puisque E est fidèle, $\det (b_{ji} - \delta_{ji}a) = 0$. En développant ce déterminant, on obtient pour a une équation de dépendance intégrale : $a^n - b_1a^{n-1} - \cdots - b_n = 0$ où $b_i \in p^i$. La définition d'un idéal intégralement clos montre, alors, que $a \in p$, soit $\bar{a} = 0$. Plus simplement, si p est premier, $a^n \in p$, donc, $a \in p$.

Démonstration du théorème : il est clair que l'on peut supposer F de type fini. Si F est différent de 0, il existe un idéal premier p, en fait associé à F, et différent de A tel que A/p se plonge dans F. Il nous suffit de montrer que $\mathrm{Hom}_A(E, A/p)$ est différent de 0. Or, $\mathrm{Hom}_A(E, A/p)$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{Hom}_{A/p}(E/pE, A/p)$ et E fidèle implique E/pE fidèle en tant que A/p-module, donc $\mathrm{Hom}_{A/p}(E/pE, A/p)$ est différent de 0. Le théorème est, donc, démontré.

3. Anneau des endomorphismes d'un dual et d'un bidual.

Rappelons la proposition suivante (4) :

Soient A *un anneau commutatif et* E, F, G *des* A-*modules, l'application qui à* $g : E \otimes_A F \to G$ *fait correspondre*

$$g' : E \to \mathrm{Hom}_A(F, G)$$

par $(g'(x))(y) = g(x \otimes y)$ *pour* $x \in E$ *et* $y \in F$ *est un isomorphisme de* $\mathrm{Hom}_A(E \otimes_A F, G)$ *sur* $\mathrm{Hom}_A(E, \mathrm{Hom}_A(F, G))$.

Soit alors φ l'application canonique de E dans son bidual E^{**} : elle est définie par $\varphi(x) = x''$ où $x''(x^*) = x^*(x)$ si $x \in E$, $x^* \in E^*$. Si $u \in \mathfrak{L}(E)$, il lui correspond $u' : E \to E^{**}$ où $u' = \varphi u$. Considérons alors la suite d'isomorphismes :

$$\mathrm{Hom}_A(E, \mathrm{Hom}_A(E^*, A)) \to \mathrm{Hom}_A(E \otimes_A E^*, A)$$
$$\to \mathrm{Hom}_A(E^*, \mathrm{Hom}_A(E, A)) = L(E^*).$$

Elle fait correspondre à $u' : E \to E^{**}$ défini ci-dessus $u'' : E^* \to E^*$ par la formule : $u'(x)(y^*) = u''(y^*)(x)$ si $x \in E$ et $y^* \in E^*$. Nous obtenons, donc, $u''(y^*)(x) = \varphi(x)(y^*) = \varphi(u(x))(y^*) = y^*(u(x))$ et ceci montre que $u'' = {}^t u$ où ${}^t u$ désigne la transposée de u.

Nous voyons, donc, que $\mathfrak{L}(E^*)$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Hom}_A(E, E^{**})$ et de plus :

Proposition 3. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que la transposition soit un isomorphisme du* A-*module* $\mathfrak{L}(E)$ *sur le* A-*module* $\mathfrak{L}(E^*)$ *est que l'application canonique* φ *de* E *dans son bidual* E^{**} *soit un isomorphisme. La transposition est alors un anti-isomorphisme d'anneaux.*

Une condition nécessaire pour qu'il en soit ainsi est, puisqu'un dual et a fortiori un bidual n'a pas de torsion généralisée, que E n'ait pas de torsion généralisée. Plaçons nous, alors, dans la situation suivante : A est un anneau noethérien intègre de corps des fractions K et E est un A-module de type fini sans torsion. Si N est le noyau de l'application canonique φ de E dans E^{**} on a, par platitude, la suite exacte :

$$0 \longrightarrow N \otimes_A K \longrightarrow E \otimes_A K \xrightarrow{\varphi \otimes 1} E^{**} \otimes_A K$$

mais, $E^{**} \underset{A}{\otimes} K$ s'identifie canoniquement à $\left(E \underset{A}{\otimes} K\right)^{**}$, toujours pour des raisons de platitude. Le K-espace vectoriel $\left(E \underset{A}{\otimes} K\right)$ est de dimension finie égale au rang de E. L'application canonique de $E \underset{A}{\otimes} K$ dans $\left(E \underset{A}{\otimes} K\right)^{**}$ est un isomorphisme de A-modules et c'est visiblement $\varphi \otimes 1$; par conséquent, $N \underset{A}{\otimes} K = 0$ et $N = 0$ car N est sans torsion et se plonge dans $N \underset{A}{\otimes} K$. Le conoyau S de 0 est tel que $S \underset{A}{\otimes} K = 0$ et S est donc un module de torsion.

Théorème 2. — *Si* E *est un module de type fini sans torsion sur l'anneau noethérien intègre* A, *l'application canonique* φ *de* E *dans son bidual* E^{**} *est injective et le conoyau de* h *est un module de torsion. Alors, la transposition est un isomorphisme (resp. anti-isomorphisme) de* A-*modules (resp. d'anneaux) de* $\mathfrak{L}(E)$ *dans* $\mathfrak{L}(E^{**})$.

Nous renvoyons à : Rees Polar Modules, *Proc. Cambridge phil. Soc.*, t. 52, 1956, pp. 605-610 pour la démonstration du fait que les homomorphismes canoniques font de E^{*} un facteur direct de E^{***} et plus généralement de $E^{(n)}$ un facteur direct de $E^{(n+2)}$ si $n \geqslant 1$ où $E^{(n+1)}$ désigne le dual de $E^{(n)}$ avec $E^{(0)} = E$. Donc,

Proposition. — *Soient* A *un anneau commutatif et* E *un* A-*module. La transposition applique* $\mathfrak{L}(E^{*})$ *isomorphiquement en tant que* A-*module sur un facteur direct de* $\mathfrak{L}(E^{**})$ *et anti-isomorphiquement en tant qu'anneau.*

Remarques. — Il peut se faire qu'il existe un isomorphisme de A-modules de $\mathfrak{L}(E)$ sur $\mathfrak{L}(E^{*})$ qui ne soit pas la transposition. Identifions alors $\mathfrak{L}(E^{*})$ à $\mathrm{Hom}_A(E, E^{**})$ au moyen des isomorphismes canoniques et désignons par h l'homologue dans $\mathrm{Hom}_A(E, E^{**})$ de l'application identique de E. Supposons E fidèle.

1) *h est injectif :* si N, est en effet, le noyau de h, la suite exacte $O \to N \to E \xrightarrow{h} E^{**}$ donne la suite exacte :

$$O \to \mathrm{Hom}_A(E, N) \to \mathrm{Hom}_A(E, E) \to \mathrm{Hom}_A(E, E^{**}).$$

Nous en déduisons $\mathrm{Hom}_A(E, N) = 0$ et $N = 0$ puisque E est fidèle.

Remarquons que, si A est intègre $\mathfrak{L}(E) = \mathfrak{L}(E^*)$ implique la fidélité de E.

2) Le problème d'une éventuelle surjectivité est plus délicat : on a la suite exacte

$0 \to \mathfrak{L}(E) \to \mathrm{Hom}_A(E, E^{**}) \to \mathrm{Hom}_A(E, S) \to \mathrm{Ext}_A^1(E, E) \ldots$

si S est le conoyau de h. Si $\mathrm{Ext}_A^1(E, E) = 0$, on en déduit $\mathrm{Hom}_A(E, S) = 0$, soit $S = 0$. Donc,

Proposition. — *Si le* A-*module* E *est fidèle et s'il existe un isomorphisme (éventuellement distinct de la transposition) du* A-*module* $\mathfrak{L}(E)$ *sur le* A-*module* $\mathfrak{L}(E^*)$, *la condition* $\mathrm{Ext}_A^1(E, E) = 0$ *implique que cet isomorphisme est induit par un isomorphisme de* E *sur* E^{**}.

Il est inutile de faire l'hypothèse E fidèle si A est intègre.

4. Nous nous proposons de résoudre le problème suivant : caractériser les modules de type fini E sur l'anneau local A d'idéal maximal m tels que :

$$\mathrm{Hom}_A(E, m) = m\,\mathrm{Hom}_A(E, A).$$

Plus généralement, si F est un A-module de type fini, supposons que $\mathrm{Hom}_A(E, mF) = m\,\mathrm{Hom}_A(E, F)$. Cette condition est satisfaite si E est libre. Si $E = L/R$ où L est libre, on peut écrire la suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(E, F) \to \mathrm{Hom}_A(L, F) \to \mathrm{Hom}_A(R, F) \to \mathrm{Ext}_A^1(E, F) \to 0.$$

Nous poserons $S = \mathrm{Hom}_A(L, F)/\mathrm{Hom}_A(E, F)$.

Il est clair que

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_A(E, mF) &= \mathrm{Hom}_A(E, F) \cap \mathrm{Hom}_A(L, mF) \\ &= \mathrm{Hom}_A(E, F) \cap m\,\mathrm{Hom}_A(L, F)\end{aligned}$$

et ceci nous montre que les assertions suivantes sont équivalentes :

a) $\mathrm{Hom}_A(E, mF) = m\,\mathrm{Hom}_A(E, F)$.

b) $\mathrm{Hom}_A(E, F)/m\,\mathrm{Hom}_A(E, F)$ s'injecte naturellement dans $\mathrm{Hom}_A(L, F)/m\,\mathrm{Hom}_A(L, F)$.

c) L'application canonique de

$$\mathrm{Hom}_A(E, F) \otimes_A k \quad \text{dans} \quad \mathrm{Hom}_A(L, F) \otimes_A k$$

est injective. Écrivons, alors, la suite exacte :

$$\to \mathrm{Tor}_1^A(\mathrm{Hom}_A(E, F), k) \to \mathrm{Tor}_1^A(\mathrm{Hom}_A(L, F), k) \to \mathrm{Tor}_1^A(S, k)$$
$$\to \mathrm{Hom}_A(E, F) \underset{A}{\otimes} k \to \mathrm{Hom}_A(L, F) \underset{A}{\otimes} k \to S \underset{A}{\otimes} k \to 0.$$

Nous en déduisons que *a*) est équivalente à

d) $\quad \mathrm{Im}(\mathrm{Tor}_1^A(S, k) \to \mathrm{Hom}_A(E, F) \underset{A}{\otimes} k) = 0.$

Cette condition se simplifie si $\mathrm{Hom}_A(L, F)$ est libre, c'est-à-dire si F est libre puisque $\mathrm{Hom}_A(L, F)$ est canoniquement isomorphe à F^n si le rang de L est n.

En effet, dans ces conditions $\mathrm{Tor}_1^A(\mathrm{Hom}_A(L, F), k) = 0$ et *d*) se réduit à $\mathrm{Tor}_1^A(S, k) = 0$, c'est-à-dire à S est libre (8). Il revient au même de dire que S est facteur direct de $\mathrm{Hom}_A(L, F)$ et, également, que $\mathrm{Hom}_A(E, F)$ est facteur direct de $\mathrm{Hom}_A(L, F)$ Ceci est valable si F = A, d'où

Théorème 3. — *Soient* A *un anneau local d'idéal maximal* m *et* E *un* A*-module de type fini. Si* E *est quotient du* A*-module libre* L, *une condition nécessaire et suffisante pour que* $\mathrm{Hom}_A(E, m) = m\,\mathrm{Hom}_A(E, A)$ *est que le dual* E^* *de* E *soit facteur direct du dual* L^* *de* L.

On en déduit.

Corollaire 1. — *Sous les hypothèses du théorème,* E^* *est libre.*

Corollaire 2. — *Si* A *est un anneau de valuation discrète,* $\mathrm{Hom}_A(E, m) = m\,\mathrm{Hom}_A(E, A)$ *pour tout* A*-module de type fini* E.

En effet, $E = L' \oplus T$ où L' est libre et T de torsion; il suffit de prendre T quotient du module libre L'' et $L = L' \oplus L''$ car $E^* = L'^*$. La vérification directe de ce résultat est d'ailleurs facile. D'autre part, on a un résultat analogue pour un module de type fini E sur un anneau local A intègre si E est somme directe d'un module libre et d'une module de torsion.

Remarque. — La méthode utilisée ci-dessus peut être employée pour la caractérisation des E tels que

$$\mathrm{Hom}_A(E, aF) = a\,\mathrm{Hom}_A(E, F)$$

où a est un idéal quelconque de A mais elle ne nous a pas semblé donner de résultats simples. Nous aurions aimé avoir

une caractérisation des E tels que $\mathrm{Hom}_A(E, mE) = m\mathfrak{L}(E)$: si E possède un système minimal de générateurs $e_1, \ldots, e_n$ sur A tel que $\mathrm{A}nn(e_1) = 0$, la condition $\mathrm{Hom}_A(E, mE) = m\mathfrak{L}(E)$ implique $\mathrm{Hom}_A(E, me_1) = m\,\mathrm{Hom}_A(E, Ae_1)$ car, il est clair que $\mathrm{Hom}_A(E, me_1) = \mathrm{Hom}_A(E, mE) \cap \mathrm{Hom}_A(E, Ae_1)$ et que $m\,\mathrm{Hom}_A(E, Ae_1) = m\,\mathrm{Hom}_A(E, E) \cap \mathrm{Hom}_A(E, Ae_1)$. Donc, dans ce cas, nous voyons qu'une condition *nécessaire* est que si E est quotient du A-module libre L, E^* soit facteur direct de L^*. En particulier, nous obtenons une condition nécessaire dans le cas où A est intègre et E fidèle.

5. Étude de la forme bilinéaire induite sur $(E^*/mE^*) \times (E/mE)$.

Soit h la forme bilinéaire canonique $E^* \times E \to A$ définie par $h(x^*, x) = x^*(x)$ si $x \in E$ et $x^* \in E^*$. Elle induit une forme bilinéaire $(E^*/mE^*) \times (E/mE \to A/m$ comme suit : si $x^* = y^*$ modulo mE^* et $x = y$ modulo mE, $x^*(x) = y^*(y)$ modulo m et nous poserons $\overline{h}(\overline{x}^*, \overline{x}) =$ classe de $x^*(x)$ modulo m si $\overline{x}^*$ (resp. $\overline{x}$) est la classe de x^* (resp. x) modulo mE^* (resp. modulo mE). On définit ainsi un homomorphisme φ :

$$E^*/mE^* \to (E/mE)^*$$

qui se factorise comme suit :

$$\begin{tikzcd}
E^*/mE^* \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "i"'] & & (E/mE)^* \\
& E^*/\mathrm{Hom}_A(E, m) \arrow[ur, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

où i est l'injection canonique de $E^*/\mathrm{Hom}_A(E, m)$ dans $(E/mE)^*$ tel qu'il résulte de la suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(E, m) \to \mathrm{Hom}_A(E, A) \to \mathrm{Hom}_A(E/mE, k)$$

et où j est la surjection canonique

$$E^*/mE^* \to (E^*/mE^*)/(\mathrm{Hom}_A(E, m)/mE^*).$$

L'injectivité de φ équivaut, donc, à celle de j, c'est-à-dire à $\mathrm{Hom}_A(E, m) = m\,\mathrm{Hom}_A(E, A)$, question résolue plus haut.

La surjectivité de φ équivaut à celle de i c'est-à-dire à celle

de l'application naturelle $E^* \to (E/mE)^*$. Cette condition est équivalente à E est A-libre (chap. 2 § 2, corollaire 1).

La non dégénérescence de la forme bilinéaire induite signifie que, si $\bar{x} \in E/mE$ et $\bar{x} \neq 0$, il existe $\bar{x}^* \in E^*/mE^*$ tel que $\bar{x}^*(\bar{x}) \neq 0$. Donc, si $x \in E - mE$, il doit exister $x^* \in E^*$ tel que $x^*(x) \notin m$. En choisissant y convenable proportionnel à x, $x^*(y) = 1$, soit $x^*(E) = x^*(Ay) = A$. Il en résulte que x^* est une surjection de E sur A et A est facteur direct de E. Posons $E = A \oplus F$ et recommençons avec $x \in F - mF$; nous obtenons $F = A \oplus G$ et de proche en proche $E = A^n$. La réciproque est immédiate et nous avons démontré :

Théorème 4. — *Il y a équivalence entre :*

1) *La forme bilinéaire induite sur* $(E^*/mE^*) \times (E/mE)$ *par la forme bilinéaire canonique* $E^* \times E \to A$ *est non dégénérée.*

2) E *est* A-*libre.*

Des questions analogues se posent pour la forme bilinéaire induite :

$$(E^*/m^iE^*) \times (E/m^iE) \to A/m^i$$

pour i quelconque. La solution en est, sans doute, bien plus compliquée.

CHAPITRE V

ÉTUDE DES $\mathfrak{L}(E)$ COMMUTATIFS

1. Anneau des endomorphismes d'un idéal.

Soient A un anneau commutatif à élément unité et K son anneau total des fractions, si I est un idéal de A, nous noterons $(I : I)$ l'ensemble des a de K tels que $aI \subset I$.

Proposition 1. — *Si* I, *considéré comme anneau, contient au moins un élément régulier*, $\mathfrak{L}(I)$ *est commutatif.*

Soit, en effet, y un élément régulier de I. Si u, $v \in \mathfrak{L}(I)$ et $x \in I$, on a :

$$u(xy) = xu(y) = yu(x) \qquad \text{et} \qquad v(xy) = xv(y) = yv(x)$$

puis,

$$vu(xy) = v(x)u(y) = v(y)u(x) = xvu(y) = yvu(x)$$
$$uv(xy) = u(x)v(y) = u(y)v(x) = xuv(y) = yuv(x)$$

et, par comparaison, $y(vu(x) - uv(x)) = 0$ et, puisque y est régulier $vu(x) = uv(x)$, soit $uv = vu$.

Ce résultat n'est plus vrai sans l'hypothèse de l'existence d'un élément régulier : on prend

$$A = k[x, y] \quad \text{avec} \quad x^2 = xy = y^2 = 0 \quad \text{et} \quad I = (x, y).$$

Comme I est annulé par lui-même, les A-endomorphismes de I sont les mêmes que ses k-endomorphismes et forment donc un anneau non commutatif.

Proposition 2. — *Si l'idéal* I *contient un élément régulier de* A, $\mathfrak{L}(I) = (I : I)$.

Dans le cas général, si $a \in (\mathrm{I} : \mathrm{I})$, $a\mathrm{I}$ est contenu dans I et la multiplication par a définit, donc, un endomorphisme de I, d'où une application $h : (\mathrm{I} : \mathrm{I}) \to \mathfrak{L}(\mathrm{I})$ qui est évidemment, un homomorphisme pour les structures de modules et d'anneaux. Il est clair que le noyau de h est $(0 : \mathrm{I})$, ensemble des a de K tels que $a\mathrm{I} = 0$.

Si x est un élément régulier de I et si y appartient à I, $xu(y) = yu(x)$ montre que $u(y) = (u(x)/x)y$ où $(u(x)/x)$ est dans K et même dans $(\mathrm{I} : \mathrm{I})$. En ce cas, h est surjectif et puisque $(0 : \mathrm{I}) = 0$, h est un isomorphisme de A-modules et d'anneaux. Dans le cas général, nous voyons que $(\mathrm{I} : \mathrm{I})/(0 : \mathrm{I})$ se plonge dans $\mathfrak{L}(\mathrm{I})$ mais n'est pas forcément isomorphe à $\mathfrak{L}(\mathrm{I})$: dans l'exemple donné ci-dessus, $(\mathrm{I} : \mathrm{I})/(0 : \mathrm{I})$ est k et $\mathfrak{L}(\mathrm{I}) = \mathrm{M}_2(k)$.

Corollaire. — *Si* A *est intègre, il en est de même de* $\mathfrak{L}(\mathrm{I})$.

On peut remarquer que $(\mathrm{I} : \mathrm{I})$ est, en fait, le plus grand des sous-anneaux B de K contenant A et tels que I soit idéal de B.

Corollaire 2. — *Si* A *est noethérien et intégralement clos (dans* K*) et si* I *contient un élément régulier,* $\mathfrak{L}(\mathrm{I}) = \mathrm{A}$.

En effet, $\mathfrak{L}(\mathrm{I}) = (\mathrm{I} : \mathrm{I})$ est un sous-anneau de K entier sur A comme A-module de type fini. L'hypothèse faite sur A implique donc, $\mathfrak{L}(\mathrm{I}) = \mathrm{A}$.

Remarquons que l'on n'a pas forcément $\mathfrak{L}(\mathrm{I}) = \mathrm{A}$ dans le cas général. Si A′ est la cloture intégrale de A non intégralement clos et si f est le conducteur de A′ dans A, $(f : f) = \mathrm{A}'$ et $\mathfrak{L}(f) = \mathrm{A}'$ que f soit considéré comme A ou comme A′-module.

2. Passage au contre-module.

Soient A un anneau commutatif à élément unité et E un A-module. Nous désignerons par E′ le contre-module de E (6). C'est le $\mathfrak{L}(\mathrm{E})$-module à gauche défini comme suit : le groupe abélien sous-jacent est le groupe E, le produit $u.x$ où $u \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$ et $x \in \mathrm{E}$ est donné par $u.x = u(x)$.

Proposition 3. — *L'anneau* $\mathfrak{L}(\mathrm{E}')$ *des* $\mathfrak{L}(\mathrm{E})$*-endomorphismes de* E′ *est le centre de* $\mathfrak{L}(\mathrm{E})$.

Il suffit de remarquer qu'un endomorphisme de E′ est un

endomorphisme du groupe abélien E qui commute à tout u de $\mathfrak{L}(E)$; il commute, alors, à fortiori aux homothéties de E et appartient donc, à $\mathfrak{L}(E)$; puisqu'il commute à tout u de $\mathfrak{L}(E)$, il appartient au centre de E. La réciproque est immédiate.

Corollaire. — *Si* $\mathfrak{L}(E)$ *est commutatif*, $\mathfrak{L}(E') = \mathfrak{L}(E)$.

Pour l'étude des $\mathfrak{L}(E)$ commutatifs, nous voyons donc, qu'il est naturel de chercher les E tels que $\mathfrak{L}(E) = A$. Bien entendu, le procédé de passage au contre-module nous oblige si l'anneau de départ était local à traiter le second problème avec A semi-local. Mais il ne semble pas qu'une telle restriction sur les anneaux présentent un intérêt quelconque et nous supposerons, donc, sauf mention du contraire, que A est un anneau commutatif à élément unité quelconque.

3. Théorème 1. — *Soient* A *un anneau commutatif noethérien et* E *un* A-*module de type fini tel que* $\mathfrak{L}(E) = A$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) E *est isomorphe à un idéal de* A.

2) *Il existe une injection* h *de* E *dans* A.

3) *Il existe un homomorphisme libre* h *de* E *dans* A, *c'est-à-dire tel que* $h(E)$ *soit fidèle.*

4) *Il existe une application bilinéaire libre* h' : $E \times E \to E$.

L'équivalence de 1) et 2), indépendante de l'hypothèse $\mathfrak{L}(E) = A$, est évidente; 3) implique 2) : en effet, $\mathfrak{L}(E) = A$ implique E fidèle. Le théorème du chapitre 4 § 2 montre alors qu'il existe $h : E \to A$ non nul et 3) nous permet de le supposer libre. Le noyau N de h est caractéristique comme tout sous-module de E, et on peut écrire la suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(E,\ N) \to \mathfrak{L}(E) \to \mathfrak{L}(E/N).$$

Les homothéties de E induisent les homothéties de $E/N = h(E)$. Puisque $\mathfrak{L}(E) = A$ et puisque $h(E)$ est fidèle, la flèche de droite correspond à une injection et $\mathrm{Hom}_A(E, N) = 0$, soit $N = 0$ d'après le théorème rappelé ci-dessus. Nous avons bien montré que h est une injection de E dans A.

2) Implique 3) car si $h : E \to A$ est injectif, $h(E)$ est fidèle : en effet, $ah(E) = 0$ avec a dans A s'écrit $h(aE) = 0$ puis $aE = 0$ d'après l'injectivité de h et $a = 0$ puisque E est fidèle.

L'équivalence de 3) et 4) résulte du fait que si $\mathfrak{L}(E) = A$, on

peut écrire : $\mathrm{Hom}_A(E, A)$ sous la forme $\mathrm{Hom}_A(E, \mathrm{Hom}_A(E, E))$ qui est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Hom}_A(E \times E, E)$. La condition 4) met, partiellement, en évidence la recherche d'une structure d'anneau sur E. Nous y reviendrons à la fin de ce chapitre.

Corollaire. — *Si* A *est un anneau noethérien intègre, il y a équivalence pour un* A-*module de type fini* E *entre :*

1) $\mathfrak{L}(E) = A$.

2) E *est isomorphe à un idéal* I *de* A *tel que* $(I : I) = A$.

En effet, tout h différent de O de E dans A est non lié car $ah(E) = 0$ implique $ah(x) = 0$ si x est tel que $h(x) \neq 0$ et, par suite, $a = 0$. Or, $\mathfrak{L}(E) = A$ implique l'existence d'un tel h.

Nous verrons ultérieurement que, si A n'est pas intègre, il se peut que $\mathfrak{L}(E) = A$ n'implique pas E isomorphe à un idéal de A. Voici un contre-exemple plus faible mais plus simple à l'affirmation suivante : si E est fidèle, il existe h libre, homomorphisme de E dans A : prenons $A = k[x, y]$ où $x^2 = xy = y^2 = 0$ et où k est un corps. Le A-module E est engendré par e_1 et e_2 liés par la relation $xe_1 + ye_2 = 0$. La donnée de $h : E \to A$ est la donnée de deux éléments x_1 et x_2 de A tels que $xx_1 + yx_2 = 0$. Puisque $Ax \cap Ay = (0)$, nous déduisons de $xx_1 = -yx_2$ que x_1 et x_2 appartiennent à (x, y); x_1 et x_2 sont donc annulés par (x, y) et h n'est pas libre. Or, E est bien fidèle car si $ae_1 = ae_2$ où $a \in A$, il existe r et s de A tels que $a = rx = sy$ avec $sx = ry$ et $a = 0$.

4. Autre méthode.

Théorème 2. — *Soient* A *un anneau noethérien et* E *un* A-*module de type fini tel que* $\mathfrak{L}(E) = A$. *Alors,* E *n'a pas de torsion généralisée.*

Ce sous-module de torsion généralisée est caractéristique dans tous les cas et on peut écrire la suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(E, T) \to \mathfrak{L}(E) \to \mathfrak{L}(E/T).$$

Or, nous avons montré que E/T est fidèle en même temps que E. Les homothéties de E induisent les homothéties de E/T et, puisque $\mathfrak{L}(E) = A$, la flèche de droite correspond à une

injection de $\mathfrak{L}(E)$ dans $\mathfrak{L}(E/T)$. On en déduit $\operatorname{Hom}_A(E, T) = 0$ et $T = 0$.

Dans le cas où A est intègre de corps des fractions K, la platitude de K montre que $\mathfrak{L}(E \otimes_A K) = K$ et, donc, que $E \otimes_A K = K$. Comme E s'injecte dans $E \otimes_A K$, E est isomorphe à un idéal que l'on peut supposer entier de A. Nous retrouvons ainsi le corollaire du théorème. Si A n'est plus supposé intègre et si K est son anneau total des quotients, E s'injecte encore dans $E \otimes_A K$ mais la condition $L(E \otimes_A K) = K$ ne semble pas donner de renseignements supplémentaires en général.

Remarque. — Nous aurions pu définir plus généralement la S-torsion pour un A-module si S est une partie multiplicative de A. En particulier, considérons le noyau K de l'application canonique $E \to E \otimes_A A_p$, c'est-à-dire la (A-p)-torsion si p est un idéal premier de A : le sous-module K est l'ensemble des éléments x de E tels qu'il existe s dans A-p satisfaisant à $sx = 0$. La fidélité de E n'implique pas celle de E/K car, si $a \in A$ est tel que $aE \subset K$, on obtient $sa = 0$ si s est un élément de A-p tel que $sK = 0$. Par suite, $a \in (0 : J)$ si $J = (A\text{-}p) \cap \operatorname{Ann}(K)$. Il peut se faire que (O : J) soit différent de O. Si $(O : J) = 0$, le raisonnement fait précédemment montre que $K = 0$ et on a dans tous les cas $\mathfrak{L}(E_p) = A_p$. Il peut se faire que l'on ait des renseignements sur E_p : par exemple, si A est noethérien intégralement clos et si p est un *idéal premier de hauteur* 1 *contenant au moins un élément régulier*, A_p est un anneau de valuation discrète et $\mathfrak{L}(E) = A$ implique, alors $E_p = A_p$ (2).

5. L'hypothèse E de type fini est essentielle pour permettre d'affirmer que $\mathfrak{L}(E) = A$ implique que E est isomorphe à un idéal de A dans le cas où A est intègre.

Le fait que A soit noethérien entraîne, en effet, que tout idéal est de type fini mais, de plus, il existe, effectivement, au moins si A est un anneau local complet un A-module E non de type fini tel que $\mathfrak{L}(E) = A$: on prend pour E l'enveloppe injective du corps des restes A/m considéré comme A-module; E n'est pas de type fini car E est divisible et on obtiendrait une contradiction au lemme de Nakayama. Nous renvoyons à [11] pour la démonstration du fait que $\mathfrak{L}(E) = A$.

(2) Northcott, *Ideal Theory*. 4. 9 Divisons, p. 77.

On connaît des cas où, sans hypothèse de finitude pour E, $\mathfrak{L}(E) = A$ implique que E est isomorphe à A. En effet, Baer [2], Kaplansky [13] et Shiffman [20] ont établi que pour les anneaux locaux principaux avec condition de chaîne descendante tout isomorphisme de $\mathfrak{L}(E)$ sur $\mathfrak{L}(F)$ où E et F sont des A-modules est induit par un isomorphisme de E sur F.

Remarquons, d'autre part, que si A est intègre et E fidèle, A s'injecte dans E et par suite que le dual E^* s'injecte dans $\mathfrak{L}(E)$. Si $\mathfrak{L}(E) = A$, E^* est donc isomorphe à un idéal de A.

Enfin avant de donner un exemple montrant que si A n'est pas intègre, on peut avoir $\mathfrak{L}(E) = A$ sans que E soit isomorphe à un idéal de A, montrons que le corollaire du théorème 1 est, néanmoins valable sous des hypothèses un peu plus générales que A intègre.

Théorème 3. — *Soient* A *un anneau somme directe d'un nombre fini d'anneaux noethériens intègres et* E *un* A-*module de type fini. Il y a équivalence entre :*

1) $\mathfrak{L}(E) = A$.

2) E *est isomorphe à un idéal* I *de* A *tel que* $(I : I) = A$.

Soit, en effet, $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$ où A_i est noethérien intègre et soient $p_1, \ldots, p_n$ les idempotents correspondant à cette décomposition en somme directe. Posons $E_i = p_i(E)$ de telle sorte que $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$. Il en résulte que

$$\mathfrak{L}(E) = \mathrm{Hom}_A(E_1, E) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Hom}_A(E_n, E);$$

or, comme E_i est caractéristique, $\mathrm{Hom}_A(E_i, E) = \mathfrak{L}(E_i)$. L'anneau A_i est contenu dans $\mathfrak{L}(E_i)$ et, par suite, de $\mathfrak{L}(E) = A$, résulte que $\mathfrak{L}(E_i) = A_i$. Le A-module E_i est en fait un A_i-module et est isomorphe à un idéal convenable de A_i, d'où le résultat.

6. Un contre-exemple.

L'exemple que nous avons en vue va nous montrer les trois points suivants :

1) *Si* A *est un anneau commutatif à élément unité et si* E *est un* A-*module de type fini d'annulateur* $\mathfrak{a}$, *il n'existe pas forcément un* A-*module de type fini fidèle* F *tel que* $E = F/\mathfrak{a}F$.

2) *Si* E *est un module de type fini sur un anneau non intègre la fidélité de* E *n'implique pas que le dual* E^* *de* E *ne soit pas formé uniquement d'éléments liés.*

3) *Si* A *est non intègre,* $\mathfrak{L}(E) = A$ *n'implique pas que le* A-*module de type fini* E *soit isomorphe à un idéal convenable de* A.

Prenons $B = k[[X, Y]]$ où k est un corps et où X et Y sont des indéterminées. Le B-module E sera défini comme quotient du module libre $L = Bx_1 \oplus Bx_2$ par le sous-module

$$R = By_1 + By_2 + By_3$$

avec $\quad y_1 = Xx_1 + Yx_2; \qquad y_2 = Yx_1; \qquad y_3 = Xx_2.$

Nous avons les formules :

$$\begin{array}{ll} X^2x_1 = Xy_1 - Yy_3 & X^2x_2 = Xy_3 \\ Y^2x_1 = Yy_2 & Y^2x_2 = Yy_1 - Xy_2 \\ XYx_1 = Xy_2 & XYx_2 = Yy_3 \end{array}$$

qui montrent que l'annulateur de E contient $n^2 = a = (X, Y^2)$. Cet annulateur est exactement n^2 car,

$$\begin{aligned} ax_1 &= r_1y_1 + r_2y_2 + r_3y_3 \\ ax_2 &= m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 \end{aligned}$$

conduisent à

$$a = r_1X_1 + r_2Y = m_1Y = m_3X \text{ et } r_1Y_1 + r_3X = 0,$$
$$m_1X + m_2Y = 0.$$

Si, f, g, h désignent des séries formelles arbitraires, on obtient

$$\begin{array}{ll} r_1 = fX & r_3 = -fY \\ m_1 = gY & m_2 = -gX \\ r_1 - m_3 = hY; & r_2 - m_1 = -hX \end{array}$$

et $a = fX^2 - hXY + gY^2$, soit a élément arbitraire de n^2.

Soit, alors, X un sous-module de R tel que $n^2L + X = R$; comme n^2L est contenu dans nR, $nR + X = R$ et le lemme de Nakayama montre, alors, que $R = X$. Si $E = L'/R'$ avec L' libre mais non isomorphe à L, pour des raisons de minimalité de L, L se plonge dans L' et $L/R = L'/R'$ implique $L' = L + R'$ avec $R = R' \cap L$. Si on avait $R' = n^2L' + X'$, on en déduirait, puisque $n^2L' = n^2L + n^2R'$ est contenu dans nR', $R' = nR' + X'$, d'où $X' = R'$.

S'il existait un B-module fidèle F tel que $E = F/n^2F$, en prenant $F = L'/X'$, E s'écrirait $L'/n^2L' + X' = L'/R'$ avec

L'/X' fidèle. Ce qui précède montre que c'est impossible. Ceci montre, aux notations près, 1).

Pour 3), on peut remarquer qu'il existe un homomorphisme φ de n dans E défini par $\varphi(X) = -e_2$ et $\varphi(Y) = e_1$, où e_i est la classe de x_i modulo R. Cet homomorphisme est évidemment surjectif et son noyau est (X^2, Y^2) car les relations sur les e_i se traduisent par $X\varphi(X) = Y\varphi(Y) = 0$, soit $\varphi(X^2) = \varphi(Y^2) = 0$. Donc, E est isomorphe à $(X, Y)/(X^2, Y^2)$, forme sous laquelle on voit très facilement qu'il est annulé par n^2. On peut également le considérer comme un k-espace vectoriel de base X', Y', $X'Y'$ si X' et Y' désignent respectivement les classes de X et Y modulo (X^2, Y^2).

Un endomorphisme de E est donc, défini par :

$$\begin{aligned} u(X') &= aX' + bY' + cX'Y' \\ u(Y') &= a'X' + b'Y' + c'X'Y' \\ u(X'Y') &= X'u(Y') = Y'u(X') \qquad \text{avec} \qquad a, \ldots, c' \qquad \text{dans } k. \end{aligned}$$

Les relations $X'u(X') = 0$ et $Y'u(Y') = 0$ qui résultent de $X'^2 = Y'^2 = 0$ donnent $b = a' = 0$ et $X'u(Y') = Y'u(X')$ fournit $a = b'$ et l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} u(X') &= (a + c'X' + cY')X' \\ u(Y') &= (a + c'X' + cY')X' \\ u(X'Y') &= (a + c'X' + cY')X'Y', \end{aligned}$$

formules qui montrent bien que tout endomorphisme de E est une homothétie et, donc, puisque E est un A-module fidèle si $A = B/n^2$, que $\mathfrak{L}(E) = A$.

Remarque. — Si nous avons tenu à expliciter ce contre-exemple c'est pour donner une indication de la méthode à employer pour traiter un cas concret. Nous aurions pu également expliciter $\mathfrak{L}(E)$ par la méthode matricielle exposée dans le chapitre I; c'est, d'ailleurs, par tâtonnements que nous avons obtenu cet exemple, en essayant de passer au cas d'un anneau complet, puis d'un anneau local régulier complet. Il nous est apparu ultérieurement que le module construit est l'enveloppe injective de k considéré comme B-module et notre résultat est donc la conséquence directe d'un résultat de Matlis exposé dans (11). Nous verrons dans un appendice qu'il rentre dans un autre type découvert par Courter.

7. Une structure d'algèbre.

L'anneau A est commutatif à élément unité et noethérien. Soit E un A-module de type fini *fidèle*. Une structure d'algèbre (associative ou non) sur E est la donnée d'un élément de $\mathrm{Hom}_A(E \times E, E)$ ou ce qui est équivalent de

$$\mathrm{Hom}_A(E, \mathrm{Hom}_A(E, E))$$

Puisque E est fidèle, A s'injecte dans $\mathfrak{L}(E)$ et nous obtiendrons des structures d'algèbre sur E à partir de $\mathrm{Hom}_A(E, A)$ comme suit :

Soit $h \in \mathrm{Hom}_A(E, A)$. Si $x, y \in E$, nous poserons $xy = h(x)y$ calculé dans E. Cette multiplication est doublement distributive par rapport à l'addition mais elle est également associative car

$$(xy)z = h(xy)z = h(h(x)y)z = h(x)h(y)z$$

et

$$x(yz) = h(x)yz = h(x)h(y)z.$$

Dans le cas où $h = 0$, on retrouve une structure parfois utilisée.

Les hypothèses faites sur A et E assurent l'existence de h non nul de $\mathrm{Hom}_A(E, A)$ et nous pouvons donc munir E d'une structure d'algèbre sur A non triviale. Cette algèbre n'a pas d'élément unité si $E \neq A$ car, l'existence d'un élément unité à droite implique $h(y)x = y$ pour tout y de E, soit $E = Ax = A$.

L'anneau E n'est pas, en général commutatif : dans le cas où h est tel qu'il existe x de E avec $h(x)$ régulier, la commutativité implique, en effet, $h(x)y = h(y)x$ pour tout y de E, soit $y \in Kx = K$ si K est l'anneau total des quotients de A ; le A-module E se plonge donc dans K et est isomorphe à un idéal que l'on peut choisir entier de A.

Remarquons que, si $\mathfrak{L}(E) = A$ on a ainsi mis en évidence toutes les structures d'algèbre (associatives ou non a priori) possibles sur E. C'est ainsi que si $E = Ae_1 + Ae_2$ où $A = k[x, y]$ avec $x^2 = xy = y^2 = 0$ et $xe_1 + ye_2 = 0$, $ye_1 = xe_2 = 0$ (exemple du paragraphe précédent), les seules structures d'algèbres possibles sur E sont obtenues à partir des formules $e_1^2 = a_1xe_1$ $e_1e_2 = b_1ye_2$, $e_2e_1 = a_2xe_1$, $e_2^2 = b_2ye_2$ en prolongeant par linéarité, a_1, a_2, b_1, b_2 désignant des éléments arbitraires du corps k.

Si, dans le cas général, u est un élément de $\mathfrak{L}(\mathrm{E})$, on a $u(xy) = u(h(x)y) = h(x)\,u(y) = xu(y)$. De plus, la structure d'algèbre associée à $h \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}, \mathrm{A})$ met, en évidence certains endomorphismes de E : la multiplication à droite u_z par un élément z de E. Un tel endomorphisme applique E dans le A-module monogène Az. Il est amusant de remarquer que si l'on admet que $\mathfrak{L}(\mathrm{E}) = \mathrm{A}$ implique que E n'a pas de torsion généralisée, la seule considération de ces endomorphismes particuliers permet de montrer que, s'il existe h libre dans $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}, \mathrm{A})$, E est isomorphe à un idéal de A : en effet, on se ramène à l'étude de la commutativité traitée ci-dessus.

L'exemple des espaces vectoriels montre qu'il ne faut pas trop attendre de ce qui précède car si $\mathfrak{L}(\mathrm{E}) \neq \mathrm{A}$ on n'obtient éventuellement que peu de structures d'algèbres par ce procédé. Un passage au contre-module fort peu gênant pour la question permet probablement d'obtenir quelques structures d'algèbres associatives supplémentaires.

Remarquons, enfin, que nous avons une condition nécessaire pour que $\mathfrak{L}(\mathrm{E}) = \mathrm{A}$ par $h(x)\,h(z)z' = h(x)\,h(z')z$ quels que soient x, z, z' dans E. Il suffit d'ailleurs que de telles relations soient vraies pour des générateurs. Dans l'exemple déjà traité ces relations s'évanouissent mais si A n'a pas d'éléments nilpotents, restent des relations du type $h(e_1)^2\, e_2 = h(e_1)\, h(e_2)\, e_1$ si $h(e_1) \neq 0$.

Appendice.

Il se trouve que notre exemple du § 6 rentre dans les hypothèses d'un théorème de Courter annoncé dans un preliminary report sans démonstration. Voici ce théorème et une démonstration simple que nous avons obtenu et qui peut-être n'est pas exactement celle de l'auteur.

Théorème (Courter). — *Soient* A *un anneau local artinien d'idéal maximal* m *et* E *un* A-*module de type fini fidèle. On désigne par* F *le sous-module de* E *formé des* x *de* E *annulés par* m, *i, e le plus grand* A/m-*espace vectoriel contenu dans* E. *On suppose que* E *possède un système minimal de générateurs* $x_1, \ldots, x_n$ *tel que :*

1) $\mathrm{F} \subset \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{A}x_i$.

2) $Ann(x_i) + \bigcap_{j \neq i} Ann(x_j) = m (i = 1, \ldots, n)$.

Alors, $\mathfrak{L}(E) = A$.

Démonstration : remarquons, d'abord, que l'on ne peut avoir $\bigcap_{j \neq i} Ann(x_j) = 0$ car, ceci impliquerait $Ax_i = A/m$ d'après 2) et Ax_i serait facteur direct de E, ce qui contredirait 1). Si $u \in \mathfrak{L}(E)$, écrivons, $u(x_i) = a_1 x_1 + \cdots + a_j x_j + \cdots + a_n x_n$. Nous devons avoir, pour $k \neq i$, $u\left(\bigcap_{j \neq k} Ann(x_j) x_i\right) = 0$, soit

$$a_k\left(\bigcap_{j \neq k} Ann(x_j)\right) x_k = 0$$

et
$$a_k \in Ann(x_k) : \left(\bigcap_{j \neq k} Ann(x_j)\right) = Ann(x_k) : m$$

d'après 2). Finalement, $a_k x_k \in F$ et $a_k x_k = c_{ki} x_i$ d'après 1).

Nous pouvons donc prendre u défini par :

$$u(x_1) = a_1 x_1, \ \ldots, \ u(x_i) = a_i x_i, \ \ldots, \ u(x_n) = a_n x_n,$$

en changeant de notations, avec a_i dans A.

La deuxième partie de la démonstration se fait par récurrence sur n; le théorème est vrai si $n = 1$. Supposons que $Ann(x_n) : m \neq Ann(x_n)$ après permutation éventuelle : ceci est légitime car si $Ann(x_i) : m = Ann(x_i)$ pour $i = 1, \ldots, n$, il en résulte $\bigcap_i Ann(x_i) : m = \bigcap_i Ann(x_i)$, c'est-à-dire, puisque $\bigcap_i Ann(x_i) = 0$, $0 : m = 0$; or, $0 : m$ contient m^{p-1} si p est le plus petit entier tel que $m^p = 0$.

Le sous-module engendré par $x_1, \ldots, x_{n-1}$ satisfait à l'hypothèse du théorème et l'endomorphisme u de E est donc de la forme :

$$u(x_1) = ax_1, \ldots, u(x_{n-1}) = ax_{n-1} \qquad \text{et} \qquad u(x_n) = bx_n$$

d'après l'hypothèse de récurrence. Prenons $c \in Ann(x_n) : m$; l'élément cx_n appartient à F et on peut écrire $cx_n = dx_1$ avec d dans A ; on en déduit $cu(x_n) = du(x_1)$ et $c(b - a)x_n = 0$. Finalement, $b - a$ appartient à $Ann(x_n) : (Ann(x_n) : m)$ qui est contenu dans m. En écrivant $b - a = b' + c'$ avec b' dans $Ann(x_n)$ et c' dans $\bigcap_{i \neq n} Ann(x_i)$, il vient $u(x_i) = (a + c')x_i$ pour $i = 1, \ldots, n$.

Le théorème est donc démontré.

CHAPITRE VI

ÉTUDE D'UN ENDOMORPHISME PARTICULIER

Comme nous l'avons indiqué dans l'introduction ce chapitre est totalement disjoint des précédents.

L'anneau A sera supposé local mais non nécessairement noethérien. Le A-module E sera déterminé par un système minimal de générateurs $(e_1, \ldots, e_n)$ choisi une fois pour toutes. Enfin, $\bar{e}_i$ désignera la classe de e_i modulo $m\mathrm{E}$. Nous nous intéressons essentiellement aux endomorphismes de E n'appartenant pas à $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}, m\mathrm{E})$. Le cas général demanderait une étude beaucoup plus délicate.

Proposition 1. — *Les éléments* $f_1, \ldots, f_n$ *de* E *formeront un système minimal de générateurs de* E *sur* A *si et seulement si la matrice* (r_{ji}) *à coefficients dans* A *définie par* $f_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ji} e_j$ *est inversible (dans* $\mathrm{M}_n(\mathrm{A})$*).*

Il résulte, en effet, du lemme de Nakayama, qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $f_1, \ldots, f_n$ forment un système minimal de générateurs de E sur A est que les images $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_n$ modulo $m\mathrm{E}$ forment une base de $\mathrm{E}/m\mathrm{E}$. Cette condition est équivalente à l'inversibilité de la matrice $(\bar{r}_{ji})$ où $\bar{r}_{ji}$ est la classe de r_{ji} modulo m et, par conséquent à celle de la matrice (r_{ji}) dans $\mathrm{M}_n(\mathrm{A})$ comme on le voit en considérant les déterminants.

Définition. — *L'endomorphisme* u *de* E *sera dit diagonalisable s'il existe un système minimal* $f_1, \ldots, f_n$ *de générateurs de* E *sur* A *tel que* $u(f_i) = a_i f_i$ *avec* a_i *dans* A.

Si $\mathrm{O} \to \mathrm{R} \to \mathrm{L} \to \mathrm{E} \to \mathrm{O}$ est le premier terme d'une résolution minimale pour E, il est clair que pour que u soit diagona-

lisable, il faut et il suffit que u soit induit par un endomorphisme diagonalisable u^* de L. Le cas le plus défavorable à la diagonalisation est donc le cas où E est A-libre et nous ferons cette hypothèse dans ce paragraphe et dans les deux suivants.

Proposition 2. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que l'endomorphisme u de* E *soit diagonalisable est qu'il existe une matrice carrée* Q *d'ordre n à coefficients dans* A *et inversible et une matrice* M *de représentation de u telles que* $Q^{-1}MQ$ *soit diagonale.*

Cette proposition est la traduction matricielle de la définition.

1. Valeurs propres et vecteurs propres de l'endomorphisme u.

Définition. — *Un élément x de* E *sera dit vecteur propre de u s'il n'appartient pas à mE et s'il existe a de* A *tel que $u(x) = ax$; l'élément a sera alors appelé valeur propre de u.*

Soit a une valeur propre de u et soit $x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n$ un vecteur propre associé, si $u(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j$, nous avons le système d'équations linéaires :

$$(\xi_1, \ldots, \xi_n)(a_{ji} - a\delta_{ji}) = 0$$

dont le déterminant est $D = \chi_u(a)$ si $\chi_u(X)$ est le polynôme caractéristique de X, c'est-à-dire $\det(a_{ji} - X\delta_{ji})$. Nous devons donc avoir $D\xi_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ mais, comme un au moins des ξ_i est inversible car il n'est pas dans m, on doit avoir $D = \chi_u(a) = 0$. Donc.

Proposition 3. — *Pour que a soit valeur propre de u il faut que a soit racine du polynôme caractéristique $\chi_u(X)$ de u. Cette condition n'est pas, en général, suffisante.*

Elle l'est, évidemment, si A est un corps. Plus généralement, si A est un anneau de valuation discrète, la condition $\chi_u(a) = 0$ implique l'existence de x dans E tel que $u(x) = ax$: il suffit, par exemple, de se placer dans le corps des fractions K de A et de multiplier par le dénominateur commun des ξ_i obtenus. Si $x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n$, le vecteur $x' = \xi'_1 e_1 + \cdots + \xi'_n e_n$ où ξ'_i est le quotient de ξ_i par le P.G.C.D. des ξ_i est un vecteur propre.

2. Une condition suffisante pour que u soit diagonalisable.

Soit $u \in \mathfrak{L}(E) - \mathrm{Hom}_A(E, mE)$ et soit $\bar{u}$ l'endomorphisme induit par u dans $\mathfrak{L}(E/mE)$. Une condition nécessaire pour que u soit diagonalisable est, évidemment, que $\bar{u}$ le soit. Si une matrice de u est $M(u)$, la matrice correspondante de $\bar{u}$ est $\overline{M}(\bar{u})$ obtenue en réduisant les coefficients de $M(u)$ modulo m. L'hypothèse faite sur u revient à dire que $\overline{M}(\bar{u}) \neq 0$. On a dans tous les cas $\chi_{\bar{u}}(X) = \bar{\chi}_u(X)$, polynôme obtenu en réduisant les coefficients de $\chi_u(X)$ modulo m.

Supposons que $\chi_u(X) = (X - a_1) \dots (X - a_n)$ avec a_i non congru à a_j modulo m si $i \neq j$. On sait, alors, que

$$\chi_{\bar{u}}(X) = (X - \bar{a}_1) \dots (X - \bar{a}_n)$$

avec $\bar{a}_i$ différent de $\bar{a}_j$ si $i \neq j$ et, donc, que $\bar{u}$ est diagonalisable. Choisissons le système minimal $e_1, \dots, e_n$ de telle sorte que $\bar{u}(\bar{e}_i) = \bar{a}_i\bar{e}_i$: la matrice $M(u)$ est de la forme :

$$\begin{vmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n \end{vmatrix}$$

où b_i est congru à a_i modulo m et où les coefficients non diagonaux sont dans m.

Désignons par $N(X)$ la transposée de $(M(u) - X1)$, matrice à coefficients dans $A[X]$. Comme a_i $(i = 1, \dots, n)$ est racine de $\chi_u(X)$, on sait que $\det(N(a_i)) = 0$ mais il existe un mineur d'ordre $n - 1$ de ce déterminant non dans m : par exemple, le mineur du terme $b_1 - a_1$ est congru modulo m à $(b_2 - a_1) \dots (b_n - a_1)$, c'est-à-dire à $(a_2 - a_1) \dots (a_n - a_1)$ qui n'est pas dans m. Désignons par A_{i1} le mineur correspondant à l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la première colonne et posons : $x_1 = A_{11}e_1 + \cdots + A_{n1}e_n$; il est clair que $(u - a_1 1)(x_1) = 0$, soit $u(x_1) = a_1x_1$, et puisque A_{11} n'est pas dans m, x_1 n'est pas dans mE.

Nous avons ainsi pour chaque a_i $(i = 1, \dots, n)$ un vecteur x_i non dans mE tel que $u(x_i) = a_ix_i$. Les classes $\bar{x}_i$ $(i = 1, \dots, n)$ sont des vecteurs linéairement indépendants de E/mE et forment donc une base de E/mE sur k. Les éléments $x_1, \dots, x_n$

forment, donc, un système minimal de générateurs de E sur A et u est diagonalisable.

Proposition 4. — *Si le polynôme caractéristique de l'endomorphisme u est de la forme* $\chi_u(X) = (X - a_1) \ldots (X - a_n)$ *où* a_i *est un élément de* A *tel que* a_i *ne soit pas congru à* a_j *modulo* m *si* $i \neq j$, *u est diagonalisable.*

On en déduit immédiatement :

Corollaire. — *Si* A *est hensélien et si le polynôme caractéristique de* $\overline{u}$, *endomorphisme induit par u dans* E/mE, *a toutes ses racines dans* A/m *et distinctes, alors u est diagonalisable.*

Une condition nécessaire pour que u soit diagonalisable est que $\chi_u(X)$ soit de la forme $(X - a_1)^{\alpha_1} \ldots (X - a_p)^{\alpha_p}$. C'est évident.

D'autre part, nous aurions pu démontrer une proposition analogue à la proposition 4 dans le cas où A est commutatif non forcément local en remplaçant la condition a_i non congru à a_j modulo m par $a_i - a_j$ inversible. En fait, la partie la plus intéressante de ce chapitre est constituée par ce qui suit. Nous n'insisterons donc pas...

3. Endomorphismes de modules de type fini sur un anneau local hensélien.

Dans tout ce qui suit, A sera un anneau local *hensélien*, noethérien ou non. Le A-*module de type fini* E *n'est pas supposé libre* dans tout ce paragraphe.

Supposons que $\overline{E} = \overline{E}_1 \oplus \cdots \oplus \overline{E}_n$ soit une décomposition en somme directe de l'espace vectoriel $\overline{E} = E/mE$ et supposons que les projecteurs correspondant $\overline{p}_1, \ldots, \overline{p}_n$ appartiennent à $\mathrm{I}m(\mathfrak{L}(E) \to \mathfrak{L}(\overline{E}))$.

Le théorème A des préliminaires nous permet de relever ces projecteurs en des idempotents deux à deux orthogonaux de $\mathfrak{L}(E)$: en effet, soient $u_1, \ldots, u_n$ des représentants de $\overline{p}_1, \ldots, \overline{p}_n$ respectivement; $A[u_1, \ldots, u_n]$ est une A-algèbre au sens d'Azumaya dont $k[\overline{p}_1, \ldots, \overline{p}_n]$ est un quotient et le relèvement en idempotents deux à deux orthogonaux peut se faire dans $A[u_1, \ldots, u_n]$; si A est noethérien, ces précautions sont inutiles.

Soient $p_1, \ldots, p_n$ ces idempotents relevés. Montrons que $p_1 + \cdots + p_n = 1$: nous savons que

$$p_1 + \cdots + p_n \in 1 + \mathrm{Hom}_A(E, mE)$$

et, par suite, que $p_1 + \cdots + p_n = s$ est inversible dans $L(E)$. Si s^{-1} est son inverse, $1 = s^{-1}p_1 + \cdots + s^{-1}p_n$ et, par multiplication à droite par p_i, $s^{-1}p_i = p_i$, d'où le résultat.

Posons $E_i = p_i(E)$; nous en déduisons : $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$ et $E_i/mE_i = E_i + mE/mE = \overline{E}_i$ pour $i = 1, \ldots, n$. Nous avons donc relevé certaines décompositions en somme directe de $\overline{E}$ en décompositions en somme directe de E.

Cette technique va nous permettre de retrouver le corollaire de la proposition 4 : en reprenant les notations utilisées, $\chi_{\bar{u}}(X) = (X - \bar{a}_1) \ldots (X - \bar{a}_n)$ avec $\bar{a}_i \neq \bar{a}_j$ si $i \neq j$ entraîne que $\overline{E} = \overline{E}_1 \oplus \cdots \oplus \overline{E}_n$ où $\overline{E}_i$ est le sous-espace propre, de dimension 1, correspondant à la valeur propre $\bar{a}_i$. Les projecteurs $\bar{p}, \ldots, \bar{p}_n$ associés sont dans $k[\bar{u}]$. Or,

$$\begin{aligned} k[\bar{u}] &= (A[u] + \mathrm{Hom}_A(E, mE))/\mathrm{Hom}_A(E, mE) \\ &= A[u]/(A[u] \cap \mathrm{Hom}_A(E, mE)) \end{aligned}$$

et nous pourrons faire le relèvement en des idempotents deux à deux orthogonaux $p_1, \ldots, p_n$ de $A[u]$. Il en résulte que le sous-module $E_i = p_i(E)$ est laissé invariant par u. Il est clair, d'autre part, que E_i est monogène, soit $E_i = Ax_i$ et il est immédiat que $u(x_i) - a_ix_i \in mE \cap E_i = mE_i$; il existe, donc, r_i dans m tel que $u(x_i) = (a_i + r_i)\,x_i = b_ix_i$ et le corollaire est démontré.

Rappelons avec nos notations la proposition 1 de (5) § 5 : *Soit $\overline{E}$ un espace vectoriel de dimension finie n sur le corps commutatif k et soit $\bar{u}$ un endomorphisme de $\overline{E}$; pour tout polynôme unitaire $\bar{p}(X)$ divisant le polynôme minimal $\bar{q}(X)$ de $\bar{u}$, soit $\overline{M}_{\bar{p}}$ le sous-espace vectoriel formé des $\bar{x}$ de $\overline{E}$ tels qu'il existe un entier r avec $\bar{p}(\bar{u})^r(\bar{x}) = 0$. Alors, $\overline{M}_{\bar{p}}$ est stable par $\bar{u}$ et il existe des polynômes $\bar{s}_{\bar{p}}$ tels que, pour tout $\bar{x}$ de $\overline{E}$, le composant de $\bar{x}$ dans $\overline{M}_{\bar{p}}$ soit $\bar{s}_{\bar{p}}(\bar{u})(\bar{x})$.*

Comme précédemment, les projecteurs correspondant à la décomposition en somme directe considérée pour $\overline{E}$ peuvent être relevés en des projecteurs de E dans $A[u]$ et nous obtenons une décomposition en somme directe $E = \oplus M_p$ où les M_p sont

stables par u et tels que, si $p(X)$ désigne un représentant de $\overline{p}(X)$ dans $A[X]$, $p(u)^r(x)$ appartienne à $m E \cap M_p = m M_p$ si x est dans M_p. Il existe, de plus, des polynômes $s_p(X)$ de $A[X]$ tels que le composant de x dans M_p soit $s_p(u)(x)$.

En particulier, si k est algébriquement clos, par exemple si $A = C\{\{X_1, \ldots, X_n\}\}$, ou encore si $\overline{u}$ est diagonalisable, nous voyons que si $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_c$ sont les racines distinctes du polynôme caractéristique $\chi_{\overline{u}}(X)$ de $\overline{u}$, il existe une décomposition en somme directe $E = \oplus M_i$ où les M_i sont stables par u et tels que si x appartient à M_i, il existe un entier r tel que $(u - a_i)^r(x)$ appartienne à $m M_i$ si a_i est un représentant de $\overline{a}_i$. Si $\overline{u}$ est diagonalisable, on sait que les $M_{X - \overline{a}_i}$ coïncident avec les sous-espaces propres $V_{\overline{a}_i}$. On en déduit une réduction partielle qui nous sera utile ultérieurement.

Proposition 5. — *Si* A *est hensélien et si* $\overline{u}$ *est diagonalisable,* u *admet une matrice de représentation tableau diagonal de matrices de la forme :*

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a_{i_1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{i_{p(i)}} \end{vmatrix}$$

où les coefficients non diagonaux sont dans m *et où*

$$\overline{a}_{i_1} = \cdots = \overline{a}_{i_{p(i)}} = \overline{a}_i$$

si le polynôme caractéristique de $\overline{u}$ *est* $\Pi(X - \overline{a}_i)^{p(i)}$.

Supposons maintenant que le corps des restes soit algébriquement clos et ne faisons aucune hypothèse sur $\overline{u}$. Reprenons la décomposition en somme directe ci-dessus. Si x appartient à M_i, $(u - a_i)^r(x) \in m M_i$. Définissons φ par la condition que la restriction de φ à M_i soit $a_i 1$. Si $\varpi = u - \varphi$, il existe un entier N tel que $\varpi^N(x) \in m E$ pour tout x de E. De plus, il existe des polynômes $s_i(X)$ de $A[X]$, tels que le composant de x dans M_i soit $s_i(u)(x)$. Il en résulte que $\varphi = a_i s_i(u)$ et que φ et ϖ sont des polynômes en u à coefficients dans A.

Proposition 6. — *Soient* A *un anneau local hensélien de corps des restes algébriquement clos et* E *un* A*-module de type fini. Tout endomorphisme* u *de* E *peut s'écrire* $u = \varphi + \varpi$ *où* φ *et* ϖ *sont des endomorphismes de* E, φ *étant diagonalisable et*

w tel qu'une de ses puissances appartienne à $\mathrm{Hom}_A(E, mE)$, *v et w étant des polynômes en u à coefficients dans* A.

Si A n'est pas un corps, l'unicité n'est pas assurée. Si A est artinien, on voit que w est nilpotent.

4. Endomorphismes d'un module de type fini sur un anneau local factoriel hensélien.

L'hypothèse supplémentaire A factoriel se justifie par le fait que tout anneau local régulier est factoriel. En particulier, tout ce qui suit sera valable pour $A = C\{\{X_1, \ldots, X_n\}\}$ où $k[[X_1, \ldots, X_n]]$.

Le théorème suivant est dû à Frobénius. Il est de démonstration facile et nous renvoyons à : Jacobson (Nathan) *Lectures in abstract Algebra*, vol II, p. 102, Van Nostrand (1953).

THÉORÈME F. — *Soit* A *un anneau factoriel et soit* M *un élément de* $M_n(A)$. *Soit* $\chi_M(X) = \det(X1 - M)$ *et désignons par* $\theta(X)$ *le plus grand commun diviseur des mineurs d'ordre $n-1$ de* $(X1 - M)$ *et par* $m(X)$ *le polynôme* $\chi_M(X)/\theta(X)$. *Alors,*

1) $m(M) = 0$.

2) *Si* $n(X)$ *de* $A[X]$ *est tel que* $n(M) = 0$, $n(X)$ *est divisible par* $m(X)$.

3) *Tout facteur irréductible de* $\chi_M(X)$ *est facteur de* $m(X)$.

3) résulte, en fait, de ce que $m(X)^n$ est divisible par $\chi_M(X)$.

Nous supposons dans ce paragraphe que le A-module de type fini E est *libre*. Soit u un endomorphisme de E. Si $\bar{u}$ est l'endomorphisme induit sur E/mE, on n'a pas, en général, $\overline{m_u(X)} = m_{\bar{u}}(X)$ où $m_u(X)$ et $m_{\bar{u}}(X)$ désignent respectivement les polynômes minimaux de u et $\bar{u}$ et où $\overline{m_u(X)}$ est obtenu par réduction modulo m des coefficients de $m_u(X)$. En effet, si $A = k[[Y]]$ et si u est $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1+Y \end{vmatrix}$, il est immédiat que $\overline{m_u(X)} = (X-1)^2$ tandis que $m_{\bar{u}}(X) = X - 1$.

Il est, toutefois, clair que $\overline{m_u(X)}$ est divisible par $m_{\bar{u}}(X)$. Un cas simple où l'égalité sera réalisé est celui où

$$m_u(X) = (X - a_1) \ldots (X - a_p)$$

avec a_i non congru à a_j modulo m si $i \neq j$. Ceci implique d'ailleurs :

1) $\overline{u}$ est diagonalisable.

2) $\chi_u(X) = (X - a_1)^{\alpha_1} \dots (X - a_p)^{\alpha_p}$.

Nous nous proposons de montrer :

THÉORÈME. — *Soient* A *un anneau local factoriel hensélien d'idéal maximal* m *et* E *un* A*-module ayant une base finie. Si* u *est un endomorphisme de* E *de polynôme minimal de la forme* $(X - a_1) \dots (X - a_p)$ *avec* a_i *non congru à* a_j *modulo* m *si* $i \neq j$, *alors,* u *est diagonalisable.*

DÉMONSTRATION. — Soit $E = \oplus M_i$ où les M_i ont la signification de § 4. La restriction u_i de u à M_i est de la forme $\begin{vmatrix} a_{i_1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{i_{r(i)}} \end{vmatrix}$ où a_{i_j} est congru à a_i modulo m.

Il est immédiat que

$$\chi_u(X) = \chi_{u_i}(X) \prod_{i \neq j} \chi_{u_j}(X) = (X - a_i)^{\alpha_i} \prod_{i \neq j} (X - a_j)^{\alpha_j}.$$

Puisque $\chi_{\overline{u}_i} = (X - \overline{a}_i)^{\alpha_i}$ et a_i non congru à a_j modulo m si $i \neq j$, on en déduit que :

$$\chi_{u_i}(X) = (X - a_i)^{\alpha_i}.$$

Le polynôme minimal $m_{u_i}(X)$ de u_i divise le polynôme minimal $m_u(X)$ de u mais également $\chi_{u_i}(X)$. Donc, $m_{u_i}(X) = a_i$.

Si la matrice de représentation de u_i est d'ordre 1, il n'y a rien à démontrer. Supposons la donc d'ordre supérieur ou égal à 2. S'il y avait un coefficient b_{kl} non diagonal, le mineur de b_{kl} dans det $(X1 - u_i)$ serait un polynôme de degré $r(i) - 2$ en X et le plus grand commun diviseur des mineurs d'ordre $r(i) - 1$ de det $(X1 - u_i)$ serait de degré au plus $r(i) - 2$. Ceci est incompatible avec le fait que $m_{n_i}(X)$ est de degré 1. Les seuls coefficients non nuls sont donc diagonaux et il est alors immédiat que $a_{i_j} = a_i$ pour $j = 1, \dots, r(i)$. Le théorème est démontré.

Dans le cas où A est un corps, nous retrouvons une condition nécessaire et suffisante, d'ailleurs utilisée dans la démonstration ci-dessus, pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable. Cette condition suffisante dans le cas où A est local factoriel hensélien n'est évidemment pas nécessaire.

D'autre part, si on suppose que $m_u(X) = (X - a_1) \ldots (X - a_p)$ avec seulement $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$, l'exemple $A = k[[Y]]$ et $u = \begin{vmatrix} 1 & Y \\ 0 & 1 - Y^2 \end{vmatrix}$ montre que u n'est pas forcément diagonalisable.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Azumaya, On maximally central Algebras, *Nagoya math. journal*, t. 2, 1951, 119-150.

[2] R. Baer, Automorphism Rings of primary abelian operator Groups, *Ann. of math*, 1943, 192-227.

[3] N. Bourbaki, *Algèbre*, chap. 2, Hermann, 1955.

[4] N. Bourbaki, *Algèbre*, chap. 3, Hermann, 1952.

[5] N. Bourbaki, *Algèbre*, chap. 6 et 7, Hermann, 1952.

[6] N. Bourbaki, *Algèbre*, chap. 8, Hermann, 1958.

[7] P. Cartier, Questions de rationnalité des diviseurs en géométrie algébrique. Appendice, *Bull. soc. math. de France*, t. 86, fasc. 3, 1958, 245-250.

[8] Cartan-Eilenberg, Homological algebra, *Princeton University Press*, 1956.

[9] A. Chatelet, *Les groupes abéliens finis et les modules de points entiers*, Paris, Gauthier-Villars et Lille, Bibliothèque universitaire, 1924.

[10] P. Dubreil, *Algèbre*, Gauthier-Villars, 1954.

[11] P. Gabriel, *Objets injectifs dans les catégories abéliennes. Sem.*, P. Dubreil, M. L. Dubreil-Jacotin et C. Pisot, 1958-59.

[12] N. Jacobson, Structure of Rings, *Providence. Amer. math. Soc.*, 195, (*Amer. math. soc. coll. publ.* 37).

[13] I. Kaplansky, Infinite abelian Groups, *Ann. Arbor. Univ. of Michigan Providence*, 1954.

[14] K. Morita, Duality for Modules and its Applications to the Theory of Rings with minimum conditions. *Sc. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku*, sect. A, 1958, 83-142.

[15] C. Nesbitt, On the regular Representations of Algebras, *Ann. of. math.*, 39, 1938, 634-658.

[16] D. Rees, The grade of an Ideal or Module, *Proc. Cambridge. Phil. Soc.*, 53, 1957, 28-42.

[17] P. Samuel, Algèbre locale, Gauthier-Villars. *Mem. Sc. math.*, fasc. 1, 1953.

[18] P. Samuel, Remarques sur le lemme de Hensel, *Proc. of the Int. Congress of Math.*, 1954, 63-64.

[19] J. P. Serre, Géométrie algébrique et géométrique analytique, *Ann. Inst. Fourier*, t. 6, 1955-56, 1-42.

[20] M. Shiffman, The Ring of Automorphisme of an abelian Group, *Duke math. Journal*, t. 6, 1940, 579-597.

[21] Zariski-Samuel, *Commutative Algebra*, Van Nostrand, 1958.

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
11, (1961), 385-475.

THEORY OF BESSEL POTENTIALS. PART I. [1, 2]

by N. ARONSZAJN and K. T. SMITH

INTRODUCTION

The present paper is the second in a series, the purpose of which is to give a basis for a treatment of differential eigenvalue and boundary value problems.

In the first paper [1], a general theory of functional spaces and functional completion was developed. Now, this general theory is applied to special spaces which are most important for the study of differential problems, especially of elliptic type.

Many results of this paper were announced several years ago and the paper was then referred to as « Theory of Potentials ». It was decided that the original title was misleading since we treat only potentials corresponding to special types of kernels and not those corresponding to more or less arbitrary kernels as has been done for instance in [7 *a*], [13 *a*], and [13 *c*].

Originally, the authors used the Riesz potentials of order α, i.e. potentials corresponding to kernels

$$(1) \qquad R_\alpha(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n-a}{2}\right)}{2^\alpha \pi^{n/2}\Gamma(\alpha/2)}|x|^{\alpha-n}, \qquad 0 < \alpha < n,$$

in n-dimensional Euclidean space R^n.

Despite the fact that many elegant and important results

[1] Paper written under contract Nonr 58 304 with Office of Naval Research.
[2] Part II to appear in the next volume of this journal.

were obtained for these potentials by Riesz, Frostman, Cartan, and others, their application to differential problems was sometimes awkward. The reason for this was the limitation on the order, $\alpha < n$, whereas for differential problems we need potentials of arbitrarily high order. We were thus led to consider potentials based on the kernels

$$G_\alpha(x) = \frac{1}{2^{\frac{n+\alpha-2}{2}}\pi^{n/2}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} K_{\frac{n-\alpha}{2}}(|x|)|x|^{\frac{\alpha-n}{2}} \tag{2}$$

where $K_{\frac{n-\alpha}{2}}$ is the modified Bessel function of third kind. It therefore seems appropriate to call the corresponding potentials « Bessel potentials of order α ».

The kernels (2) which are defined for all $\alpha > 0$ have the same basic properties as Riesz kernels, i.e. positiveness, composition theorem, etc., and in addition they converge to zero exponentially at infinity. This makes for much greater ease in the development of the theory. For $\alpha < n$, R_α represents the principal part of G_α at the origin with the result that the corresponding Riesz and Bessel potentials form the same classes of functions in every bounded portion of the space. The classes of potentials P^α which form the main object of research in this paper are exactly the Bessel potentials of order α of L^2 functions. The potentials of L^p functions would be of interest in themselves (in the case of Riesz potentials they were considered by B. Fuglede [11 *a*]), but they do not enter into the framework of our applications to differential problems which are based on Hilbert space or « quadratic » methods [3].

The first part of the paper (Chapters I and II presented here) gives the theory of potentials of order α in the whole space R^n. The second part will deal with these classes in subdomains of R^n and also on differentiable and Riemannian manifolds.

The contents and main results of Chapters I and II can be summarized as follows.

[3] This means they are based on the use of quadratic norms in functional spaces, or more generally, vector spaces; by some authors they are referred to as « L^2 methods ».

In Chapter I we recall the main results of the theory of functional spaces and functional completion [1] and add a few results not given before.

In the first section of Chapter II we consider functions $u \in C_0^\infty$ and define the Dirichlet integral of order α, $d_\alpha(u)$ for arbitrary $\alpha \geqq 0$. This is done at first by using Fourier transforms (as in [8] and [1]), after which a direct form for $d_\alpha(u)$ is given in terms of derivatives of u of orders $\leqq \alpha$. In [1] we showed that for $\alpha < \frac{n}{2}$, C_0^∞, with norm $\sqrt{d_\alpha(u)}$, has a perfect functional completion which coincides with the Riesz potentials of order α of L^2 functions. We show now that for $\alpha \geqq \frac{n}{2}$, C_0^∞ with this norm has no functional completion. We then consider the norm $|u|_\alpha^2 = \|u\|_{L^2}^2 + d_\alpha(u)$, and the norm $\|u\|_\alpha$ (equivalent to $|u|_\alpha$) which is first expressed by Fourier transforms and then directly in terms of derivatives of u.

In Section 2 we show that C_0^∞, with the norm $|u|_\alpha$, has a functional completion for all α relative to the class $\mathfrak{A}_0$ of exceptional sets of Lebesgue measure 0. We study the basic properties of all (imperfect) functional completions of this space relative to a class of exceptional sets contained in $\mathfrak{A}_0$. This space has a perfect functional completion (shown in § 5 to be P^α).

In order to study the properties of the perfect completion P^α, it was found convenient to replace $|u|_\alpha$ in C_0^∞ by the equivalent norm $\|u\|_\alpha$, and this last norm is maintained in the remainder of the chapter.

In Sections 3 and 4 the basic properties of the Bessel functions K_ν are collected, and the resulting properties of the kernel G_α are given.

In Section 5, as was mentioned above, we prove that P^α is the perfect functional completion of C_0^∞ with norm $\|u\|_\alpha$, and the basic properties of P^α and of its class of exceptional sets $\mathfrak{A}_{2\alpha}$ (4) are given in so far as they are obtainable from the general theory of functional completion. For $\alpha > n/2$, P^α is a proper functional Hilbert space (its reproducing kernel is $G_{2\alpha}(x-y)$).

In Section 6 we define and investigate the capacities of

(4) This is in accordance with established notation: for $\alpha < n/2$, the sets in $\mathfrak{A}_{2\alpha}$ are the sets of outer capacity 0 of order 2α in the sense of Frostman.

order 2α in a manner similar to that used by Frostman [11] and Cartan [6] in their study of Riesz potentials. The outer capacity $\gamma_{2\alpha}$, of order 2α, thus defined, coincides with the capacity $c_2 = c_1^2$ as defined for P^α by the general theory of functional completion. It is worthwhile noticing that the logarithmic capacity γ_n, which for Riesz potentials requires special treatment with definitions and proofs somewhat changed, does not present any exceptional character for our potentials.

Sections 7 and 8 contain the most important results from the point of view of applications to differential problems. In Section 7, Theorem I gives differentiability and continuity properties of functions $u \in P^\alpha$ which allow $||u||_\alpha^2$ and $d_\alpha(u)$ to be defined by the same direct formulas which were used in Section 1 for functions in C_0^∞. In conjunction with Theorem I, Theorem II gives necessary and sufficient conditions for a function u to belong to P^α. Remarks 2 and 3 which follow Theorem II weaken these conditions quite considerably.

The theorems in Section 8 concern the restriction of a function $u \in P^\alpha$ in R^n to a subspace $R^k \subset R^n$. Theorems 1 *a* and 1 *b* show, essentially, that for a function u' defined on R^k to be a restriction of a function $u \in P^\alpha\,(R^n)$, it is necessary and sufficient that $u' \in P^{\alpha - \frac{n-k}{2}}\,(R^k)$. Theorem 1 *c* gives a basis for what we call the compensation method which is very useful in the study of elliptic differential problems. In Chapter IV (which is to appear shortly in Part II of this paper) these theorems, are extended to restrictions to submanifolds of R^n.

Section 9 treats functions u defined in an open set $D \subset R^n$ which are locally in P^α; the class of these functions is denoted by $P_{\mathrm{loc}}^\alpha(D)$. These classes form a first step to the introduction of the classes P^α on a Riemannian manifold.

In Section 10, we study the relations between L^q and P^α classes. We depart from our general restriction and consider Bessel potentials of L^p functions (the proofs do not differ from those in the case $p = 2$). We obtain the following theorem: if $q \geqq p \geqq 1$ and one of the two conditions holds:

1° $\frac{1}{q} \geqq \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ with $p > 1$ and $\frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n} \neq 0$;

2° $\frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ with $p = 1$ or $\frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n} = 0$,

then $f \in L^p$ implies $G_\alpha f \in L^q$. For Riesz potentials, by Soboleff's theorem we can consider only the case when condition 1 is satis fied and then we have $R_\alpha f \in L^q$ in general only for $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$.

In Section 11 — the last section — we compare our classes P^α with the corresponding classes of Riesz potentials, B-L classes, W^m and H^m classes. These classes, introduced by different authors, have similarities either in definition or purpose to our P^α classes.

Before finishing the Introduction we mention the recent papers of L. Slobodetzky [14 *a*] [14 *b*] where expressions similar to our direct formulars for $d_\alpha(u)$ are introduced and applied.

We should also mention that many of the results of the present paper and of its second part were referred to and applied in several papers by the authors, in particular in [0], [15 *a*], and [2]. In these references, however, we were considering the corresponding results for Riesz potentials.

TABLE OF CONTENTS

CHAPTER I

SUMMARY OF THE GENERAL THEORY OF FUNCTIONAL COMPLETION

This Chapter contains a short summary of the definitions and results from the general theory of functional completion which are needed in the rest of the paper. It is taken from [1] but it also contains a few minor observations which are not included in [1]. For simplicity, only complex spaces are considered. The changes which must be made in the real case are quite trivial.

§ 1. — Functional spaces and functional completion.

An exceptional class on a set $\mathcal{E}$ is a hereditary and σ-additive class of subsets of $\mathcal{E}$, that is, a class $\mathfrak{A}$ of subsets of $\mathcal{E}$ with the two properties: (*a*) If $A \subset B$ and $B \in \mathfrak{A}$, then $A \in \mathfrak{A}$; (*b*) if each member of a sequence of sets belongs to $\mathfrak{A}$, then the union belongs to $\mathfrak{A}$. Henceforth $\mathfrak{A}$ denotes an exceptional class on a set $\mathcal{E}$.

A property of points of $\mathcal{E}$ is said to hold except $\mathfrak{A}$ (to be written exc. $\mathfrak{A}$) if the set where it fails to hold belongs to $\mathfrak{A}$. If u and v are complex valued functions defined on $\mathcal{E} - A$ and $\mathcal{E} - B$, respectively, and α is a complex number, then $u + v$ denotes the function defined on $\mathcal{E} - (A \cup B)$ by pointwise addition and αu denotes the function defined on $\mathcal{E} - A$ by pointwise multiplication. It is obvious that if u and v are defined exc. $\mathfrak{A}$, then $u + v$ and αu are defined exc. $\mathfrak{A}$.

A linear functional class relative to $\mathfrak{A}$ (rel. $\mathfrak{A}$) is a class $\mathcal{F}$ of complex valued functions defined on $\mathcal{E}$ exc. $\mathfrak{A}$ such that

if u and v belong to $\mathfrak{F}$ and α is a complex number, then $u+v$ and αu belong to $\mathfrak{F}$. $\mathfrak{A}$ is the exceptional class for $\mathfrak{F}$. The saturated extension of $\mathfrak{F}$ is the class of all functions defined on $\mathcal{E}$ exc. $\mathfrak{A}$ which are equal exc. $\mathfrak{A}$ to some function in $\mathfrak{F}$, and $\mathfrak{F}$ is saturated if it is identical with its saturated extension.

A normed functional class $\mathfrak{F}$ rel $\mathfrak{A}$ is a linear functional class $\mathfrak{F}$ rel $\mathfrak{A}$ on which there is defined a norm $\|u\| \geqq 0$ with the properties: 1° $\|u\| = 0$ if and only if $u(x) = 0$ exc. $\mathfrak{A}$; 2° $\|\alpha u\| = |\alpha|\,\|u\|$ for any complex α; 3° $\|u\| \leqq \|u - v\| + \|v\|$ (5). From 3° and 1° it follows: 4° if $u(x) = v(x)$ exc. $\mathfrak{A}$ then $\|u\| = \|v\|$. The saturated extension of a normed functional class rel $\mathfrak{A}$ is also a normed functional class rel. $\mathfrak{A}$ (when the norm is extended in the obvious way).

If in a functional class $\mathfrak{F}$ we introduce the equivalence relation $f \sim f' \Longleftrightarrow f(x) = f'(x)$ exc. $\mathfrak{A}$, the set of equivalence classes obviously forms a vector space V. If $\mathfrak{F}$ is normed, V becomes a normed space (since $f \sim f'$ implies $\|f\| = \|f'\|$). In this case we transfer without further explanation all the notions usual in a normed vector space to the class $\mathfrak{F}$. For instance: $f_n \rightarrow f$ (f_n converges to f in norm); $\{f_n\}$ is a Cauchy sequence; a subset of $\mathfrak{F}$ is dense in $\mathfrak{F}$; $\mathfrak{F}$ is complete or separable, etc.

A functional space rel $\mathfrak{A}$ is a normed functional class rel $\mathfrak{A}$ in which there is the following relation between the norm and the values of the functions:

1.1. The functional space property. — *Every sequence which converges (in norm) to 0 contains a subsequence which converges to 0 pointwise exc.* $\mathfrak{A}$.

The saturated extension of a functional space rel. $\mathfrak{A}$ is also a functional space rel. $\mathfrak{A}$.

A functional completion of a normed functional class $\mathfrak{F}$ rel. $\mathfrak{A}$ is a functional space $\tilde{\mathfrak{F}}$ rel. $\tilde{\mathfrak{A}}$ such that:

(*a*) $\tilde{\mathfrak{A}} \supset \mathfrak{A}$.

(*b*) Each function $u \in \mathfrak{F}$ belongs to $\tilde{\mathfrak{F}}$ and has the same norm in both classes.

(*c*) $\mathfrak{F}$ is dense (in norm) in $\tilde{\mathfrak{F}}$.

(*d*) $\tilde{\mathfrak{F}}$ is complete.

(5) The usual form of Minkowski's inequality, $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$, is not adequate here since in general F is not a vector space: $(u + v) - v$ is not identical with u (u may have a smaller exceptional set than $(u + v) - v$).

We say that $\tilde{\mathfrak{F}}$ is a functional completion of $\mathfrak{F}$ rel. $\tilde{\mathfrak{A}}$. The saturated extension of a functional completion of a normed functional class is also a functional completion of the given normed functional class. Since it is technically convenient to work with saturated completions, and it involves no loss in generality ,it will be assumed that all functional completions are saturated.

A functional completion is perfect if its exceptional class is contained in the exceptional class of every functional completion.

The main problems in the theory of functional spaces and functional completion are: (i) to determine when a normed functional class is a functional space; (ii) to determine when a normed functional class has a functional completion; (iii) to determine when a normed functional class has a perfect functional completion ([6]); (iv) to describe the exceptional class for the perfect completion.

It is easy to see that if a normed functional class has a functional completion relative to one exceptional class, then usually it also has a functional completion relative to infinitely many others. In this connection, however, the following result holds, and is easily proved.

1) *Relative to a given exceptional class there is at most one (saturated) functional space which is a functional completion of a given normed functional class. In particular, the perfect completion, when there is one, is uniquely determined.*

It is clear that the properties of a normed functional class which have been defined so far remain the same if the norm on the class is replaced by an equivalent norm. In particular, if there exists a functional completion rel. $\tilde{\mathfrak{A}}$ with respect to one of two equivalent norms, then there exists a functional completion rel. $\tilde{\mathfrak{A}}$ with respect to the other, and the two completions are composed of the same functions. A converse of this also holds.

2) *If a linear functional class* $\mathfrak{F}$ rel. $\mathfrak{A}$ *is a complete functional space with respect to two norms, then the two norms are equivalent.* More generally.

([6]) It is not known whether the existence of some functional completion implies the existence of a perfect functional completion.

3) *If $\mathfrak{F}$ is a complete functional space rel. $\mathfrak{A}$, and if $\mathfrak{F}' \subset \mathfrak{F}$ is a complete functional space rel. $\mathfrak{A}$ with respect to a norm, $||u||'$, then there is a constant c such that for all $u \in \mathfrak{F}'$, $||u|| \leq c||u||'$.*

Proff. — The identity mapping from $\mathfrak{F}'$ into $\mathfrak{F}$ is a closed mapping. In fact, if $u_n \rightarrow u$ in $\mathfrak{F}'$ and $u_n \rightarrow v$ in $\mathfrak{F}$ then by the functional space property some subsequence $\{u_{n_k}\}$ converges pointwise exc. $\mathfrak{A}$ to both u and v. Hence $u = v$ exc. $\mathfrak{A}$. By using the closed graph theorem we obtain the statement.

§ 2. — The set functions δ and $\tilde{\delta}$ and capacities.

In this section we describe certain functions and classes of sets which lead toward solutions, partial or complete, to the problems listed in section 1. The classes provide explicit bounds for the exceptional class of a perfect completion; in every example where a perfect completion has been found, its exceptional class coincides with the bounds given. Throughout the section, $\mathfrak{A}$ is a fixed exceptional class and $\mathfrak{F}$ is a fixed normed functional class rel. $\mathfrak{A}$; $\tilde{\mathfrak{A}}$ is an exceptional class containing $\mathfrak{A}$.

The class $\mathfrak{L}$ is the class of all sets $B \subset \mathcal{E}$ for which there is a function $u \in \mathfrak{F}$ satisfying $|u(x)| \geq 1$ on B exc. $\mathfrak{A}$. For each $B \in \mathfrak{L}$, $\delta(B)$ is the infimum of $||u||$ over all such u.

The class $\tilde{\mathfrak{L}}$ is the class of all sets $B \subset \mathcal{E}$ for which there is a Cauchy sequence $\{u_n\}$ in $\mathfrak{F}$ satisfying $\liminf |u_n(x)| \geq 1$ on B exc. $\mathfrak{A}$. For each $B \in \tilde{\mathfrak{L}}$, $\tilde{\delta}(B)$ is the infimum of $\lim ||u_n||$ over all such Cauchy sequences.

Remark. — If $\mathfrak{F}$ is a complete functional space, then clearly $\tilde{\delta} = \delta$.

If $\mathfrak{L}^0$ and $\tilde{\mathfrak{L}}^0$ are the classes of null sets of δ and $\tilde{\delta}$, respectively, then obviously $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{L}^0 \subset \tilde{\mathfrak{L}}^0$. Conversely, there is the following result.

1) *If $\mathfrak{F}$ is a functional space rel. $\tilde{\mathfrak{A}}$, then $\tilde{\mathfrak{A}} \supset \mathfrak{L}^0_\sigma$. If $\mathfrak{F}$ has a functional completion rel. $\tilde{\mathfrak{A}}$, then $\tilde{\mathfrak{A}} \supset \tilde{\mathfrak{L}}^0_\sigma$* [7].

Upper bounds for the exceptional class of a perfect completion are provided by additional set functions called capacities.

[7] $\mathfrak{L}^0_\sigma$ is the class of countable unions of sets in $\mathfrak{L}^0$.

An admissible capacity for a normed functional class $\mathfrak{F}$ is a set function c on the hereditary σ-ring $\mathfrak{L}_\sigma$ with the following properties.

(a) c is an outer measure on $\mathfrak{L}_\sigma$ [8].

(b) For each $B \in \mathfrak{L}$, $c(B)$ is finite.

(c) To each $\varepsilon > 0$ corresponds an $\eta < 0$ such that if $\delta(B) \leqq \eta$, then $c(B) \leqq \varepsilon$.

Each real valued, non-decreasing function $\varphi(t)$, defined for $t \geqq 0$ and satisfying $\varphi(0) = \lim\limits_{t \to 0} \varphi(t) = 0$ and $\varphi(t) > 0$ for $t > 0$, determines an admissible capacity c_φ as follows: For each $B \in \mathfrak{L}_\sigma$

$$c_\varphi(B) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \varphi[\delta(B_n)]$$

where the infimum is taken over all sequences $\{B_n\}$ in $\mathfrak{L}$ such that $B \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$. The most important of the admissible capacities are the capacities c_α determined by the functions

$$\varphi(t) = t^\alpha, \alpha > 0.$$

We use especially c_1 and c_2.

In the following propositions c is an admissible capacity for $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{A}_c$ is its class of null sets.

2) *Every Cauchy sequence in $\mathfrak{F}$ contains a subsequence which, for each $\varepsilon > 0$, converges uniformly outside some set of capacity $< \varepsilon$.*

3) $\tilde{\mathfrak{L}}_\sigma^0 \subset \mathfrak{A}_c$.

4) *$\mathfrak{F}$ is a functional space rel. $\mathfrak{A}_c$ if and only if $\|u\| = 0$ whenever $u(x) = 0$ exc. $\mathfrak{A}_c$. $\mathfrak{F}$ has a functional completion rel. $\mathfrak{A}_c$ if and only if $\|u_n\| \to 0$ whenever $\{u_n\}$ is a Cauchy sequence which converges pointwise to 0 exc. $\mathfrak{A}_c$.*

5) *If $\mathfrak{F}$ is a functional space rel. $\tilde{\mathfrak{A}}$ or if $\mathfrak{F}$ has a functional completion rel. $\tilde{\mathfrak{A}}$, then the same is true rel. $\tilde{\mathfrak{A}} \cap \mathfrak{A}_c$.*

6) *If c_φ and $\tilde{c}_\varphi$ are the φ capacities formed for $\mathfrak{F}$ and $\tilde{\mathfrak{F}}$ where $\tilde{\mathfrak{F}}$ is a functional completion of $\mathfrak{F}$ rel. $\tilde{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{A}_{c_\varphi}$, then $\tilde{c}_\varphi = c_\varphi$.*

Propositions 1) and 5) give.

[8] Measurability with respect to c plays no role in this theory.

7) *If $\mathfrak{F}$ has a perfect functional completion, then its exceptional class $\tilde{\mathfrak{A}}$ satisfies $\tilde{\mathfrak{L}}^0_\sigma \subset \tilde{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{A}_c$.*

In every example where a perfect functional completion has been found, it has turned out that in fact $\tilde{\mathfrak{L}}^0_\sigma = \mathfrak{A}_{c_1}$. Conversely, if $\tilde{\mathfrak{L}}^0_\sigma = \mathfrak{A}_{c_1}$ holds, then if there is any functional completion, there is a perfect functional completion, and its exceptional class is $\tilde{\mathfrak{L}}^0_\sigma = \mathfrak{A}_{c_1}$.

§ 3. Majoration properties.

The object of the section is to describe three majoration properties and a few of the results that can be derived for normed functional classes that possess them. All of the functional spaces which are commonly used in differential problems do possess at least the weakest of the three. The majoration properties are as follows.

POSITIVE MAJORATION PROPERTY. — *The set $\mathcal{E}$ can be written as $\mathcal{E} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n$ and constants M_n can be chosen in such a way that for every function $u \in \mathfrak{F}$ and every n there exists a function $u'_n \in \mathfrak{F}$ satisfying*

$$||u'_n|| \leq M_n ||u|| \text{ and } \operatorname{Re} u'_n(x) \geq |u(x)| \text{ for } x \in \mathcal{E}_n \text{ exc. } \mathfrak{A}.$$

GLOBAL MAJORATION PROPERTY. — *There is a constant M such that for every function $u \in \mathfrak{F}$ there exists a function $u' \in \mathfrak{F}$ satisfying*

$$||u'|| \leq M ||u|| \quad \text{and} \quad \operatorname{Re} u'(x) \geq |u(x)| \text{ exc. } \mathfrak{A}.$$

STRONG MAJORATION PROPERTY. — *For every function $u \in \mathfrak{F}$ there exists a function $u' \in \mathfrak{F}$ satisfying*

$$||u'|| \leq ||u|| \quad \text{and} \quad \operatorname{Re} u'(x) \geq |u(x)| \text{ exc. } \mathfrak{A}.$$

In so far as the general theory of functional completion is concerned, the main interest in the majoration properties lies in the next proposition.

1) *Let $\mathfrak{F}$ have the positive majoration property. Then $\tilde{\mathfrak{L}}^0_\sigma = \mathfrak{A}_{C_1}$, and the following statements are equivalent.*

(*a*) $\mathcal{F}$ *has a functional completion.*

(*b*) $\mathcal{F}$ *has a perfect functional completion, and the exceptional class for the perfect completion is* $\tilde{\mathfrak{L}}_\sigma^0 = \mathfrak{A}_{C_1}$.

(*c*) $||u_n|| \to 0$ *whenever* $\{u_n\}$ *is a Cauchy sequence which converges pointwise to* 0 *exc.* $\mathfrak{A}_{C_1}$.

It is not difficult to see that if $\mathcal{F}$ has the global majoration property, then $B \in \tilde{\mathfrak{L}}$ if and only if $c_1(B) < \infty$, and if $B \in \tilde{\mathfrak{L}}$ then $\tilde{\delta}(B) \geq c_1(B) \geq \frac{1}{M} \tilde{\delta}(B)$.

2) *If* $\mathcal{F}$ *has the strong majoration property, then* $\tilde{\delta} = c_1$; *if* $\mathcal{F}$ *is also complete, then* $\delta = \tilde{\delta} = c_1$.

3) *If* $\mathcal{F}$ *has the strong majoration property and is reflexive, then the infimum in the definition of* δ *is attained. Moreover, if* B *is the union of an increasing sequence* $\{B_n\}$, *then*

$$c_1(B) = \lim c_1(B_n).$$

Proof. — Let Γ_B denote the closed convex set of all $u \in \mathcal{F}$ satisfying $\operatorname{Re} u(x) \geq 1$ on B exc. $\mathfrak{A}$. From the strong majoration property it follows immediately that $\delta(B)$ is the distance from the origin to Γ_B, and in a reflexibe space this distance is attained.

Since a reflexive space is complete, it follows from 2) that $\delta = c_1$. Therefore, in order to prove the second part of the proposition, it is sufficient to show that if $\lim \delta(B_n) < \infty$ then $\delta(B) \leq \lim \delta(B_n)$. For each n, let $u_n \in \Gamma_{B_n}$ be such that $||u_n|| = \delta(B_n)$. Then, since $\lim ||u_n|| < \infty$, there is a subsequence $\{u_{n_k}\}$ which converges weakly to some $u \in \mathcal{F}$. For every $i \geq k$, $u_{n_i} \in \Gamma_{B_{n_k}}$. Therefore, since $\Gamma_{B_{n_k}}$ is closed and convex, $u \in \Gamma_{B_{n_k}}$, and, since this holds for every k, $u \in \Gamma_B = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Gamma_{B_{n_k}}$. Hence

$$\delta(B) \leq ||u|| \leq \lim ||u_{n_k}|| = \lim \delta(B_n).$$

The main interest in the strong majoration property, however, comes from its application in another connection, namely, in the theory of pseudo-reproducing kernels and in the theory of balayage and classical type capacities. It has been shown in [2] that if $\mathcal{F}$ is a real functional Hilbert space with a pseudo-reproducing kernel, then the kernel is non-negative if and

only if $\mathfrak{F}$ has the strong majoration property. It will not be necessary to make use of this result in the later chapters, since the kernels are given by explicit formulas from which their properties can be derived. Nevertheless, the result underlies many of the developments. In particular, it is the need for the strong majoration property and positive pseudo-reproducing kernels which is responsible for the choice of the norm $||u||_\alpha$ in Chapter II.

In many questions a change from one norm, $||u||$, to an equivalent one, $||u||'$, is immaterial. The classes $\mathfrak{L}$, $\tilde{\mathfrak{L}}$, $\mathfrak{L}^0$, and $\tilde{\mathfrak{L}}^0$ are unchanged; δ and $\tilde{\delta}$ are replaced by δ' and $\tilde{\delta}'$, c_1 and c_2 by c_1' and c_2', where

$$\frac{\delta'}{\delta}, \quad \frac{\tilde{\delta}'}{\tilde{\delta}}, \quad \frac{c_1'}{c_1}, \quad \frac{c_2'}{c_2},$$

all lie between two positive constants. Admissible capacities remain admissible capacities. The validity of the positive and global majoration properties is unchanged. However, the validity of the strong majoration property is dependent on the particular norm used, and the need for this property can impose a particular norm, even one which is more complicated than some equivalent norms.

§ 4. — Propre functional spaces.

A proper normed functional class is a normed functional class rel. $\{0\}$; a proper functional space is a functional space rel. $\{0\}$.

The complete functional spaces occuring in analysis arise most often as functional completions of proper normed functional classes. This does not mean, however, that the complete spaces are proper functional spaces, for in the process of completion it usually happens that some sets become exceptional. This cannot happen if the original proper normed functional class is a proper functional space.

1) *A proper normed functional class* $\mathfrak{F}$ *is a proper functional space if and only if for each* $x \in \mathfrak{E}$ *there is a constant* M_x *such that for every function* $u \in \mathfrak{F}$, $|u(x)| \leq M_x \, ||u||$.

It can be shown that if $\mathfrak{F}$ is a proper functional space, then $c_1(\{x\}) \neq 0$, provided there is at least one function in $\mathfrak{F}$ which does not vanish at x. More precisely, if μ_x denotes the set-function which takes the value 1 on every set containing x and the value 0 on every set not containing x, then for each set $B \in \mathfrak{L}_\sigma$, $\mu_x(B) \leq M_x c_1(B)$. The main result on functional completion of proper functional spaces is obtained easily from this fact and the results of the precedings section. Also it can be obtained directly.

2) *A proper functional space $\mathfrak{F}$ has a functional completion if and only if $\|u_n\| \to 0$ whenever $\{u_n\}$ is a Cauchy sequence which converges to 0 at each point. If a proper functional space has a functional completion, then it has a proper functional completion.*

§ 5. — Restrictions to a subset of $\mathcal{E}$.

Let $\mathfrak{F}$ be a normed functional class rel. $\mathfrak{A}$, and let D be a subset of $\mathcal{E}$ which does not belong to $\mathfrak{A}$. Let $\mathfrak{A}(D)$ denote the class of all subsets of D which belong to $\mathfrak{A}$. If $u \in \mathfrak{F}$, let u' denote the restriction of u to D. Each function u' is then defined on D exc. $\mathfrak{A}(D)$, and the class $\mathfrak{F}(D)$ of all u' is a linear functional class on D rel. $\mathfrak{A}(D)$. There is a natural norm on $\mathfrak{F}(D)$ given by

$$\|u'\|_D = \inf \|v\|,$$

the infimum being taken over all $v \in \mathfrak{F}$ for which $v' = u'$ exc. $\mathfrak{A}(D)$. In general, $\mathfrak{F}(D)$ is not a normed functional class rel. $\mathfrak{A}(D)$. However,

1) *If $\mathfrak{F}$ is a functional space rel. $\mathfrak{A}$ then $\mathfrak{F}(D)$ is a functional space rel. $\mathfrak{A}(D)$. Moreover, the set functions δ', $\tilde{\delta}'$, and c'_φ corresponding to $\mathfrak{F}(D)$ are the restrictions to D of δ, $\tilde{\delta}$, and c_φ. If c is any admissible capacity for $\mathfrak{F}$ then the restriction of c to D is an admissible capacity for $\mathfrak{F}(D)$. If $\mathfrak{F}$ is complete, so is $\mathfrak{F}(D)$.*

Proof. — If $u' = 0$ exc. $\mathfrak{A}(D)$, then $u' = 0'$ exc. $\mathfrak{A}(D)$, so that $\|u'\|_D \leq \|0\| = 0$. On the other hand, if $\|u'\|_D = 0$. then there is a sequence $\{v_n\}$ in $\mathfrak{F}$ such that $v'_n = u'$ exc.

$\mathfrak{A}(D)$ and such that $||\varphi_n|| \to 0$. By choosing a subsequence if necessary, it can be assumed that $\varphi_n \to 0$ pointwise exc. $\mathfrak{A}$. This obviously requires that $u' = 0$ exc. $\mathfrak{A}(D)$. Hence $\mathfrak{F}(D)$ is a normed functional class rel. $\mathfrak{A}(D)$. A similar argument shows that $\mathfrak{F}(D)$ is a functional space rel. $\mathfrak{A}(D)$.

It is evident that δ' is the restriction of δ to D, and also that if $A \subset D$ then $\tilde{\delta}'(A) \leq \tilde{\delta}(A)$. On the other hand, if $A \subset D$ and $\tilde{\delta}'(A) < d$, then there exists a Cauchy sequence $\{u'_n\}$ in $\mathfrak{F}(D)$ satisfying

$$\liminf |u'_n(x)| \geq 1 \textit{ on } A \text{ exc. } \mathfrak{A}(D) \textit{ and } \lim ||u'_n||_D < d.$$

By picking a subsequence if necessary, it can be assumed that

$$||u'_1||_D + \sum_{n=1}^{\infty} ||u'_{n+1} - u'_n||_D < d.$$

Functions φ_n in $\mathfrak{F}$ exist such that $\varphi'_1 = u'_1$ exc. $\mathfrak{A}(D)$ and $\varphi'_{n+1} = u'_{n+1} - u'_n$ exc. $\mathfrak{A}(D)$ and $\sum_{n=1}^{\infty} ||\varphi_n|| < d$. If $w_n = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k$, then clearly $w'_n = u'_n$ exc. $\mathfrak{A}(D)$. Therefore,

$$\liminf |w_n(x)| \geq 1 \text{ on } A \text{ exc. } \mathfrak{A}$$

and in addition $\{w_n\}$ is a Cauchy sequence such that

$$\lim ||w_n|| \leq \sum_{\infty}^{n=1} ||\varphi_n|| < d.$$

Hence $\tilde{\delta}(A) < d$.

The assertions about capacities are immediate consequences of the fact that δ' is the restriction of δ to D.

Finally, if $\mathfrak{F}$ is complete, the argument above shows that $\mathfrak{F}(D)$ is complete. Indeed, the sequence $\{w_n\}$ converges to some $w \in \mathfrak{F}$, and, therefore, the sequence $\{u'_n\} = \{w'_n\}$ converges to $w' \in \mathfrak{F}(D)$.

CHAPTER II

SPACES OF POTENTIALS

§ 1. — Definition and elementary properties of the Dirichlet integral.

In this section the Dirichlet integral over the Euclidean space R^n, $d_\alpha(u) = d_{\alpha, R^n}(u)$, of arbitrary order $\alpha \geqq 0$, is defined and expressed in terms of the function u and its derivatives. The following notation is used: if $i = (i_1, \ldots, i_m)$ where i_k is an integer between 1 and n, then $|i| = m$, $\xi^i = \prod_{k=1}^{m} \xi_{i_k}$ when $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, and

$$D_i u = \frac{\partial^m u}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}} = \frac{\partial^m u}{(\partial x)^i}.$$

If α is an integer, the Dirichlet integral of order α is commonly defined by the formula

$$d_\alpha(u) = d_{\alpha, R^n}(u) = \sum_{|i|=\alpha} \int |D_i u|^2 \, dx. \tag{1, 1}$$

If $\hat{u}$ is the Fourier transform of u, that is. if

$$\hat{u}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-i(x, \xi)} u(x) \, dx,$$

then $d_\alpha(u)$ is expressed in terms of $\hat{u}$ by the formula

$$d_\alpha(u) = \int |\xi|^{2\alpha} |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi. \tag{1, 2}$$

Formula (1, 2) can be used to define $d_\alpha(u)$ for arbitrary

$\alpha \geq 0$. However, it is convenient to have an expression for $d_\alpha(u)$ which, like (1, 1) involves u and its derivatives, but not the Fourier transform. This will make it possible (in Chapter III) to define the Dirichlet integral of order α not only for functions on the whole space R^n, but also for functions on an open set $D \subset R^n$, and it will simplify a number of proofs.

If $0 < \alpha < 1$, then by Parseval's formula we have

$$\iint \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\alpha}}\,dx\,dy = \iint \frac{|u(x+z)-u(x)|^2}{|z|^{n+2\alpha}}\,dx\,dz$$
$$= \int |\hat{u}(\xi)|^2 \int \frac{|e^{i(z,\xi)}-1|^2}{|z|^{n+2\alpha}}\,dz\,d\xi = \int F(\xi)|\hat{u}|^2 d\xi.$$

It is easy to see that $F(\xi)$ is homogeneous of degree 2α and is invariant under orthogonal transformations. Hence $F(\xi) = C(n, \alpha)|\xi|^{2\alpha}$, where if $z = (z', z_n)$,

$$C(n, \alpha) = \int \frac{|e^{iz_n}-1|^2}{(|z'|^2+z_n^2)^{\frac{n+2\alpha}{2}}}\,dz'\,dz_n$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|e^{iz_n}-1|^2}{|z_n|^{2\alpha+1}}\,dz_n \int_{R^{n-1}} \frac{dw'}{(1+|w'|^2)^{\frac{n+2\alpha}{2}}}$$
$$= 2^{3-2\alpha}\omega_{n-1}\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 r}{r^{2\alpha+1}}\,dr \int_0^{\infty} \frac{\rho^{n-2}}{(1+\rho^2)^{\frac{n+2\alpha}{2}}}\,d\rho.$$

The last two integrals and ω_{n-1} (the area of the unit sphere in R^{n-1}) can be evaluated in terms of the Gamma function to give

$$(1, 3) \qquad C(n, \alpha) = \frac{2^{-2\alpha+1}\pi^{\frac{n+2}{2}}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma\left(\alpha+\frac{n}{2}\right)\sin \pi\alpha}.$$

Thus

$$(1, 4) \quad d_\alpha(u) = \frac{1}{C(n, \alpha)}\iint \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\alpha}}\,dx\,dy \quad \textit{if} \quad 0<\alpha<1.$$

It is important to notice that for $\alpha \searrow 0$ or $\alpha \nearrow 1$, $\frac{1}{C(n, \alpha)}$ converges to 0 like α or $1-\alpha$ respectively. In general,

if for arbitrary $\alpha > 0$, α^* denotes the largest integer strictly less than α, then (9)

$$d_\alpha(u) = \sum_{|i|=\alpha} \int |D_i u|^2 \, dx \qquad \textit{if } \alpha \textit{ is an integer;}$$

$$(1, 5) \quad d_\alpha(u) = \frac{1}{C(n, \alpha - \alpha^*)} \sum_{|i|=\alpha^*} \iint \frac{|D_i u(x) - D_i u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\alpha-2\alpha^*}} \, dx \, dy$$

otherwise.

It is obvious from the expression (1, 2) of $d_\alpha(u)$ by Fourier transforms that for every function u such that u and $|\xi|^{\alpha_0}\hat{u}$ are square integrable, $d_\alpha(u)$ is continuous in α in the range $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$ (10). If U is an orthogonal transformation on R^n and $\varphi(x) = u(Ux)$, then clearly $\hat{\varphi}(\xi) = \hat{u}(U\xi)$, so that by (1, 2) $d_\alpha(\varphi) = d_\alpha(u)$. In other words $d_\alpha(u)$ is independent of the (orthogonal) coordinates which are used in R^n.

1) *The Dirichlet integral $d_\alpha(u)$ is continuous in α and independent of the (orthogonal) coordinates which are used in* R^n.

In the classical potential theory of Frostman and Riesz, which is valid for $0 < \alpha < \frac{n}{2}$, it is shown that the functions on R^n which are representable as potentials

$$(1, 6) \qquad u(x) = \int |x-y|^{\alpha-n} g(y) \, dy,$$

where g is square integrable, form with the norm $\sqrt{d_\alpha}$ a complete functional space relative to the exceptional class composed of the sets of (outer) capacity 0 of order 2α. (See [1].) This complete space is the perfect functional completion of the space $C_0^\infty(R^n)$. It is a space with a positive pseudo-reproducing kernel, namely the Riesz kernel

$$(1, 7) \qquad R_{2\alpha}(x-y) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} - \alpha\right)}{\pi^{\frac{n}{2}} 2^{2\alpha} \Gamma(\alpha)} |x-y|^{2\alpha-n}.$$

Spaces with positive pseudo-reproducing kernels are the natural setting for the classical type theory of capacity. With

(9) In formula (1, 5) the notation α^* is needed only when α is not an integer; it will be needed later, however, for all α.

(10) It is not obvious from (1, 5) that $d_\alpha(u)$ is continuous at α = integer; the corresponding result for domains $\neq R^n$, which will be considered in chapter III, is deeper.

this particular space there are associated two kinds of capacities, the classical capacity of order 2α and the capacities defined in Chapter I for arbitrary functional spaces. It is proved in [1] that the classical capacity of order 2α is identical with the functional space capacity c_2. For $\alpha \geqq \frac{2}{n}$ the situation is quite different: the potentials in (1, 6) cannot be formed for all square integrable g, since $|x|^{\alpha-n}$ is not square integrable at ∞; the pseudo-reproducing kernel in (1, 7) is not usable; and, as we shall now show, the space $C_0^\infty(R^n)$ normed by $\sqrt{d_\alpha}$ is not a functional space.

2) *If* $\alpha \geqq \frac{n}{2}$ *the space* $C_0^\infty(R^n)$ *normed by* $\sqrt{d_\alpha}$ *is not a functional space relative to any exceptional class.*

Proof. — Let u be a function in $C_0^\infty(R^n)$ which is identically 1 on a neighborhood of 0. If $u_{(\rho)}(x) = u\left(\frac{x}{\rho}\right)$, then

$$\hat{u}_{(\rho)}(\xi) = \rho^n \hat{u}(\rho\xi) \text{ and } d_\alpha(u_{(\rho)}) = \rho^{n-2\alpha} d_\alpha(u).$$

Thus, if $\alpha > \frac{n}{2}$, then as $\rho \to \infty$, $d_\alpha(u_{(\rho)}) \to 0$, while, for each x, $u_{(\rho)}(x) \to 1$. This shows that the space in question cannot be a functional space (for the whole R^n would have to be an exceptional set). If $\alpha = \frac{n}{2}$, choose ε so that $0 < \varepsilon < \alpha$ and let $v \in C_0^\infty(R^n)$. Then, if $d_\alpha(u, v)$ is the bilinear form corresponding to the quadratic form $d_\alpha(u)$ we have

$$d_\alpha(u_{(\rho)}, v) = \int |\xi|^{2\alpha} \hat{u}_{(\rho)}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}\, d\xi = \int |\xi|^{\alpha+\varepsilon}\hat{u}_{(\rho)}(\xi)\, |\xi|^{\alpha-\varepsilon}\overline{\hat{v}(\xi)}\, d\xi$$
$$\leqq d_{\alpha+\varepsilon}(u_{(\rho)})^{1/2} d_{\alpha-\varepsilon}(v)^{1/2},$$

so, by what has been proved, $d_\alpha(u_{(\rho)}, v) \to 0$. Since this holds for each $v \in C_0^\infty(R^n)$ and since $d_\alpha(u_{(\rho)})$ is bounded, it follows that $u_{(\rho)} \to 0$ weakly in the Hilbert space which is the abstract completion of $C_0^\infty(R^n)$ with the norm $\sqrt{d_\alpha}$. Therefore, by a well known theorem there is a sequence $\rho_k \to \infty$ such that the arithmetic means of the sequence $\{u_{(\rho_k)}\}$ converge strongly to 0. The sequence of arithmetic means converges pointwise

to 1 everywhere, so, as before, the space cannot be a functional space.

This suggests the problem of defining an α-norm with the following properties : (a) On the subspace of $C_0^\infty(R^n)$ of functions vanishing outside any fixed compact set the α-norm is equivalent to $\sqrt{d_\alpha}$. (b) The space $C_0^\infty(R^n)$ normed by the α-norm is a functional space which has a perfect functional completion. (c) The completion has a positive pseudo-reproducing kernel. (d) The classical type capacity for this kernel coincides with the functional space capacity c_2.

One of the simplest norms on $C_0^\infty(R^n)$ for which (a) and (b) are true is the norm

$$(1, 8) \quad |u|_\alpha^2 = d_0(u) + d_\alpha(u) = \int (1 + |\xi|^{2\alpha})|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

In the next section we prove the existence of a functional completion relative to the class of sets of Lebesgue measure 0 and derive some properties of the completion relative to any smaller exceptional class. Later we shall replace $|u|_\alpha$ by the equivalent norm

$$(1, 9) \qquad ||u||_\alpha^2 = \int (1 + |\xi|^2)^\alpha |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

for which all the properties (a) — (d) hold.

There is a direct expression for $||u||_\alpha$ in terms of the function u and its derivatives, similar to the expression for d_α.

Suppose first that $0 < \alpha < 1$, and consider

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{R^n} \int_{R^n} \frac{\left| e^{\frac{1}{2} i z_0} u(x) - e^{-\frac{1}{2} i z_0} u(y) \right|^2}{\left[|x-y|^2 + z_0^2 \right]^{\frac{n+1+2\alpha}{2}}} \, dx \, dy \, dz_0.$$

If we put $x - y = z$, and write $\tilde{z}$ for the point $(z_0, z) \in R^{n+1}$ and $\tilde{\xi}$ for $(1, \xi)$, then

$$\begin{aligned} I &= \int_{R^{n+1}} \int_{R^n} \frac{\left| e^{\frac{1}{2} i z_0} e^{i(z,\xi)} - e^{-\frac{1}{2} i z_0} \right|^2}{|\tilde{z}|^{n+1+2\alpha}} |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \, d\tilde{z} \\ &= \int_{R^n} \int_{R^{n+1}} \frac{|e^{iz_0} e^{i(z,\xi)} - 1|^2}{|\tilde{z}|^{n+1+2\alpha}} |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\tilde{z} \, d\xi. \\ &= \int_{R^n} \int_{R^{n+1}} \frac{|e^{i(\tilde{z},\tilde{\xi})} - 1|^2}{|\tilde{z}|^{n+1+2\alpha}} |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\tilde{z} \, d\xi = C(n+1, \alpha) \int (1 + |\xi|^2)^\alpha |\hat{u}(\xi)^2| \, d\xi, \end{aligned}$$

by the formulas which were used to express d_α. Therefore we can write

(1, 10) $$\|u\|_0^2 = \int |u|^2\, dx;$$

for $0 < \alpha < 1$,

$$\|u\|_\alpha^2 = \frac{1}{C(n+1,\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{R^n} \int_{R^n} \frac{\left| e^{\frac{1}{2} i z_0} u(x) - e^{-\frac{1}{2} i z_0} u(y) \right|^2}{\left[|x-y|^2 + z_0^2 \right]^{\frac{n+1+2\alpha}{2}}}\, dx\, dy\, dz_0;$$

if m *is the greatest integer* $\leq \alpha$,

$$\|u\|_\alpha^2 = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \sum_{|i|=k} \|D_i u\|_{\alpha-m}^2.$$

The last formula in (1, 10) is obtained from the expressions of the various norms by Fourier transforms.

Another formula will be given later (formula (4, 9)) which does not use an extra integration.

§ 2. — Functional completion with respect to $|u|_\alpha$.

In this section we investigate the normed functional class $\mathcal{F}_\alpha$ obtained by giving the class $C_0^\infty(R^n)$ the α-norm $|u|_\alpha$. Using the results quoted in Chapter I we show that $\mathcal{F}_\alpha$ has a functional completion relative to the class of exceptional sets of Lebesgue measure 0, and we establish some properties of the completion relative to any smaller exceptional class.

It is obvious that the class $\mathfrak{L}$ of sets B on which some function in $\mathcal{F}_\alpha$ is ≥ 1 is the class of all bounded subsets of R^n, and, therefore, that the class $\mathfrak{L}_\sigma$ is the class of all subsets of R^n. Consequently, an admissible capacity for $\mathcal{F}_\alpha$ is an outer measure c on R^n such that

(2. 1) $\begin{cases} (a) \text{ Each bounded set has finite (outer) measure.} \\ (b) \text{ To each } \varepsilon > 0 \text{ corresponds an } \eta > 0 \text{ such that if} \\ \qquad B \in \mathfrak{L} \text{ and } \delta(B) \leq \eta, \text{ then } c(B) \leq \varepsilon. \end{cases}$

If c denotes the (outer) Lebesgue measure on R^n, then obviously (a) is satisfied, and since $|u|_\alpha \geq \|u\|_{L^2}$ it follows that for each bounded set B, $c(B) \leq \delta(B)^2$. Hence (b) is also satisfied, and the Lebesgue measure is an admissible capacity for $\mathcal{F}_\alpha$.

1) *$\mathcal{F}_\alpha$ has a functional completion relative to the exceptional class of sets of Lebesgue measure* 0 [11].

Proof. — It has been shown that the Lebesgue measure is an admissible capacity for $\mathcal{F}_\alpha$. Therefore, by virtue of proposition 4, § 2, Chapter I, it is sufficient to prove that if $\{u_n\}$ is a Cauchy sequence in $\mathcal{F}_\alpha$ which converges pointwise to 0 almost everywhere, then $|u_n|_\alpha \to 0$. Since $|u|_\alpha \geq \|u\|_{L^2}$, the sequence $\{u_n\}$ is a Cauchy sequence in L^2, and so by the usual Lebesgue theory, $\|u_n\|_{L^2} \to 0$. Therefore the sequence $\{\hat{u}_n\}$ of Fourier transforms is Cauchy in the L^2 space formed with the measure $(1 + |\xi|^{2\alpha})d\xi$, and converges to 0 in the ordinary L^2 space. It follows from the usual Lebesgue theory that $\{\hat{u}_n\}$ converges to 0 in the L^2 space formed with the measure $(1 + |\xi|^{2\alpha})d\xi$, that is, that $|u_n|_\alpha \to 0$.

In the rest of the section $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha$ will denote any saturated functional completion of $\mathcal{F}_\alpha$ relative to an exceptional class $\tilde{\mathfrak{A}}_{2\alpha}$, which is contained in the class of sets of Lebesgue measure 0 [12].

2) *If $u \in \tilde{\mathcal{F}}_\alpha$, then $u \in L^2$, and* $|u|_\alpha^2 = \int (1 + |\xi|^{2\alpha})|\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi$.

Proof. — If $u \in \tilde{\mathcal{F}}_\alpha$, then there is a Cauchy sequence $\{u_n\}$ in $\mathcal{F}_\alpha$ which converges pointwise to u exc. $\tilde{\mathfrak{A}}_{2\alpha}$, hence almost everywhere. It follows that $u \in L^2$. The sequence $\{\hat{u}_n\}$ of Fourier transforms is Cauchy in the L^2 space formed with the measure $(1 + |\xi|^{2\alpha})d\xi$ and converges to $\hat{u}$ in the ordinary L^2 space. It follows that $\{\hat{u}_n\}$ converges to $\hat{u}$ in the L^2 space formed with the measure $(1 + |\xi|^{2\alpha})d\xi$. Thus,

$$|u_n|_\alpha^2 \to \int (1 + |\xi|^{2\alpha})\hat{u}(\xi)^2 \, d\xi.$$

At the same time, by definition $|u|_\alpha = \lim |u_n|_\alpha$.

Corollary. — *If two functions in $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha$ are equal almost everywhere, then they are equal exc.* $\tilde{\mathfrak{A}}_{2\alpha}$.

Proof. — By 2) their difference has norm 0.

(11) It is easy to see that if $\alpha = 0$ the class of sets of Lebesgue measure 0 is the exceptional class for the perfect completion of $\mathcal{F}_\alpha$; the perfect functional completion of $\mathcal{F}_0$ is simply L^2.

(12) The notation $\tilde{\mathfrak{A}}_{2\alpha}$ is chosen to agree with the notation which will be used later.

3) *If* B *is a set of finite measure, then on the subspace of* $\tilde{\mathfrak{F}}_\alpha$ *of functions which vanish outside* B *exc.* $\tilde{\mathfrak{A}}_{2\alpha}$ *the norms* $|u|_\alpha$ *and* $\sqrt{d_\alpha}$ *are equivalent. In fact, there is a constant* c *such that if* u *vanishes outside* B *exc.* $\tilde{\mathfrak{A}}_{2\alpha}$ *then*

$$d_0(u) \leqq c|\mathrm{B}|^{2\alpha/n} d_\alpha(u).$$

Proof. — If u vanishes outside B, then for every ξ

$$(2, 2) \qquad |\hat{u}(\xi)|^2 \leqq (2\pi)^{-n}|\mathrm{B}|d_0(u).$$

Hence, for every $r > 0$,

$$\begin{aligned} d_0(u) &\leqq \int_{|\xi|\leqq r} (2\pi)^{-n}|\mathrm{B}|d_0(u)\, d\xi + \int_{|\xi|\geqq r} \frac{|\xi|^{2\alpha}}{r^{2\alpha}}|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leqq \frac{\omega_n}{n}(2\pi)^{-n}|\mathrm{B}|r^n d_0(u) + \frac{1}{r^{2\alpha}} d_\alpha(u), \end{aligned}$$

and so, for $r < 2\pi\left(\dfrac{n}{\omega_n|\mathrm{B}|}\right)^{1/n}$,

$$d_0(u) \leqq \frac{n(2\pi)^n}{r^{2\alpha}[n(2\pi)^n - \omega_n|\mathrm{B}|r^n]} d_\alpha(u).$$

The inequality in the proposition is obtained by minimizing the coefficient of $d_\alpha(u)$.

4) *If* $\beta < \alpha$ *and* B *is a set of finite measure, then* $|u|_\beta$ *is completely continuous on the subspace of* $\tilde{\mathfrak{F}}_\alpha$ *of functions which vanish outside* B *exc.* $\tilde{\mathfrak{A}}_{2\alpha}$.

Proof. — (The idea of this proof is due to Gårding.) It will be shown that if u_n vanishes outside B and the sequence $\{u_n\}$ converges weakly to 0 in $\tilde{\mathfrak{F}}_\alpha$, then $|u_n|_\beta \to 0$. For every $r > 1$

$$(2, 3) \qquad |u_n|_\beta^2 \leqq \int_{|\xi|\leqq r} (1 + |\xi|^{2\beta})\, |\hat{u}_n(\xi)|^2\, d\xi + \frac{2}{r^{2\alpha-2\beta}} d_\alpha(u_n).$$

Since a weakly convergent sequence is necessarily bounded, for every positive number ε a positive number r can be chosen large enough so that the second term on the right side of (2, 3) is less than ε for all n. For fixed r the first term on the right side of (2, 3) converges to 0, for the functions $\hat{u}_n(\xi)$

converge pointwise to 0 [13] and by (2, 2) they are uniformly bounded. Thus if u_n vanishes outside B and $\{u_n\}$ converges weakly to 0 in $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha$, then $|u_n|_\beta \to 0$.

A function is said to be of class $C^{(m,1)}$ on an open set if the function is of class C^m on the open set and every derivative of order $\leq m$ is Lipschitzian [14]. If u is a function of class $C^{(\alpha^*,1)}$ on R^n, then the integrals in (1, 5) are defined, and they are obviously finite if u has compact support [15].

In the proof of the next two propositions and in several later proofs we will need the well known process of regularization. A family of regularizing functions is a family

$$e_\rho(x) = \rho^{-n}\, e\left(\frac{x}{\rho}\right) \quad \textit{for} \quad 0 < \rho \leq 1,$$

where e is a non-negative function in $C_0^\infty(R^n)$ satisfying

$$e(x) = 0 \quad \textit{for} \quad |x| \geq 1 \quad \textit{and} \quad \int e(x)\, dx = 1.$$

If u is a locally integrable function, the functions

$$u_\rho(x) = u * e_\rho(x) = \int u(y) e(x - y)\, dy$$

are called the functions obtained from u by regularization, or, more briefly the regularizations of u. A few of the standard properties of the family $\{u_\rho\}$ are as follows:

(*a*) Each u_ρ is of class C^∞.

(*b*) $u_\rho(x) \to u(x)$ almost everywhere.

(*c*) If u belongs to L^p (or locally to L^p) then so do the u_ρ, and $u_\rho \to u$ in L^p (or locally in L^p).

(*d*) If $u \in L^p$, $1 \leq p \leq 2$, then $u_\rho \in L^p$ and $\hat{u}_\rho = (2\pi)^{n/2} \hat{u} \hat{e}_\rho$.

Other properties of u_ρ will be stated when they are needed.

5) *If u is square integrable and* $|u|_\alpha$ *is finite* [16], *then u is*

[13] In fact, $\hat{u}_n(\xi)$ is the inner product in L^2 of u_n with $(2\pi)^{-n/2} e^{-i(x,\xi)}$ times the characteristic function of B, and weak convergence in $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha$ implies weak convergence in L^2 (which has a smaller norm).

[14] By this it is meant that there is a constant M such that if $|i| \leq m$ then

$$|D_i u(x) - D_i u(y)| \leq M |x - y|$$

for all x and y in the open set.

[15] If α is not an integer this is self-evident; if α is an integer it follows from the classical theorem that the partial derivatives of a Lipschitz function exist a.e. and are bounded.

[16] If it is known only that u is square integrable then the expression of $|u|_\alpha$ by Fourier transforms must be used here, but if it is known that the necessary derivatives of u exist, then either expression of $|u|_\alpha$ can be used.

equal almost everywhere to a function in $\tilde{\mathfrak{F}}_\alpha$; *if, in addition,* u *is continuous, then* $u \in \tilde{\mathfrak{F}}_\alpha$.

6) *There is a constant* c *(depending only on* α^* *and* n*) such that if* φ *is of class* $C^{(\alpha^*, 1)}$ *on* R^n *and satisfies* $|D_i\varphi(x)| \leq M$ a.e. *for* $|i| \leq \alpha^* + 1$ *and if* $u \in \tilde{\mathfrak{F}}_\alpha$ *then*

$$\varphi u \in \tilde{\mathfrak{F}}_\alpha \quad \textit{and} \quad |\varphi u|_\alpha \leq cM|u|_\alpha. \tag{2, 4}$$

PROOFS. — First we show that if φ is of class $C^{(\alpha^*, 1)}$ on R^n and if u is of class C^∞ and $|u|_\alpha$ is finite, then the inequality (2, 4) holds. For this the direct expression (1, 5) of $|u|_\alpha$ is used.

Since each derivative $D_i(\varphi u)$ is a sum of products $D_j\varphi D_k u$ with $|j| + |k| = |i|$, if α is an integer, then, by (1, 5), $d_\alpha(\varphi u)$ is majorated by a constant (depending only on α) times a sum of terms of the form

$$\int |D_j\varphi D_k u|^2 dx \leq M^2 d_{|k|}(u) \qquad \text{where} \qquad |j| + |k| = \alpha.$$

It is obvious from (1, 8) that if $\beta \leq \alpha$ then $d_\beta(u) \leq |u|_\alpha^2$. Hence (2, 4) is proved if α is an integer. If α is not an integer, then by (1, 5) $d_\alpha(\varphi u)$ is majorated by a constant (depending only on α^*) times a sum of terms of the form

$$\frac{1}{C(n, \alpha - \alpha^*)} \iint \frac{|D_j\varphi(x)D_k u(x) - D_j\varphi(y)D_k u(y)|^2}{|x - y|^{n+2\alpha-2\alpha^*}} dx\, dy$$

$$\leq 2M^2 d_{|k|+\alpha-\alpha^*}(u) + \frac{2}{C(n, \alpha - \alpha^*)} \iint \frac{|D_k u(y)|^2 |D_j\varphi(x) - D_j\varphi(y)|^2}{|x - y|^{n+2\alpha-2\alpha^*}} dx dy,$$

where $|j| + |k| = \alpha^*$. The first term on the right has already been considered, and for the inner integral in the second we have

$$\int \frac{|D_j\varphi(x) - D_j\varphi(y)|^2}{|x - y|^{n+2\alpha-2\alpha^*}} dx = \int \frac{|D_j\varphi(y+z) - D_j\varphi(y)|^2}{|z|^{n+2\alpha-2\alpha^*}} dz$$

$$\leq M^2 \int_{|z|\leq 1} |z|^{-n-2\alpha+2\alpha^*+2} dz + 4M^2 \int_{|z|\geq 1} |z|^{-n-2\alpha+2\alpha^*} dz \leq \frac{c}{\alpha - \alpha^*} M^2.$$

Hence the second term on the right above is at most $cM^2 d_{|k|}(u)$, and the inequality (2, 4) is established for φ of class $C^{(\alpha^*, 1)}$ and u of class C^∞ with $|u|_\alpha$ finite.

Next we show that if u is of class C^∞ and $|u|_\alpha$ is finite, then $u \in \tilde{\mathfrak{F}}_\alpha$. Let φ be a function in $C_0^\infty(R^n)$ which is 1 on a neigh-

borhood of 0, and for $\rho > 0$ put $\varphi_{(\rho)}(x) = \varphi(\rho x)$. If $|D_i\varphi(x)| \leq M$ for $|i| \leq \alpha^* + 1$, then $|D_i\varphi_{(\rho)}(x)| \leq \rho^{|i|}M$ for $|i| \leq \alpha^* + 1$, so by what has been proved, as $\rho \to 0$, $|\varphi_{(\rho)}u|_\alpha$ is bounded. Consequently there is a sequence $\rho_k \to 0$ such that the arithmetic means of the sequence $\{\varphi_{(\rho_k)}u\}$ converge in $\tilde{\mathfrak{F}}_\alpha$, and since the arithmetic means obviously converge pointwise everywhere to u, it follows that $u \in \tilde{\mathfrak{F}}_\alpha$.

Now we prove 5) by regularization. We note first that for regularizing functions e_ρ, $\hat{e}_\rho(\xi) = \hat{e}(\rho\xi)$, and since

$$|\hat{e}(\xi)| \leq (2\pi)^{-n/2} \quad \textit{and} \quad \hat{e}(0) = (2\pi)^{-n/2},$$

it follows that as $\rho \to 0$ the functions

$$\hat{u}_\rho(\xi) = (2\pi)^{n/2}\hat{e}_\rho(\xi)\,\hat{u}(\xi)$$

are uniformly bounded by $|\hat{u}(\xi)|$ and converge pointwise to $\hat{u}(\xi)$.

Therefore, since $|u|_\alpha$ is finite, $|u_\rho|_\alpha$ is finite, and, as $\rho \to 0$, $|u - u_\rho|_\alpha \to 0$. Since u_ρ is of class C^∞, it follows from what has been shown that $u_\rho \in \tilde{\mathfrak{F}}_\alpha$. Thus, as $\rho \to 0$ $\{u_\rho\}$ is Cauchy in $\tilde{\mathfrak{F}}_\alpha$, so there exists a function $v \in \tilde{\mathfrak{F}}_\alpha$ and a sequence $\rho_k \to 0$ such that $u_{\rho k} \to v$ pointwise almost everywhere. Therefore $u = v$ almost everywhere. Moreover, if u is continuous, then $u_{\rho k} \to u$ everywhere, so that $u = v$ exc. $\tilde{\mathfrak{A}}_{2\alpha}$ and hence $u \in \tilde{\mathfrak{F}}_\alpha$. This completes the proof of 5).

The proof of 6) is completed as follows. Proposition 5) shows that each function of class $C^{(\alpha^*,1)}$ with compact support belongs to $\tilde{\mathfrak{F}}_\alpha$. Therefore, the transformation $Tu = \varphi u$ transforms $\mathfrak{F}_\alpha$ into $\tilde{\mathfrak{F}}_\alpha$, and by the first paragraph in the proof this transformation is continuous. If $\tilde{T}$ denotes its extension to $\tilde{\mathfrak{F}}_\alpha$ by continuity, then for each $u \in \tilde{\mathfrak{F}}_\alpha$ there is a sequence $\{u_n\}$ in $\mathfrak{F}_\alpha$ such that $u_n \to u$ both in $\tilde{\mathfrak{F}}_\alpha$ and pointwise exc. $\tilde{\mathfrak{A}}_{2\alpha}$. and such that $Tu_n \to \tilde{T}u$ both in $\tilde{\mathfrak{F}}_\alpha$ and pointwise exc. $\tilde{\mathfrak{A}}_{2\alpha}$. Since $Tu_n = \varphi u_n$ and since $\varphi u_n \to \varphi u$ pointwise wherever u is defined, *a fortiori* exc. $\tilde{\mathfrak{A}}_{2\alpha}$, it follows that $\tilde{T}u = \varphi u$. This completes the proof of 6).

COROLLARY 1. — *If u is locally in $\tilde{\mathfrak{F}}_\alpha$ and $|u|_\alpha$ is finite, then $u \in \tilde{\mathfrak{F}}_\alpha$.*

PROOF. — To say that u is locally in $\tilde{\mathfrak{F}}_\alpha$ means that each point in R^n has a neighborhood on which u coincides with a function in $\tilde{\mathfrak{F}}_\alpha$. If this is the case, then by using 6) we can choose for each point a function φ in $C_0^\infty(R^n)$ such that $\varphi = 1$ on a neighborhood of the point and such that $\varphi u \in \tilde{\mathfrak{F}}_\alpha$. Now, by 5) u is equal almost everywhere to some function $v \in \tilde{\mathfrak{F}}_\alpha$. Hence $\varphi u = \varphi v$ almost everywhere, and by the corollary to proposition 2, $\varphi u = \varphi v$ exc. $\tilde{\mathfrak{A}}_{2\alpha}$. It follows that $u = v$ exc. $\tilde{\mathfrak{A}}_{2\alpha}$, so that $u \in \tilde{\mathfrak{F}}_\alpha$.

COROLLARY 2. — *If φ is bounded and of class $C^{(\alpha^*, 1)}$ on R^n and $\varphi = 1$ on a neighborhood of* 0, *and if $\varphi_{(\rho)}(x) = \varphi(\rho x)$, then, as $\rho \to 0$, $\varphi_{(\rho)} u \to u$ in $\tilde{\mathfrak{F}}_\alpha$ for every $u \in \tilde{\mathfrak{F}}_\alpha$.*

PROOF. — By (6) the transformations $T_\rho u = \varphi_{(\rho)} u$ of $\tilde{\mathfrak{F}}_\alpha$ into itself are uniformly bounded. Therefore, it is sufficient to show that $T_\rho u \to u$ for all u in some dense subset of $\tilde{\mathfrak{F}}_\alpha$. It is obvious that this is the case for $u \in \mathfrak{F}_\alpha$.

7) *Let u be a square integrable function and let m be an integer $\leq \alpha$. Then u is equal almost everywhere to a function in $\tilde{\mathfrak{F}}_\alpha$ if and only if for each j with $|j| = m$ there is a function $v_j \in \tilde{\mathfrak{F}}_{\alpha-m}$ such that $D_j u = v_j$ in the sense of distributions.*

PROOF. — To say that $D_j u = v_j$ in the sense of distributions means that for every function $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$

$$\int u \overline{D_j \varphi} dx = (-1)^{|j|} \int v_j \bar{\varphi} dx.$$

Suppose first that $u \in \tilde{\mathfrak{F}}_\alpha$, and let $\{u_n\}$ be a sequence in $C_0^\infty(R^n)$ which converges to u in $\tilde{\mathfrak{F}}_\alpha$. From the obvious relation

$$d_\alpha(v) = \sum_{|j|=m} d_{\alpha-m}(D_j v)$$

it follows that the sequence $\{D_j u_n\}$ is Cauchy in $\tilde{\mathfrak{F}}_{\alpha-m}$, and hence that there exists $v_j \in \tilde{\mathfrak{F}}_{\alpha-m}$ such that $D_j u_n \to v_j$ in $\tilde{\mathfrak{F}}_{\alpha-m}$. If $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$, then

$$(u, D_j\varphi)_{L^2} = \lim_{n\to\infty}(u_n, D_j\varphi)_{L^2} = \lim_{n\to\infty}(-1)^m(D_j u_n, \varphi) = (-1)^m (v_j, \varphi)_{L^2}$$

and the first part of the statement is proved.

Following a general theorem about temperate distributions

and their Fourier transforms [14, vol. 2], if $D_j u = v_j$ and both u and v_j are square integrable, then $i^m \xi_{j_1} \ldots \xi_{j_m} \hat{u} = \hat{v}_j$ ([17]). Hence, if $v_j \in \tilde{\mathcal{F}}_{\alpha-m}$, then

$$\int |\xi|^{2\alpha} |\hat{u}|^2 d\xi = \Sigma \int |\xi|^{2\alpha-2m} |\hat{v}_j|^2 d\xi < \infty.$$

By 5), u is equal a.e. to a function in $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha$.

Propositions 1)-7) describe most of the properties of the functional completion of $\mathcal{F}_\alpha$ which subsist for an arbitrary completion $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha$ whose exceptional class is contained in the class of sets of Lebesgue measure 0. The finer properties which are developed in later sections are properties of the perfect completion. Therefore, we shall close this section with a few remarks of introduction for the next.

We have stated at the beginning of this chapter that $\mathcal{F}_\alpha$ has a perfect functional completion and that if the norm $|u|_\alpha$ is replaced by the equivalent norm

$$\|u\|_\alpha^2 = \int (1 + |\xi|^2)^\alpha |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi$$

then the perfect completion is a space with a positive pseudo-reproducing kernel; this kernel will be denoted by $G_{2\alpha}$. It will be shown that every function u in the perfect completion can be represented as a potential

$$u(x) = G_\alpha g(x) = \int G_\alpha(x - y)\, g(y) dy \tag{2, 5}$$

of a square integrable function g, and that the following relation holds:

$$\|u\|_\alpha = \|g\|_{L^2} = \int |g|^2 \, dx. \tag{2, 6}$$

If (2, 5) and (2, 6) are accepted for the present, we can deduce an expression for the kernel G_α.

Since the potential $G_\alpha g$ defined in (2, 5) is a product of composition, if follows (provided G_α is integrable) that

$$(G_\alpha g)^\wedge(\xi) = (2\pi)^{n/2} \hat{G}_\alpha(\xi) \hat{g}(\xi).$$

If (2, 6) is to hold, then

$$\int (1 + |\xi|^2)^\alpha |(2\pi)^{n/2} \hat{G}_\alpha(\xi)|^2 |\hat{g}(\xi)|^2 \, d\xi = \int |\hat{g}(\xi)|^2 \, d\xi$$

([17]) This simple case of the general theorem can be proved directly without much trouble.

for every square integrable function g. Our condition is therefore satisfied by

$$(2, 7) \qquad \hat{G}_\alpha(\xi) = (2\pi)^{-n/2}(1 + |\xi|^2)^{-\alpha/2}.$$

This gives the expression for the Fourier transform of G_α. However, if $\alpha > n$, $(1 + |\xi|^2)^{-\alpha/2}$ is integrable, and (2, 7) can be inverted to give

$$(2, 8) \qquad G_\alpha(x) = (2\pi)^{-n} \int \frac{e^{i(x,\xi)}}{(1 + |\xi|^2)^{\alpha/2}} d\xi.$$

There is a well known formula expressing the Fourier transform of a function $f(\xi)$ which is a function of $|\xi|$ alone as a single integral involving the Bessel function J_ν [18]:

$$(2, 9) \qquad \hat{f}(x) = |x|^{\frac{2-n}{2}} \int_0^\infty f(\rho)\rho^{n/2} J_{\frac{n-2}{2}}(\rho|x|)\, d\rho.$$

Formulas (2, 8) and (2, 9) give

$$G_\alpha(x) = (2\pi)^{-n/2}|x|^{\frac{2-n}{2}} \int_0^\infty \frac{\rho^{n/2}}{(1 + \rho^2)^{\alpha/2}} J_{\frac{n-2}{2}}(\rho|x|) d\rho$$

From this we obtain for $\alpha > n$ [19].

$$(2, 10) \quad G_\alpha(x) = \frac{1}{2^{\frac{n+\alpha-2}{2}} \pi^{n/2}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} K_{\frac{n-\alpha}{2}}(|x|)|x|^{\frac{\alpha-n}{2}}, \ [20]$$

where $K_\nu(z)$ is the modified Bessel function of the third kind. It will be shown that if $G_\alpha(x)$ is defined by (2, 10) for all $\alpha > 0$, then G_α is integrable and its Fourier transform is given by (2, 7), and, in fact, that G_α has all the properties that have been attributed to it. In the next section some pertinent formulas and properties of the Bessel function K_ν are listed.

§ 3. — Formulas and properties of K_ν.

Most of the results listed in this section can be found both in [10] and in [16], and all can be found in one or the other.

[18] See, for example, S. Bochner [3].
[19] Formula 20, p. 24 of [9].
[20] L. Schwartz [14] introduced functions $L_\alpha(|x|)$ related to $G_\alpha(x)$ by the equation $G_\alpha(x) = L_\alpha\left(\frac{|x|}{2\pi}\right)(2\pi)^{-n}$.

The modified Bessel function of the third kind, K_ν, is defined in terms of the more common Bessel functions by

$$(3, 1) \qquad K_\nu = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin \nu\pi}$$

where
$$I_\nu(z) = e^{-i\frac{1}{2}\nu\pi} J_\nu(iz),$$

and J_ν is the Bessel function of the first kind of order ν. The above formula for K_ν for ν an integer should be understood as a limit $K_\nu = \lim_{\epsilon \to 0} K_{\nu+\epsilon}$.

The functions K_ν and I_ν are defined for complex values of ν and z, but we shall be concerned only with real values of ν and positive real values of z. The function I_ν (the modified Bessel function of the first kind) has the series expansion

$$(3, 2) \qquad I_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2} z\right)^{\nu+2m}}{m!\,\Gamma(\nu + m + 1)}$$

from which it follows that $K_\nu(z)$ is an analytic function of z except at $z = 0$, and for $z \neq 0$, $K_\nu(z)$ is an entire function of ν. Obviously

$$(3, 3) \qquad K_{-\nu}(z) = K_\nu(z).$$

From (3, 2) it follows immediately that

$$(3, 4) \qquad \begin{aligned} &K_\nu(z) \sim 2^{\nu-1}\Gamma(\nu)z^{-\nu} \text{ [21]} \quad \textit{as} \quad z \to 0, \quad \text{for} \quad \nu > 0, \\ &K_0(z) \sim \log 1/z \qquad \textit{as} \quad z \to 0. \end{aligned}$$

It is known that

$$(3, 5) \qquad K_\nu(z) \sim \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z} \qquad \textit{as} \quad z \to \infty \textit{ for all } \nu.$$

The following integral formula holds.

$$(3, 6) \qquad K_\nu(z) = \frac{\left(\frac{1}{2}\pi\right)^{1/2} z^\nu e^{-z}}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-zt} t^{\nu-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}t\right)^{\nu-\frac{1}{2}} dt$$

for $z > 0$, $\nu > -\frac{1}{2}$.

[21] As usual, we write $f(z) \sim g(z)$ as $z \to a$ if $\lim_{z \to a} \frac{f(z)}{g(z)} = 1$.

We shall also need the differentiation formula

$$(3, 7) \qquad \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^m [z^{-\nu}K_\nu(z)] = (-1)^m z^{-\nu-m} K_{\nu+m}(z).$$

We mention also the differential equation of second order satisfied by K_ν (which can be deduced easily from (3, 7) and (3, 3))

$$(3, 8) \qquad \frac{d^2}{dz^2}(z^{-\nu}K_\nu(z)) + \frac{(2\nu+1)}{z}\frac{d}{dz}(z^{-\nu}K_\nu(z)) - z^{-\nu}K_\nu(z) = 0.$$

§ 4. — Formulas and properties of G_α.

The kernel G_α is defined for $\alpha > 0$ by

$$(4, 1) \qquad G_\alpha(x) = \frac{1}{2^{\frac{n+\alpha-2}{2}} \pi^{n/2} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} K_{\frac{n-\alpha}{2}}(|x|) |x|^{\frac{\alpha-n}{2}}.$$

Most of the necessary formulas and properties of G_α are almost immediate consequences of the corresponding formulas and properties of $K_{\frac{n-\alpha}{2}}$. They are listed in this section.

The kernel $G_\alpha(x)$ is an analytic function of $|x|$ except at $x = 0$, and for $x \neq 0$, $G_\alpha(x)$ is an entire function of α. From (3, 4) we obtain

$$G_\alpha(x) \sim \frac{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}{2^\alpha \pi^{n/2} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} |x|^{\alpha-n} \quad \text{if} \quad \alpha < n$$

$$(4, 2) \qquad \text{As } x \to 0 \qquad G_n(x) \sim \frac{1}{2^{n-1}\pi^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \log \frac{1}{|x|}$$

$$G_\alpha(x) \sim \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha-n}{2}\right)}{2^n \pi^{n/2} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad \text{if} \quad \alpha > n,$$

and from (3, 5) we obtain

$$(4,3)\quad as\ |x|\to\infty,\quad G_\alpha(x)\sim\frac{1}{2^{\frac{n+\alpha-1}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}|x|^{\frac{\alpha-n-1}{2}}e^{-|x|}.$$

Clearly G_α is a function of $|x|$ alone; it will sometimes be convenient to write $G_\alpha(r)$ for $G_\alpha(x)$ with $|x|=r$. With this notation (3, 7) gives

$$(4,4)\quad \frac{d}{dr}G_\alpha(r)=\frac{-1}{2^{\frac{n+\alpha-2}{2}}\pi^{n/2}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}r^{\frac{\alpha-n}{2}}K_{\frac{n-\alpha+2}{2}}(r).$$

Hence for $\alpha>1$, there is a constant c such that

$$(4,5)\qquad \left|\frac{\partial G_\alpha(x)}{\partial x_i}\right|\leq c[G_\alpha(x)+G_{\alpha-1}(x)].$$

Formula (3, 6) shows that all K_ν, and therefore all G_α, are everywhere positive; (4, 4) then shows that G_α is a decreasing function of $|x|$. Formulas (4, 2) and (4, 3) show that G_α is integrable.

Since G_α is integrable, the Fourier transform $G_\alpha(\xi)$ exists for each ξ; as a function of α it is analytic for $\alpha>0$. Therefore, from (2, 7) we obtain by analytic continuation

$$(4,6)\quad \hat{G}_\alpha(\xi)=(2\pi)^{-n/2}(1+|\xi|^2)^{-\alpha/2}\qquad for\qquad \alpha>0.$$

A simple consequence is

$$(4,6')\qquad \int G_\alpha(x)\,dx=(2\pi)^{n/2}\hat{G}_\alpha(0)=1.$$

From (4, 6) it is evident that the following composition formula holds.

$$(4,7)\quad G_{\alpha+\beta}(x)=G_\alpha*G_\beta(x)=\int G_\alpha(y)G_\beta(x-y)\,dy.$$

We give now a mean value theorem similar to the Frostman mean value theorem for the kernel $|x|^{\alpha-n}$.

1) *For each* $r_0>0$ *there is a constant* c *(depending only*

on r_0, α, and n) such that for every point z, every sphere $S(x, r)$ *with $r \leqq r_0$, and every function $g \geqq 0$,*

$$(a) \qquad \frac{1}{|S(x, r)|} \int_{S(x, r)} G_\alpha(z-y)\, dy \leqq c G_\alpha(z-x).$$

$$(b) \qquad \frac{1}{|S(x, r)|} \int_{S(x, r)} G_\alpha g(y)\, dy \leqq c G_\alpha g(x),$$

$$(c) \qquad \lim_{r \to 0} \frac{1}{|S(x, r)|} \int_{S(x, r)} G_\alpha g(y)\, dy = G_\alpha g(x).$$

We use here the notation $G_\alpha g$ introduced in (2, 5). When $g \geqq 0$, $G_\alpha g(x)$ will be considered as defined everywhere possibly with the value $+\infty$.

Proof. — Parts (b) and (c) are obvious consequences of part (a), and part (a) is an obvious consequence of the special case in which $x = 0$. This special case can be formulated as follows: if f_r denotes $|S(0, r)|^{-1}$ times the characteristic function of $S(0, r)$, then for every x

$$(4, 8) \qquad f_r * G_\alpha(x) \leqq c G_\alpha(x) \quad \textit{for} \quad r \leqq r_0.$$

From the composition formula (4, 7) it is seen that (4, 8) has only to be proved for small values of α, in particular, for $\alpha < n$. To simplify the notation we shall suppose $r_0 = 1$.

By using (4, 2) and the fact that $|x|^{\alpha-n}$ and $G_\alpha(x)$ are both positive we obtain the existence of positive constants c_1 and c_2 such that

$$c_1 |x|^{\alpha-n} \leqq G_\alpha(x) \leqq c_2 |x|^{\alpha-n} \qquad \textit{for} \qquad |x| < 3.$$

Hence (4, 8) holds for $|x| < 2$ (with $r_0 = 1$) if and only if it holds when $G_\alpha(x)$ is replaced by $|x|^{\alpha-n}$. That it does hold in this case is the assertion of the Frostman mean value theorem [22]. For $|x| \geqq 2$ we have, since $G_\alpha(x)$ is a decreasing function of $|x|$,

$$\frac{f_r * G_\alpha(x)}{G_\alpha(x)} \leqq \sup_{\rho \geqq 2} \frac{G_\alpha(\rho - 1)}{G_\alpha(\rho)}.$$

[22] O. Frostman [11]. In the Frostman theorem the constant c is independent of r_0. From the exponential decrease of $G_\alpha(\rho)$ as $\rho \to \infty$, it is easy to see that such is not the case here.

The supremum on the right side is finite, since G_α is continuous and positive and since, by (4, 3),

$$\lim_{\rho\to\infty}\frac{G_\alpha(\rho-1)}{G_\alpha(\rho)} = e.$$

Corollary. — *If $\{e_\rho\}$ is a family of regularizing functions, there is a constant c such that for every point x and every function* $g \geqq 0$

$$\begin{array}{ll} (a) & G_\alpha * e_\rho(x) \leqq cG_\alpha(x) \\ (b) & (G_\alpha g) * e_\rho(x) \leqq cG_\alpha g(x) \\ (c) & \lim\limits_{\rho\to 0}(G_\alpha g) * e_\rho(x) = G_\alpha g(x). \end{array}$$

Proof. — Part (*a*) follows from (4, 8), since

$$e_\rho(x) = \rho^{-n}\, e\left(\frac{x}{\rho}\right) \leqq cf_\rho(x).$$

The other parts follow from (*a*).

With the aid of the kernels G_α we can give the other direct expression of $\|u\|_\alpha$ for $0 < \alpha < 1$ promised earlier. From (1, 10) we obtain

$$\|u\|_\alpha^2 = \frac{1}{C(n+1,\,\alpha)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{R^n}\int_{R^n}\frac{\left|i\sin\frac{1}{2}z_0[u(x)+u(y)] + \cos\frac{1}{2}z_0[u(x)-u(y)]\right|^2}{[|x-y|^2+z_0^2]^{\frac{n+1+2\alpha}{2}}}\,dx\,dy\,dz_0,$$

$$= \frac{1}{C(n+1,\,\alpha)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{R^n}\int_{R^n}\frac{|u(x)+u(y)|^2\sin^2\frac{1}{2}z_0}{[|x-y|^2+z_0^2]^{\frac{n+1+2\alpha}{2}}}\,dx\,dy\,dz_0,$$

$$+ \frac{1}{C(n+1,\,\alpha)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{R^n}\int_{R^n}\frac{|u(x)-u(y)|^2\cos^2\frac{1}{2}z_0}{[|x-y|^2+z_0^2]^{\frac{n+1+2\alpha}{2}}}\,dx\,dy\,dz_0.$$

Integration with respect to z_0 yields the kernel $G_{n+1+2\alpha}$ for the space R^1. By using (4, 1) this kernel can be transformed into the kernel $G_{2n+2\alpha}$ for the space R^n. Making these trans-

formations and using the formula (1, 3) for $C(n+1, \alpha)$ we get

$$(4, 9) \quad \|u\|_\alpha^2 = 2^{n+2\alpha-2}\Gamma(n+\alpha)\Gamma(1+\alpha)$$
$$\left[\frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \iint |u(x)+u(y)|^2 \frac{G_{2n+2\alpha}(0) - G_{2n+2\alpha}(x-y)}{|x-y|^{n+2\alpha}} dx\, dy \right.$$
$$\left. + \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \iint |u(x)-u(y)|^2 \frac{G_{2n+2\alpha}(0) + G_{2n+2\alpha}(x-y)}{|x-y|^{n+2\alpha}} dx\, dy\right].$$

Remark. — It is easily seen that the first term in the square brackets is equivalent to the L^2 norm of u, the second to $d_\alpha(u)$.

Another interesting formula for $\|u\|_\alpha$, $0 < \alpha < 1$, is the following

$$(4, 10) \quad \|u\|_\alpha^2 = \frac{2^n \pi^{n/2}\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)} \int d_\alpha(G_{n+\alpha}(x-y)u(x))\, dy.$$

The Dirichlet integral d_α is taken with respect to x. Beside the formulas used above, we apply here the composition formula $G_{2n+2\alpha} = G_{n+\alpha} * G_{n+\alpha}$.

We give now an important formula connecting $G_\alpha(x-y)$ with the Laplace operator Δ. It will be convenient in this connection to extend the definition of G_α to all real α, by formula (4, 1). This gives for all even integers $\alpha \leq 0$ a function G_α identically 0.

(4, 11) *For fixed y and $x \neq y$,*
$$(1-\Delta)\, G_\alpha(x-y) = G_{\alpha-2}(x-y).$$

To prove it, we use y as origin and apply the elementary formula for Δf where f depends only on $r = |x-y|$:

$$\Delta f(r) = \frac{d^2}{dr^2} f(r) + \frac{(n-1)}{r}\frac{d}{dr} f(r).$$

We get therefore

$$(1-\Delta)\, G_\alpha(x-y) = G_\alpha(r) - \frac{(n-1)}{r}\frac{d}{dr} G_\alpha(r) - \frac{d^2}{dr^2} G_\alpha(r).$$

Comparing with (4, 1) and (3, 8) we transform the right-hand side into $\dfrac{2-\alpha}{r}\dfrac{d}{dr} G_\alpha(r)$ and by (3, 7) and (4, 1) we see that it is $= G_{\alpha-2}(x-y)$.

As corollary we have for all positive integers m

$$(4,\ 11') \qquad (1-\Delta)^m G_\alpha(x-y) = G_{\alpha-2m}(x-y).$$

The function $G_{2m}(x-y)$ is a fundamental solution for the operator $(1-\Delta)^m$ (more will be said about this in section 7).

§ 5. — The perfect functionnal completion of $\mathcal{F}_\alpha$.

It will be shown that the normed functional class $\mathcal{F}_\alpha$ has a perfect functional completion. For $\alpha > 0$, the exceptional class for the perfect completion is the class of sets on which a potential $G_\alpha g$ of a square integrable function g can be undefined; the functions in the saturated perfect completion are those which are equal except on an exceptional set to such a potential.

For $\alpha > 0$, let $\mathfrak{A}_{2\alpha}$ denote the class of all sets A such that for some square integrable function $g \geqq 0$,

$$(5,\ 1) \qquad A \subset \underset{x}{E}\,[G_\alpha g(x) = +\infty],$$

and let P^α denote the class of all functions u, defined exc. $\mathfrak{A}_{2\alpha}$, such that for some square integrable function g,

$$(5,\ 2) \qquad u(x) = G_\alpha g(x) \text{ exc. } \mathfrak{A}_{2\alpha}.$$

Since the kernel G_α is integrable, it follows from a standard theorem on products of composition that for every square integrable function g, $G_\alpha g$ is defined and finite almost everywhere and is square integrable. In particular, every set in $\mathfrak{A}_{2\alpha}$ has Lebesgue measure 0. Furthermore, the Fourier transform of $G_\alpha g$ is

$$(5,\ 3) \quad (G_\alpha g)\hat{}\,(\xi) = (2\pi)^{n/2}\,\hat{G}_\alpha(\xi)\hat{g}(\xi) = (1+|\xi|^2)^{-\alpha/2}\hat{g}(\xi),$$

which shows that [23].

$$(5,\ 4) \qquad \|G_\alpha g\|_\alpha = \|g\|_{L^2} \quad \textit{if} \quad g \in L^2.$$

Formula (5, 4) shows that if $g \in L^2$ then the following conditions are equivalent: (*a*) $g = 0$ almost everywhere; (*b*) $G_\alpha g$ is identically 0; (*c*) $G_\alpha g = 0$ exc. $\mathfrak{A}_{2\alpha}$; (*d*) $G_\alpha g = 0$ almost everywhere; (*e*) $\|G_\alpha g\|_\alpha = 0$. Indeed, it is obvious that each

[23] We use here the expression (1, 9) for $\|u\|_\alpha$.

condition implies the one following, and by (5, 4), (*e*) implies (*a*). Henceforth, P^α will denote the normed class in which the norm is $\|u\|_\alpha$.

1) *$\mathfrak{A}_{2\alpha}$ is an exceptional class. P^α is a complete functional space relative to $\mathfrak{A}_{2\alpha}$.*

Proof. — In order to prove that $\mathfrak{A}_{2\alpha}$ is an exceptional class it must be proved that $\mathfrak{A}_{2\alpha}$ is hereditary (that is, that if $A \in \mathfrak{A}_{2\alpha}$ and $B \subset A$, then $B \in \mathfrak{A}_{2\alpha}$) and σ-additive. The first is obvious. To see the second, if $A_n \in \mathfrak{A}_{2\alpha}$, let g_n be a function $\geqq 0$ in L^2 such that

$$A_n \subset \underset{x}{E}\,[G_\alpha g_n(x) = +\infty] \qquad \textit{and} \qquad \|g_n\|_{L^2} \leqq 2^{-n}.$$

Then, if

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \qquad \textit{and} \qquad g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n,$$

clearly g is a function $\geqq 0$ in L^2 such that (5, 1) holds, so $A \in \mathfrak{A}_{2\alpha}$.

From the equivalence of (*a*) — (*e*) above it follows that P^α is a normed functional class rel. $\mathfrak{A}_{2\alpha}$, i.e. that the conditions $u = 0$ exc. $\mathfrak{A}_{2\alpha}$ and $\|u\|_\alpha = 0$ are equivalent. From (5, 4) it is obvious that P^α is complete. By definition P^α is saturated. All that remains is to prove the functional space property.

From any sequence converging to 0 we can choose a subsequence $\{u_n\}$ such that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_\alpha < \infty.$$

If $u_n = G_\alpha g_n$ except on the set $A_n \in \mathfrak{A}_{2\alpha}$, let

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |g_n(x)|.$$

Then $g \in L^2$, and by the Lebesgue convergence theorem, $G_\alpha g_n(x) \to 0$ for every $x \notin A_0 = \underset{x}{E}\,[G_\alpha g(x) = +\infty]$. Hence $u_n(x) \to 0$ for every x not in the set $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, which belongs to $\mathfrak{A}_{2\alpha}$. This proves the functional space property, and the proof of 1) is complete.

As was mentioned before, the norm $\|u\|_\alpha$ is obviously equi-

valent to $|u|_\alpha$. Henceforth in this chapter we will consider $\mathcal{F}_\alpha$ as provided with the norm $||u||_\alpha$. The set functions δ, c_1, c_2, etc., are formed with this norm.

2) P^α *is the perfect functional completion of* $\mathcal{F}_\alpha$.

Proof. — In order to show that $\mathcal{F}_\alpha \subset P^\alpha$, let $u \in \mathcal{F}_\alpha$, put $\hat{g} = (1 + |\xi|^2)^{\alpha/2}\hat{u}$, and let g be the inverse Fourier transform of $\hat{g}$. Since u is in $C_0^\infty(R^n)$, $\hat{g}$ is obviously both integrable and square integrable, so that g is continuous, bounded and square integrable. Therefore, $G_\alpha g$ is continuous and in P^α. Since $\hat{u} = (G_\alpha g)^\wedge$, it follows that $u = G_\alpha g$ almost everywhere, but since both functions are continuous, $u = G_\alpha g$ everywhere. Thus $u \in P^\alpha$, and so $\mathcal{F}_\alpha \subset P^\alpha$.

Let $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha$ denote the closure of $\mathcal{F}_\alpha$ in P^α. $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha$ is a functional completion of $\mathcal{F}_\alpha$ of the type considered in section 2, and it must be shown that $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha = P^\alpha$, and that this completion is perfect. Since for each $u \in P^\alpha$, $||u||_\alpha$ is finite, it follows from 5) section 2, that each $u \in P^\alpha$ is equal almost everywhere to some $v \in \tilde{\mathcal{F}}_\alpha$. Both u and v are in P^α, however, and so from $u = v$ a. e. follows $||u - v||_\alpha = 0$, and hence $u = v$ exc. $\mathfrak{A}_{2\alpha}$. Thus $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha = P^\alpha$. All of the results of section 2 are now applicable to P^α.

Finally, we show that if $A \in \mathfrak{A}_{2\alpha}$ and if S is any sphere, then there exists a Cauchy sequence in $\mathcal{F}_\alpha$ which converges pointwise to $+\infty$ everywhere on $A \cap S$. This will show that $A \cap S$, and hence A itself, must be an exceptional set for any functional completion of $\mathcal{F}_\alpha$, and this will complete the proof of 2). By 6), section 2 (take $\varphi \in C_0^\infty$ and $= 1$ on S), it is sufficient to show that there is a Cauchy sequence $\{u_n\}$ in P^α such that u_n is of class C^∞ and such that $u_n(x) \to +\infty$ at every point of A. The existence of such a sequence is given by the following proposition.

3) *Let* $\{e_\rho\}$ *be a family of regularizing functions. If* $u \in L^2$, *then* $u_\rho = u * e_\rho$ *is of class* C^∞ *and belongs to* P^α *for all* α. *If* $u \in P^\alpha$, *then* $||u_\rho||_\alpha \leq ||u||_\alpha$ *and* $u_\rho \to u$ *both in* P^α *and pointwise exc.* $\mathfrak{A}_{2\alpha}$. *Moreover, if* $u = G_\alpha g$ *where* $g \geq 0$, *then* $u_\rho \to u$ *pointwise everywhere.*

Proof. — It is clear that u_ρ is of class C^∞. For the Fourier transform of u_ρ we have

$$\hat{u}_\rho(\xi) = (2\pi)^{n/2}\hat{u}(\xi)\hat{e}_\rho(\xi) = (2\pi)^{n/2}\hat{u}(\xi)\hat{e}(\rho\xi).$$

Since e is of class C_0^∞, it follows that the product of $\hat{e}$ with any polynomial is bounded, and hence $||u_\rho||_\alpha < \infty$ so that $u_\rho \in P^\alpha$ for all α.

If $u \in P^\alpha$, then

$$||u_\rho||_\alpha^2 = \int (1 + |\xi|^2)^\alpha |(2\pi)^{n/2}\hat{e}(\rho\xi)|^2 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \leqq ||u||_\alpha^2$$

since $|\hat{e}(\xi)| \leqq (2\pi)^{-n/2}$.

Finally, if $u = G_\alpha g$ with $g \in L^2$, then $u_\rho = G_\alpha(g * e_\rho)$. It is well known that when $g \in L^2$, $g * e_\rho \in L^2$ and $g * e_\rho$ converges in L^2 to g. Hence $\{u_\rho\}$ converges in P^α to u. If $g \geqq 0$, then by the corollary to the mean value theorem in the last section $u_\rho \to u$ pointwise everywhere. It follows that whether $g \geqq 0$ or not, $u_\rho(x) \to u(x)$ at every x such that $u(x) = G_\alpha g(x)$ is defined, i.e. pointwise exc. $\mathfrak{A}_{2\alpha}$.

4) P^α *is a proper functional space if and only if* $\alpha > \frac{n}{2}$. *If* $\alpha > \frac{n}{2}$ *and* m *is an integer* $< \alpha - \frac{n}{2}$, *then every function in* P^α *is of class* C^m.

Proof. — If $\alpha \leqq \frac{n}{2}$, then, by (4, 2) $G_\alpha(x-y)$ as a function of y is not square integrable, and there exists a square integrable function $g \geqq 0$ such that

$$\int G_\alpha(x - y)\, g(y) dy = +\infty,$$

which shows that the set $\{x\}$ belongs to $\mathfrak{A}_{2\alpha}$. On the other hand, if $\alpha > \frac{n}{2}$, then, by (4, 2) and (4, 3), G_α is square integrable, so for every square integrable function g, $G_\alpha g$ is defined everywhere and is a bounded continuous function. The second statement is proved by making use of (4, 4) and a similar argument. It can also be proved easily by Fourier transforms.

It can be shown that the exceptional class $\mathfrak{A}_{2\alpha}$ is precisely the class of sets of capacity 0 for the capacity c_1 associated with the space P^α [24]. This result depends on the strong majoration property defined in section 3, of chapter I.

5) P^α *has the strong majoration property.*

[24] From now on, $\mathfrak{C}$ and $\mathfrak{S}$ are the class of sets and set function associated with P^α (not as earlier, those associated with $\mathcal{F}_\alpha$). The capacity c_1 associated with P^α is the same as that associated with $\mathcal{F}_\alpha$.

Indeed, if $u = G_\alpha g$ and if $u' = G_\alpha |g|$, then $u'(x) \geqq |u(x)|$ exc. $\mathfrak{A}_{2\alpha}$ and $||u'||_\alpha = ||u||_\alpha$.

6) *If* $B \in \mathfrak{L}$, *then* $c_1(B) < \infty$. *If* $c_1(B) < \infty$, *then* $B \in \mathfrak{L}$ *and there is a function* $g \geqq 0$ *in* L^2 *such that* $u = G_\alpha g$ *satisfies*

$$(5, 5) \quad u \geqq 1 \text{ on B exc. } \mathfrak{A}_{2\alpha} \quad \text{and} \quad ||u||_\alpha = \delta(B) = c_1(B).$$

All the assertions follow from the general theory in chapter I (propositions 2 and 3, section 3) except the fact that the minimizing function u is equal to $G_\alpha g$ with $g \geqq 0$. But if $u = G_\alpha f$, take $g = |f|$.

It is evident from 6) that

7) $\mathfrak{A}_{2\alpha}$ *is the class of sets of capacity* 0 *for the capacity* c_1.

Before beginning a detailed study of capacities we record one additional consequence of the general theory (chapter I, § 3, 3)).

8) *If* B *is the union of the increasing sequence* $\{B_n\}$, *then* $c_1(B) = \lim c_1(B_n)$.

REMARK. — It was mentioned in the footnote to proposition 1, § 2, that the perfect functional completion of $\mathfrak{F}_0$ is L^2. In order to maintain a systematic notation we shall sometimes use P^0 to designate L^2 and $\mathfrak{A}_0$ to designate the class of sets of Lebesgue measure 0. It is not difficult to prove (see [1]) that the set functions associated with P^0 satisfy

$$\delta(A)^2 = c_1(A)^2 = c_2(A) = |A|.$$

§ 6. — Capacities.

A theory of capacity of the classical type rests ultimately on the use of positive pseudo-reproducing kernels. In the classical theory of Riesz and Frostman of capacity of order 2α the kernel is the Riesz kernel (1, 7), which is the pseudo-reproducing kernel of the completion of $C_0^\infty(R^n)$ with respect to the norm $\sqrt{d_\alpha}$. In the present theory the kernel is $G_{2\alpha}$, which is the pseudo-reproducing kernel for P^α [25]. In the first part of the section we assume $\alpha > 0$.

[25] It is not necessary that the reader be acquainted with the theory of pseudo-reproducing kernels. The necessary details will be given fully. Some additional results on this subject can be found in [2].

The capacity of order 2α of a compact set C is defined to be the number $\gamma_{2\alpha}(C)$ determined by

$$(6,\ 1)\qquad \frac{1}{\gamma_{2\alpha}(C)} = \inf \iint G_{2\alpha}(x-y)\, d\mu(x)\, d\mu(y),$$

where the infimum is taken over all positive Borel measures on C of total mass 1. The inner capacity $\gamma^i_{2\alpha}(A)$ of an arbitrary set A is the upper bound of the capacities of the compact sets $C \subset A$. The outer capacity $\gamma^0_{2\alpha}(A)$ of an arbitrary set A is the lower bound of the inner capacities of the open sets $G \supset A$.

Remark 1. — The standard capacity of order $2\alpha < n$ is obtained in the same way by simply replacing the kernel $G_{2\alpha}$ by the Riesz kernel (1, 7). The standard capacity $\tilde{\gamma}_{2\alpha}$ is easily seen to be invariant under translations and rotations and to have the following property with respect to a homothetic transformation with ratio t: $\tilde{\gamma}_{2\alpha}(tC) = t^{n-2\alpha}\tilde{\gamma}_{2\alpha}(C)$. Our present capacity obviously retains the invariance under translations and rotations, but it does not have as simple a behavior with respect to homothetic transformations. It is easy to show by means of (4, 2) that the following relation holds between our present capacity and the standard capacity:

$$\lim_{t \to 0} t^{2\alpha-n}\, \gamma_{2\alpha}(tC) = \tilde{\gamma}_{2\alpha}(C),$$

for every compact set C. Corresponding statements hold for the inner and outer capacities of arbitrary bounded sets, and in each case the limit is uniform when the diameter of the set remains bounded.

A capacity of order n has been studied under the name of logarithmic capacity, studied rather extensively in the case $n = 2$ and rather sketchily for larger n. The logarithmic capacity is obtained as above by replacing the kernel G_n by the kernel $\log \frac{r}{|x|}$, where r is any number larger than the diameter of the set C. The resulting set function $\tilde{\gamma}_n(r, C)$ is then defined for all compact sets C of diameter $\leq r$. Sometimes the set function

$$\tilde{\gamma}_n(C) = r \exp\left(-\frac{1}{\tilde{\gamma}_n(r, C)}\right),$$

which is independent of r, is used in place of the logarithmic capacity.

It is clear from (4, 2) that for each r there is a constant c such that

$$\frac{1}{c}\tilde{\gamma}_n(r, C) \leq \gamma_n(C) \leq c\tilde{\gamma}_n(r, C)$$

holds for every compact set C of diameter $\leq r$. The exact limiting relation corresponding to the one given above for $\gamma_{2\alpha}$ and $\tilde{\gamma}_{2\alpha}$ is a little more complicated in this case.

If γ is Euler's constant, we have

$$\lim_{t\to 0}\left\{\frac{2^{n-1}\pi^{n/2}\Gamma(n/2)}{\gamma_n(tC)} - \log\frac{1}{t}\right\} + \log\frac{r}{2} + \gamma = \frac{1}{\tilde{\gamma}_n(r; C)}$$

for every compact set C of diameter $\leq r$. Equivalently

$$\lim_{t\to 0} 2e^{-\gamma}\frac{1}{t}\exp\left\{-\frac{2^{n-1}\pi^{n/2}\Gamma(n/2)}{\gamma_n(tC)}\right\} = \tilde{\gamma}_n(C)$$

for every compact set C. To establish these relations, an improvement of (4, 2) is needed, namely

$$\text{as} \quad x \to 0, \quad G_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}\pi^{n/2}\Gamma(n/2)}\log\frac{2e^{-\gamma}}{|x|} + O(|x|^{2-\epsilon})$$ [26].

Since $G_\alpha(r)/R_\alpha(r)$ (with $0 < \alpha < n$) is decreasing for $0 < r < \infty$ from 1 to 0 (using (3, 7), (3, 3), (3, 4) and (3, 5)), we obtain for sets A of diameter $\leq r$

$$\tilde{\gamma}^0_\alpha(A) \leq \gamma^0_\alpha(A) \leq \frac{R_\alpha(r)}{G_\alpha(r)}\tilde{\gamma}^0_\alpha(A);$$

hence the sets with $\gamma^0_\alpha(A) = 0$ are the same as those with $\tilde{\gamma}^0_\alpha(A) = 0$.

Remark 2. — Comparison of our potentials with the Riesz potentials of the same order $\alpha < \frac{n}{2}$ shows that locally the

[26] The first part of (4, 2) can be improved to

$$\text{as } x \to 0, \quad G_\alpha(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}{2^\alpha\pi^{n/2}\Gamma(\alpha/2)}|x|^{\alpha-n} + O\left(\max\left(|x|^{\alpha-n+2}, 1\right)\right)$$

for $\alpha < n$, but this will not be needed.

potentials are the same, but globally (because of the exponential decrease of G_α) the Riesz potentials form a larger class (see Remark in § 9). Consequently, there are many statements which are true for the functions in P^α and untrue for the Riesz potentials. For instance, every function in P^α is square integrable, along with all derivatives of order $\leqq \alpha$. Also, the product of a function in P^α with a bounded function of class $C^{(\alpha^*, 1)}$ is in P^α (see 6) § 2). In addition, the proofs of many common theorems are simpler for P^α. On the other hand, several of the formulas become more complicated due to the fact that $G_{2\alpha}$ is not homogeneous — for instance, the formulas in Remark 1 and those in proposition 20) below.

The potential of a measure with respect to the kernel $G_{2\alpha}$ is defined as follows ([27])

$$G_{2\alpha}\mu(x) = \int G_{2\alpha}(x-y)d\mu(y).$$

$G_{2\alpha}\mu$ is defined everywhere, provided $+\infty$ is admitted as a value, and is lower semi-continuous. Of primary interest are the measures μ for which the 2α-energy

$$(6, 2) \quad \|\mu\|_{2\alpha}^2 = \iint G_{2\alpha}(x-y)d\mu(x)d\mu(y) = \int G_{2\alpha}\mu d\mu$$

is finite. However, we shall begin by proving a few results about arbitrary measures.

If μ is a measure with finite total mass, then, by (4, 6′),

$$(6, 3) \quad \int G_{2\alpha}\mu(x)\,dx = \iint G_{2\alpha}(x-y)d\mu(y)dx = |\mu|,$$

and in particular, $G_{2\alpha}\mu$ is finite almost everywhere and is an integrable function. By using this and (4, 3) the following result is easily proved.

1) *If μ is a measure such that*

$$(6, 4) \quad \int (1+|x|)^{\frac{2\alpha-n-1}{2}} e^{-|x|}d\mu(x) < \infty$$

then $G_{2\alpha}\mu$ is finite almost everywhere and is integrable over every bounded set. If (6, 4) *holds and $2\alpha > n$, $G_{2\alpha}\mu$ is finite and*

([27]) Henceforth the term measure will refer to a positive Borel measure unless otherwise stated. If μ is such a measure, $|\mu| = \mu(R^n)$ is its total mass (possibly $+\infty$). A set E is said to be a support of μ if $\mu(R^n - E) = 0$; a support need not be closed.

continuous everywhere. If (6, 4) *does not hold, then* $G_{2\alpha}\mu$ *is identically* $+\infty$.

The following result does not require proof.

2) *The mean value theorem (proposition* 1, § 4*) holds for potentials* $G_{2\alpha}\mu$ *as well as for potentials* $G_\alpha g$.

The next two propositions were proved by Frostman [11] for the Riesz kernel. The proofs given here are quite similar.

3) *Let* μ *be a measure with a compact support* C. *There is a constant* c *(depending on the diameter of* C, α, *and* n, *but not on* μ*) such that if* $G_{2\alpha}\mu(x) \leqq 1$ a. e. (μ) [28] *then* $G_{2\alpha}\mu(x) \leqq c$ *everywhere.*

Proof. — Since $G_{2\alpha}\mu$ is lower semi-continuous, the subset F of C on which $G_{2\alpha}\mu \leqq 1$ is closed, and by assumption F contains a support of μ. If for an arbitrary point x, $\bar{x}$ denotes a point in F closest to x, then for any point $y \in$ F, $|x-y| \geqq \frac{1}{2}|\bar{x}-y|$. Hence, $G_{2\alpha}(x-y) \leqq G_{2\alpha}\left(\frac{1}{2}(\bar{x}-y)\right)$. By (4, 2), there is a constant c (depending only on the diameter of C, α, and n) such that for every $\rho \leqq$ the diameter of C, $G_{2\alpha}(\rho/2) \leqq cG_{2\alpha}(\rho)$. Thus, we have $G_{2\alpha}\mu(x) \leqq cG_{2\alpha}\mu(\bar{x}) \leqq c$.

4) *If* $G_{2\alpha}\mu$ *is continuous on a closed support of* μ, *then* $G_{2\alpha}\mu$ *is continuous on* R^n.

Proof. — In view of proposition 1) we may assume $2\alpha \leqq n$. This implies that if $\mu(\{x_0\}) > 0$, $G_{2\alpha}\mu(x_0) = +\infty$, hence, by our hypothesis, μ cannot have point-masses. Let F be a closed support of μ on which $G_{2\alpha}\mu$ is continuous and let x_0 be an arbitrary point. For each n, write $\mu = \mu'_n + \mu''_n$, where μ''_n is the restriction of μ to the sphere $S(x_0, 1/n)$. Since $\mu(\{x_0\}) = 0$, it follows that $G_{2\alpha}\mu(x) = \lim G_{2\alpha}\mu'_n(x)$ for each x. Therefore, if for arbitrary $\varepsilon > 0$,

$$O_n = F \cap \underset{x}{E}\,[G_{2\alpha}\mu'_n(x) > G_{2\alpha}\mu(x) - \varepsilon],$$

then $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$. Moreover, O_n is relatively open in F, for $G_{2\alpha}\mu$ is continuous on F and $G_{2\alpha}\mu'_n$ is lower semi-continuous. Consequently for sufficiently large n, O_n contains $F \cap S(x_0, 1)$,

[28] a.e. (μ) means « except on a set of μ-measure 0 ».

and, therefore, for sufficiently large n, $G_{2\alpha}\mu''_n \leqq \epsilon$ on $F \cap S(x_0, 1)$, and by proposition 3, $G_{2\alpha}\mu''_n \leqq c\epsilon$ everywhere. Thus

$$G_{2\alpha}\mu'_n \to G_{2\alpha}\mu$$

uniformly, and since each $G_{2\alpha}\mu'_n$ is continuous at x_0, so is $G_{2\alpha}\mu$.

We turn now to measures for which the 2α-energy defined in (6, 2) is finite. The class of such measures will be called $\Omega_{2\alpha}$. Note that (6, 3) shows that $\Omega_{2\alpha}$ contains the restriction of the Lebesgue measure to any bounded set.

5) *The following conditions on a measure* μ *are equivalent.*

(*a*) $\mu \in \Omega_{2\alpha}$.

(*b*) $G_\alpha\mu$ *is square integrable.*

(*c*) $G_{2\alpha}\mu \in P^\alpha$.

(*d*) *Every function in* P^α *is* μ*-integrable.*

(*e*) *Every function in* P^α *is* μ*-integrable, and the integral is a continuous linear functional on* P^α.

PROOF. — The composition formula (4, 7) gives

$$G_{2\alpha}\mu = G_\alpha G_\alpha\mu \qquad \textit{and} \qquad \|\mu\|_{2\alpha} = \|G_\alpha\mu\|_{L^2} \qquad \textit{and}$$

$$(6,5) \qquad \int G_\alpha g\,d\mu = \int G_\alpha\mu(x)g(x)dx \quad \textit{for any} \quad g \geqq 0.$$

It follows that $\mu \in \Omega_{2\alpha}$ if and only if $G_\alpha\mu \in L^2$, and that $G_\alpha\mu \in L^2$ if and only if every function in P^α is μ-integrable. Therefore, (*a*), (*b*), (*d*) and (*e*) are equivalent and imply (*c*).

If (*c*) holds, then for some $g \in L^2$, $G_\alpha g = G_{2\alpha}\mu$, and for every $f \geqq 0$ in L^2 we have,

$$\int G_\alpha f\, g dx = \int G_\alpha g\, f dx = \int G_\alpha G_\alpha\mu\, f\, dx = \int G_\alpha f\, G_\alpha\, \mu dx.$$

Hence, for every $f \in L^2$,

$$\int G_\alpha f\, g dx = \int G_\alpha f\, G_\alpha\mu dx,$$

and since f can be chosen so that $G_\alpha f$ is an arbitrary function in $C_0^\infty(R^n)$, it follows that $G_\alpha\mu = g$ a.e. Therefore, $G_\alpha\mu \in L^2$.

The third formula in (6, 5) gives the equation which expresses the reproducing property of $G_{2\alpha}$.

(6, 6) *For every* $u \in P^\alpha$ *and* $\mu \in \Omega_{2\alpha}$, $\quad \int u\, d\mu = (u, G_{2\alpha}\mu)_\alpha$[29].

[29] $(u, v)_\alpha$ denotes the inner product in the Hilbert space P^α.

6) *If* μ *and* ν *belong to* $\Omega_{2\alpha}$ *and if* $G_{2\alpha}\mu = G_{2\alpha}\nu$ *almost everywhere, then* $\mu = \nu$ (30).

Proof. — For every $f \in L^2$ (first for $f \geqq 0$, then for all $f \in L^2$)

$$\int G_{2\alpha} f \, d\mu = \int G_{2\alpha}\mu f \, dx = \int G_{2\alpha}\nu f \, dx = \int G_{2\alpha} f \, d\nu,$$

and f can be chosen so that $G_{2\alpha} f$ is an arbitrary function in $C_0^\infty(R^n)$.

Proposition 6) (and the second equality in (6, 5)) show that $\|\mu\|_{2\alpha}^2$ is a positive definite quadratic form on $\Omega_{2\alpha}$. If $(\mu, \nu)_{2\alpha}$ denotes the corresponding bilinear form, then

$$(6,7) \quad (\mu, \nu)_{2\alpha} = \int G_{2\alpha}(x-y)\,d\mu(y)\,d\nu(x) = \int G_{2\alpha}\mu(x)\,d\nu(x) = \int G_{2\alpha}\nu(y)\,d\mu(y) = (G_{2\alpha}\mu, G_{2\alpha}\nu)_\alpha.$$

By virtue of 6) and (6, 7) the correspondence between the measures of finite 2α-energy and their potentials is 1-1, linear, and inner product preserving. In order to simplify the notation, we shall use the same symbol $\Omega_{2\alpha}$ to denote both the class of measures of finite 2α-energy and the class of their potentials.

7) $\Omega_{2\alpha}$ *is a closed convex cone in* P^α. *The subspace generated by* $\Omega_{2\alpha}$ *is dense in* P^α (31).

Proof. — It is obvious that $\Omega_{2\alpha}$ is a convex cone. If $u_n \to u$ in P^α, where $u_n = G_{2\alpha}\mu_n$, then for each $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$

$$(\varphi, u)_\alpha = \lim_{n\to\infty} (\varphi, u_n)_\alpha = \lim_{n\to\infty} \int \varphi(x)\,d\mu_n(x).$$

Hence, if $\varphi \geqq 0$, then $(\varphi, u)_\alpha \geqq 0$, and by the well known theorem of Riesz on the representation of non-negative linear functionals there exists a measure μ such that

$$(6,8) \qquad (\varphi, u)_\alpha = \int \varphi(x)\,d\mu(x) \quad \textit{for} \quad \varphi \in C_0^\infty(R^n).$$

In general, if a sequence $\{\mu_n\}$ of measures is such that

$$\int \varphi(x)\,d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int \varphi(x)\,d\mu_n(x) \quad \textit{for} \quad \varphi \in C_0^\infty(R^n),$$

(30) The same statement can be proved (by a different argument) when μ and ν are only supposed to satisfy (6, 4).

(31) For Riesz potentials this result is due to H. Cartan [5, 6] and J. Deny [8].

then for every non-negative lower semi-continuous function φ

$$\int \varphi(x)\, d\mu(x) \leq \liminf \int \varphi(x)\, d\mu_n(x).$$

Applying this remark first to $\varphi = G_{2\alpha}$ and then to $\varphi = G_{2\alpha}\mu$, we get

$$\|\mu\|_{2\alpha} \leq \liminf \|\mu_n\|_{2\alpha} < \infty,$$

so $\mu \in \Omega_{2\alpha}$. By (6, 6) and (6, 8), $(\nu, u)_\alpha = (\nu, G_{2\alpha}\mu)_\alpha$ for every $\nu \in C_0^\infty(R^n)$, and since such ν are dense in P^α, $u = G_{2\alpha}\mu \in \Omega_{2\alpha}$.

Finally, to see that the subspace generated by $\Omega_{2\alpha}$ is dense in P^α, we observe that if a function $u \in P^\alpha$ is such that

$$\int u\, d\mu = 0 \quad \textit{for all} \quad \mu \in \Omega_{2\alpha},$$

then, since the restriction of the Lebesgue measure to any bounded set belongs to $\Omega_{2\alpha}$, the mean value of u over every sphere is 0, and by the mean value theorem (proposition 1, § 5) $u = 0$ exc. $\mathfrak{A}_{2\alpha}$.

For each set A in R^n, $\Omega_{2\alpha}(A)$ will denote the class of measures $\mu \in \Omega_{2\alpha}$ which are supported by A (i. e., $\mu(R^n - A) = 0$), as well as the corresponding class of potentials. It results from 7) that if A is a closed set then $\Omega_{2\alpha}(A)$ is a closed convex cone, and if A is any set $\overline{\Omega_{2\alpha}(A)} \subset \Omega_{2\alpha}(\overline{A})$. It is obvious from the definition that every restriction of a measure in $\Omega_{2\alpha}(A)$ belongs also to $\Omega_{2\alpha}(A)$. A similar statement is needed for $\overline{\Omega_{2\alpha}(A)}$.

8) *If f is a bounded non-negative Borel function and $\mu \in \overline{\Omega_{2\alpha}(A)}$ then the measure μ_f defined by*

$$\mu_f(E) = \int_E f(x)\, d\mu(x)$$

belongs to $\overline{\Omega_{2\alpha}(A)}$. In particular, the restriction of μ to any Borel set belongs to $\overline{\Omega_{2\alpha}(A)}$.

Proof. — We prove first that 8) holds when $f \in C_0^\infty(R^n)$. Since $\mu \in \overline{\Omega_{2\alpha}(A)}$, there is a sequence $\{\mu_n\}$ in $\Omega_{2\alpha}(A)$ converging to μ. It is clear that

$$\|(\mu_n)_f\|_{2\alpha} \leq (\sup f)\|\mu_n\|_{2\alpha}$$

and for every $\nu \in C_0^\infty(R^n)$

$$(\nu, G_{2\alpha}(\mu_n)_f)_\alpha = \int \nu d(\mu_n)_f = \int f\nu\, d\mu_n = (f\nu, G_{2\alpha}\mu_n)_\alpha$$
$$\to (f\nu, G_{2\alpha}\mu)_\alpha = (\nu, G_{2\alpha}\mu_f)_\alpha.$$

Therefore, $G_{2\alpha}(\mu_n)_f \to G_{2\alpha}\mu_f$ weakly, and as $\overline{\Omega_{2\alpha}(A)}$ is closed and convex (hence weakly closed) $G_{2\alpha}\mu_f \in \overline{\Omega_{2\alpha}(A)}$, which proves 8) if $f \in C_0^\infty(R)$.

Now, it is well known that there exists a uniformly bounded sequence $\{f_n\}$ in $C_0^\infty(R^n)$ such that $f_n \to f$ a.e. (μ). Then for every $\nu \in P^\alpha$

$$(\nu, G_{2\alpha}\mu_{f_n})_\alpha = \int \nu f_n\, d\mu \to \int \nu f\, d\mu = (\nu, G_{2\alpha}\mu_f)_\alpha.$$

Therefore, $G_{2\alpha}\mu_{f_n} \to G_{2\alpha}\mu_f$ weakly, and as before $G_{2\alpha}\mu_f \in \overline{\Omega_{2\alpha}(A)}$.

Next we describe the process of sweeping or balayage. If A is any set in R^n and if $\nu \in P^\alpha$, then, since $\overline{\Omega_{2\alpha}(A)}$ is closed and convex, there is a unique $u = G_{2\alpha}\mu \in \overline{\Omega_{2\alpha}(A)}$ which realizes the minimum distance form ν to functions of $\overline{\Omega_{2\alpha}(A)}$. This u, or the corresponding measure μ, is called the result of sweeping ν onto A. Simple and familiar arguments show that if μ is the result of sweeping ν onto A, then $(G_{2\alpha}\mu - \nu, G_{2\alpha}\mathrm{v})_\alpha \geqq 0$ for every $\mathrm{v} \in \overline{\Omega_{2\alpha}(A)}$, and $(G_{2\alpha}\mu - \nu, G_{2\alpha}\mu)_\alpha = 0$. The inequality, combined with proposition 8), shows that $G_{2\alpha}\mu \geqq \nu$ a. e. (v) for each $\mathrm{v} \in \overline{\Omega_{2\alpha}(A)}$; and then the equality shows that $G_{2\alpha}\mu = \nu$ a. e. (μ).

9) *Let* μ *be the result of sweeping* ν *onto* A. *Then*

(*a*) $G_{2\alpha}\mu \geqq \nu$ *a. e.* (v) *for each* $\mathrm{v} \in \overline{\Omega_{2\alpha}(A)}$.

(*b*) $G_{2\alpha}\mu = \nu$ *a. e.* (μ).

(*c*) *If* A *is either open or closed,* $G_{2\alpha}\mu \geqq \nu$ *on* A *exc.* $\mathfrak{A}_{2\alpha}$.

(*d*) *If* A *is open and* ν *is continuous on* A, $G_{2\alpha}\mu \geqq \nu$ *everywhere on* A.

Proof. — Parts (*a*) and (*b*) have been proved already. Part (*d*) and the half of (*c*) which is concerned with open sets follow from the mean value theorem.

To prove the remaining half of (*c*), let $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} D_k$, where the D_k are open and $\overline{D}_k \subset D_{k-1}$. Then $\Omega_{2\alpha}(A) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\Omega_{2\alpha}(D_k)}$,

from which if follows easily that if μ_k is the result of sweeping v onto D_k, then $G_{2\alpha}\mu_k \to G_{2\alpha}\mu$. By what has been shown, $G_{2\alpha}\mu_k \geq v$ on D_k exc. $\mathfrak{A}_{2\alpha}$. Hence $G_{2\alpha}\mu_k \geq v$ on A exc. $\mathfrak{A}_{2\alpha}$, and by the functional space property, $G_{2\alpha}\mu \geq v$ on A exc. $\mathfrak{A}_{2\alpha}$.

If A is a bounded set there exist functions in P^α which are equal to 1 everywhere on $\bar{A}$. The measure μ_A that results from sweeping any such function onto A is called the capacitary distribution of A. The corresponding potential $u_A = G_{2\alpha}\mu_A$ is called the capacitary potential of A [32].

10) (*a*) $u_A \geq 1$ a.e. (ν) *for each* $\nu \in \overline{\Omega_{2\alpha}(A)}$; *in particular*, $u_A \geq 1$ *on* A a.e. (ν) *for each* $\nu \in \Omega_{2\alpha}$.

(*b*) $u_A = 1$ a.e. (μ_A).

(*c*) *There is a constant c depending only on r, α, and n such that if the diameter of* A *is* $\leq r$, *then* $u_A \leq c$ *everywhere.*

(*d*) $|\mu_A| = \|\mu_A\|^2_{2\alpha} = \|u_A\|^2_\alpha$.

(*e*) *If* A *is open,* $u_A \geq 1$ *everywhere on* A.

(*f*) *If* A *is closed,* $u_A \geq 1$ *on* A *exc.* $\mathfrak{A}_{2\alpha}$.

Proof. — Parts (*a*), (*b*), (*e*), and (*f*) are direct consequences of 9). Part (*c*) follows from part (*b*) and proposition 3). Part (*d*) follows from part (*b*) and (6, 6) and (6, 7).

The next proposition, which shows that u_B can be taken for the function u of proposition 6), § 5 and that the normalized capacitary distribution realizes the minimum in (6, 1), is the first step in showing that the relations $(c_1)^2 = c_2 = \gamma^0_{2\alpha}$ hold.

11) *If* C *is a compact set, then* u_C *minimizes the expression* $\|v\|^2_\alpha$ *among all* $v \in P^\alpha$ *such that* $v \geq 1$ *on* C a.e. (ν) *for each* $\nu \in \Omega_{2\alpha}$. *Moreover,* $\dfrac{\mu_C}{|\mu_C|}$ *realizes the minimum in* (6, 1), *and*

$$\|u_C\|^2_\alpha = \|\mu_C\|^2_{2\alpha} = |\mu_C| = \delta(C)^2 = \gamma_{2\alpha}(C).$$

Proof. — If $v \geq 1$ on C a.e. (ν) for each $\nu \in \Omega_{2\alpha}$, then in particular $v \geq 1$ a.e. (μ_C). and hence

$$\|u_C\|^2_\alpha = |\mu_C| \leq \int v \, d\mu_C = (v, u_C)_\alpha \leq \|v\|_\alpha \|u_C\|_\alpha.$$

Therefore, $\|u_C\|_\alpha \leq \|v\|_\alpha$, and the first part of 11) is proved.

[32] Is is easily seen that μ_A and u_A are independent of the particular function which is swept onto A.

From this and 10)-(f) it follows that u_C realizes the minimum in the definition of $\delta(C)$ [33] which gives

$$\|u_C\|_\alpha^2 = \|\mu_C\|_{2\alpha}^2 = |\mu_C| = \delta(C)^2.$$

If $\nu \in \Omega_{2\alpha}(C)$ and $|\nu| = 1$, then by 10)-(a)

$$1 = |\nu| \leqq \int u_C\, d\nu = (\mu_C, \nu)_{2\alpha} \leqq \|\mu_C\|_{2\alpha} \|\nu\|_{2\alpha}.$$

Thus,

$$\|\nu\|_{2\alpha}^2 \geqq \frac{1}{\|\mu_C\|_{2\alpha}^2}$$

while if $\nu = \dfrac{\mu_C}{|\mu_C|}$,

$$\|\nu\|_{2\alpha}^2 = \frac{\|\mu_C\|_{2\alpha}^2}{|\mu_C|^2} = \frac{1}{|\mu_C|} = \frac{1}{\|\mu_C\|_{2\alpha}^2}$$

This shows that $\dfrac{\mu_C}{|\mu_C|}$ realizes the minimum in (6, 1) and that the value of the minimum is as stated.

12) *If* A *is a set* F_σ, *then* $\gamma_{2\alpha}^i(A) = c_1(A)^2$.

Proof. — By 11) and (5, 5), proposition 12) holds for compact sets. Therefore, by the definition of $\gamma_{2\alpha}^i(A)$ and proposition 8), § 5, proposition 12) holds for sets F_σ.

13) *For every set* A, $c_1(A) = \inf c_1(D)$, *the infimum being taken over all open sets* $D \supset A$.

Proof. — It can be supposed that $c_1(A) < \infty$, in which case, by 6) § 5, there exists, $g \geqq 0$ in L^2 such that $G_\alpha g \geqq 1$ on A exc. $\mathfrak{A}_{2\alpha}$ and $\|G_\alpha g\|_\alpha = c_1(A)$. For each $\rho < 1$ let

$$D_\rho = \underset{x}{\mathrm{E}}[G_\alpha g(x) > \rho].$$

D_ρ is an open set, $D_\rho \supset A$ exc. $\mathfrak{A}_{2\alpha}$, and

$$c_1(D_\rho) = \delta(D_\rho) \leqq \frac{1}{\rho}\delta(A) = \frac{1}{\rho}c_1(A).$$

Let $g_\rho \in L^2$ be $\geqq 0$ and such that $\|G_\alpha g_\rho\|_\alpha = 1$ and such that $A - D_\rho \subset \underset{x}{\mathrm{E}}[G_\alpha g_\rho(x) = +\infty]$. Let $D'_\rho = \underset{x}{\mathrm{E}}\left[G_\alpha g_\rho(x) > \dfrac{1}{\varepsilon}\right]$.

[33] We use the fact that, by definition of $\mathfrak{A}_{2\alpha}$ and by (6, 6), each set in $\mathfrak{A}_{2\alpha}$ is of measure 0 for each $\nu \in \Omega_{2\alpha}$.

Then D'_ρ is open and $c_1(D'_\rho) = \delta(D'_\rho) \leqq \epsilon$. Hence $A \subset D_\rho \cup D'_\rho$, $D_\rho \cup D'_\rho$ is open and

$$c_1(D_\rho \cup D'_\rho) \leqq c_1(D_\rho) + c_1(D'_\rho) \leqq \frac{1}{\rho} c_1(A) + \epsilon.$$

14) *For every set* A, $\gamma^0_{2\alpha}(A) = c_1(A)^2$.

Proof. — It is obvious that if A is open then $\gamma^0_{2\alpha}(A) = \gamma^i_{2\alpha}(A)$. Therefore, from 12) it follows that 14) holds if A is open. From this, 13), and the definition of $\gamma^0_{2\alpha}(A)$, it follows that 14) holds for arbitrary A.

15) *If* $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, *then* $\gamma^0_{2\alpha}(A) \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^0_{2\alpha}(A_k)$.

Proof. — We first show that if C_1 and C_2 are compact and $C = C_1 \cup C_2$, then $\gamma_{2\alpha}(C) \leqq \gamma_{2\alpha}(C_1) + \gamma_{2\alpha}(C_2)$. If μ_1 and μ_2 denote the restrictions of μ_C to C_1 and C_2, then

$$\gamma_{2\alpha}(C) = |\mu_C| \leqq |\mu_1| + |\mu_2|.$$

On the other hand,

$$|\mu_1| \leqq \int u_{C_1} d\mu_1 \leqq \|u_{C_1}\|_\alpha \|\mu_1\|_{2\alpha}.$$

Since $G_{2\alpha}\mu_1 \leqq G_{2\alpha}\mu_C = 1$ a.e. (μ_C), it follows that

$$G_{2\alpha}\mu_1 \leqq 1 \text{ a.e. } (\mu_1)$$

so that

$$\|\mu_1\|^2_{2\alpha} = \int G_{2\alpha}\mu_1 \, d\mu_1 \leqq |\mu_1|.$$

Combining these inequalities we get

$$|\mu_1| \leqq \|u_{C_1}\|^2_\alpha = \gamma_{2\alpha}(C_1).$$

Similarly, $|\mu_2| \leqq \gamma_{2\alpha}(C_2)$.

Now let D_1 and D_2 be open and let $D = D_1 \cup D_2$. It is well known that an arbitrary compact subset C of D can be expressed as $C = C_1 \cup C_2$, where $C_1 \subset D_1$, $C_2 \subset D_2$, and both are compact. By what has been shown,

$$\gamma_{2\alpha}(C) \leqq \gamma_{2\alpha}(C_1) + \gamma_{2\alpha}(C_2) \leqq \gamma^i_{2\alpha}(D_1) + \gamma^i_{2\alpha}(D_2),$$

and, as C is arbitrary, $\gamma^i_{2\alpha}(D) \leqq \gamma^i_{2\alpha}(D_1) + \gamma^i_{2\alpha}(D_2)$. If

$D = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$, D_k open, and if $C \subset D$ is compact, then for some m, $C \subset \bigcup_{k=1}^{m} D_k$ and

$$\gamma_{2\alpha}(C) \leq \gamma_{2\alpha}^{i}\left(\bigcup_{k=1}^{m} D_k\right) \leq \sum_{k=1}^{m} \gamma_{2\alpha}^{i}(D_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{2\alpha}^{i}(D_k).$$

Therefore, since C is arbitrary

$$\gamma_{2\alpha}^{i}(D) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{2\alpha}^{i}(D_k).$$

Since the inner and outer capacities are obviously the same for open sets, this gives 15) for open sets, and 15) for arbitrary sets follows immediately.

16) *For every set* A, $\gamma_{2\alpha}^{0}(A) = c_2(A)$.

Proof. — If $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ with $A_k \in \mathfrak{L}$, then

$$\gamma_{2\alpha}^{0}(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{2\alpha}^{0}(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} c_1(A_k)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \delta(A_k)^2.$$

Hence $\gamma_{2\alpha}^{0}(A) \leq c_2(A)$. On the other hand, if $\gamma_{2\alpha}^{0}(A) < \infty$, then $\gamma_{2\alpha}^{0}(A) = c_1(A)^2 = \delta(A)^2 \geq c_2(A)$.

Because of the above results it is possible to make use of an important theorem of Choquet [7] on capacitability. Choquet's theorem can be stated as follows:

Let γ be an increasing non-negative set function defined on all compact sets, and let γ^i and γ^0 be constructed from γ as in the paragraph after (6, 1). *If $\gamma^0(C) = \gamma(C)$ for every compact set* C *and if $\gamma^0(A) = \lim \gamma^0(A_n)$ whenever* A *is the union of the increasing sequence $\{A_n\}$, then $\gamma^i(A) = \gamma^0(A)$, for every analytic set* A.

By 14) we have $\gamma_{2\alpha}^{0}(A) = c_1(A)^2$. Hence, if C is compact, then by 11), $\gamma_{2\alpha}^{0}(C) = c_1(C)^2 = \delta(C)^2 = \gamma_{2\alpha}(C)$. In addition if A is the union of the increasing sequence $\{A_n\}$, then by 8), § 5, $\gamma_{2\alpha}^{0}(A) = \lim \gamma_{2\alpha}^{0}(A_n)$. Thus, the second part of the theorem below follows from Choquet's theorem. The first part has been proved already.

THEOREM 1. — *For every set* A, $\gamma^0_{2\alpha}(A) = c_2(A) = c_1(A)^2$, *and if* $c_1(A) < \infty$, $c_1(A) = \delta(A)$. *For every analytic set* A, $\gamma^i_{2\alpha}(A) = \gamma^0_{2\alpha}(A)$.

The several notations for the capacity of order 2α will now be dropped. Henceforth $\gamma_{2\alpha}$ will denote the outer capacity of order 2α, i. e., $\gamma_{2\alpha} = \gamma^0_{2\alpha} = c_2 = c_1^2$. Also $\gamma_{2\alpha}(A)$ will be called the 2α-capacity of A. The sets in $\mathfrak{A}_{2\alpha}$ are the sets of 2α-capacity 0.

REMARK 3. — In accordance with the results which have been proved here for $\alpha > 0$ and which were mentioned in the remark at the end of the last section for $\alpha = 0$, γ_0 should denote the Lebesgue measure, and Ω_0 should denote the class of measures which are absolutely continuous with respect to γ_0 and have a square integrable derivative. The results in the rest of this section (except 18) which has no meaning for $\alpha = 0$) hold for $\alpha \geq 0$. Many are rather trivial for $\alpha = 0$, or are standard results from measure theory. When this is so we do not take account of the case $\alpha = 0$ in the proof.

Using the capacitability (i.e. equality of inner and outer capacities) of sets G_δ we can give another characterization of the sets in $\mathfrak{A}_{2\alpha}$.

17) $A \in \mathfrak{A}_{2\alpha}$ *if and only if* A *is a subset of a set* G_δ *which has* ν*-measure* 0 *for every* $\nu \in \Omega_{2\alpha}$.

PROOF. — If $A \in \mathfrak{A}_{2\alpha}$, then by definition there exists $g \geq 0$ in L^2 such that

$$A \subset \underset{x}{E}\,[G_{2\alpha}g(x) = +\infty].$$

The set on the right is a set G_δ which has ν-measure 0 for every $\nu \in \Omega_{2\alpha}$. If $A \subset B$ and B is a set G_δ which has ν-measure 0 for every $\nu \in \Omega_{2\alpha}$, then for every compact set $C \subset B$, $\gamma_{2\alpha}(C) = |\mu_C| = 0$. Therefore, B has inner capacity 0, and by Theorem 1, $c_1(B) = 0$, from which it follows that $B \in \mathfrak{A}_{2\alpha}$ and hence that $A \in \mathfrak{A}_{2\alpha}$.

The capacitability of G_δ's also gives an improvement of proposition 1 on the infinities of the potential of an arbitrary measure.

18) *If* μ *is a measure satisfying* (6, 4) *then* $G_{2\alpha}\mu$ *is finite exc.* $\mathfrak{A}_{2\alpha}$.

Proof. — The proof is easily reduced to the case in which $|\mu| < \infty$. If C is an arbitrary compact subset of

$$\underset{x}{\mathrm{E}}\,[G_{2\alpha}\mu(x) = +\infty],$$

then by 10)-(*d*) there is a constant c such that $u_C \leq c$ everywhere. Hence

$$\int G_{2\alpha}\mu\, d\mu_C = \int u_C\, d\mu \leq c|\mu| < \infty,$$

and since $G_{2\alpha}\mu = +\infty$ everywhere on C it follows that $\gamma_{2\alpha}(C) = |\mu_C| = 0$. Thus, $\underset{x}{\mathrm{E}}\,[G_{2\alpha}\mu(x) = +\infty]$ is a set G_δ with inner capacity 0.

We end this section with some results on the nature of the capacities $\gamma_{2\alpha}$.

19) *For fixed* A, $\gamma_{2\alpha}(A)$ *is an increasing function of* α. *If* A *is open,* $\gamma_{2\alpha}(A)$ *is continuous on the left; if* A *is compact* $\gamma_{2\alpha}(A)$ *is continuous on the right.*

Proof. — It is evident that if $\beta \leq \alpha$, then $||u||_\beta \leq ||u||_\alpha$. Therefore $P^\alpha \subset P^\beta$, $\mathfrak{A}_{2\alpha} \subset \mathfrak{A}_{2\beta}$, $\Omega_{2\alpha} \supset \Omega_{2\beta}$ [34] and $||\mu||_{2\alpha} \leq ||\mu||_{2\beta}$. If $\gamma_{2\alpha}(A) < \infty$, then there is a function $u \in P^\alpha$ such that $u \geq 1$ on A exc. $\mathfrak{A}_{2\alpha}$ and such that $||u||_\alpha^2 = \gamma_{2\alpha}(A)$. Since $u \geq 1$ on A exc. $\mathfrak{A}_{2\beta}$ we have $\gamma_{2\beta}(A) \leq ||u||_\beta^2 \leq ||u||_\alpha^2 = \gamma_{2\alpha}(A)$, which proves the first statement in the proposition.

If A is compact and $\varepsilon > 0$ is given, let $D \supset A$ be open and bounded and such that $\gamma_{2\beta}(D) < \gamma_{2\beta}(A) + \varepsilon$, and let $u \in P^\beta$ be such that $u \geq 1$ everywhere on D and such that $||u||_\beta^2 = \gamma_{2\beta}(D)$. ($u = u_D$ has these properties.) By using Fourier transforms we get that every regularization $u_\rho = u * e_\rho$ belongs to P^α for all α, and that if ρ is fixed and $\alpha \searrow \beta$, then $||u_\rho||_\alpha \searrow ||u_\rho||_\beta$. Let ρ_0 be small enough so that $u_{\rho_0} \geq 1$ everywhere on A. Then, as $\alpha \searrow \beta$, by 3) § 5,

$$\gamma_{2\alpha}(A) \leq ||u_{\rho_0}||_\alpha^2 \searrow ||u_{\rho_0}||_\beta^2 \leq ||u||_\beta^2 = \gamma_{2\beta}(D) \leq \gamma_{2\beta}(A) + \varepsilon.$$

This proves the continuity on the right when A is compact.

If A is open and $\varepsilon > 0$ is given, let $C \subset A$ be compact and such that $\gamma_{2\alpha}(A) < \gamma_{2\alpha}(C) + \varepsilon$, and let μ be a measure with support in C such that $|\mu| = 1$ and such that $\dfrac{1}{\gamma_{2\alpha}(C)} = ||\mu||_{2\alpha}^2$.

[34] In the present case $\Omega_{2\alpha}$ and $\Omega_{2\beta}$ are considered as sets of measures and compared as such.

Every regularization $\mu_\rho = \mu * e_\rho$ belongs to $\Omega_{2\beta}$ for all β and has total mass 1, and if ρ is fixed and $\beta \nearrow \alpha$, then $\|\mu_\rho\|_{2\beta} \searrow \|\mu_\rho\|_{2\alpha}$ (35). Let ρ_0 be small enough so that a closed support of μ_{ρ_0} is contained in A. Since $\|\nu\|_{2\alpha} = \|G_{2\alpha}\nu\|_\alpha$ and $G_{2\alpha}\mu_\rho = (G_{2\alpha}\mu)_\rho$, by 3) § 5, as $\beta \nearrow \alpha$,

$$\frac{1}{\gamma_{2\beta}(A)} \leq \|\mu_{\rho_0}\|^2_{2\beta} \searrow \|\mu_{\rho_0}\|^2_{2\alpha} \leq \|\mu\|^2_{2\alpha} = \frac{1}{\gamma_{2\alpha}(C)} \leq \frac{1}{\gamma_{2\alpha}(A) - \epsilon}.$$

The next result is an improvement of a proposition of Brelot [4] on the relation between the capacity of a set A and the capacity of T(A), when T is a Lipschitz transformation. Later we shall use the result in cases when the Lispchitz constant tends to 0 and in cases when it tends to ∞. It is well known that a Lipschitz transformation defined on an arbitrary subset of R^n with Lipschitz constant M can be extended to a Lipschitz transformation on R^n, with the same Lipschitz constant (see [13]) so there is no loss in generality in assuming from the beginning that the transformation is defined on R^n.

20) *Let* T *be a transformation of* R^n *into* R^n *satisfying* $|Tx - Ty| \leq M|x - y|$. *If* A *and* $B = T(A)$ *both have diameter* $\leq r$, *then*

$$\gamma_{2\alpha}(B) \leq M^{n-2\alpha}\gamma_{2\alpha}(A) \quad \textit{if} \quad 0 \leq \alpha < \frac{n}{2} \quad \textit{and} \quad M \leq 1.$$

$$\gamma_{2\alpha}(B) \leq \frac{2^{\frac{n-2\alpha}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n-2\alpha}{2}\right)}{r^{\frac{n-2\alpha}{2}} K_{\frac{n-2\alpha}{2}}(r)} M^{n-2\alpha}\gamma_{2\alpha}(A) \quad \textit{if} \quad 0 \leq \alpha < \frac{n}{2}$$

and $M > 1$.

$$\gamma_n(B) \leq \frac{\gamma_n(A)}{1 + \dfrac{rK_1(r)}{2^{n-1}\pi^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \log \dfrac{1}{M}\, \gamma_n(A)} \quad \textit{if} \quad M \leq 1.$$

$$\gamma_n(B) \leq \left(1 + \frac{1}{K_0(r)} \log M\right)\gamma_n(A) \quad \textit{if} \quad M > 1.$$

(35) μ_ρ is the measure with density $h_\rho(x) = \int e_\rho(x - y)\, d\mu(y)$. Since μ has compact support, h_ρ is of class C_0^∞, and $\|\mu_\rho\|^2_{2\alpha} = \int (1 + |\xi|^2)^{-\alpha}|\hat{h}_\rho|^2\, d\xi$.

PROOF. — Suppose first that A is compact, put $B = T(A)$, and let $\mathcal{C}(A)$ and $\mathcal{C}(B)$ denote the spaces of continuous functions on A and B normed by the upper bound. Each function $\varphi \in \mathcal{C}(B)$ defines a function $T^*\varphi \in \mathcal{C}(A)$ by the equation $T^*\varphi(x) = \varphi(Tx)$. Since $\|T^*\varphi\| = \|\varphi\|$, T^* is one to one and the range $R(T^*)$ is a closed subspace of $\mathcal{C}(A)$. If $\mu = \frac{\mu_B}{|\mu_B|}$ is the normalized capacitary distribution for B, then

$$l(T^*\varphi) = \int \varphi(z)\, d\mu(z)$$

is a positive linear functional on $R(T^*)$. By a well known theorem of Hahn-Banach type, l has a positive linear extension to $\mathcal{C}(A)$, and by the representation theorem of Riesz, this extension is given by a measure ν on A. Thus, ν is a positive measure on A such that for every continuous function φ on B, and hence for every non-negative lower semi-continuous function φ on B.

$$\int \varphi(z)\, d\mu(z) = \int \varphi(Tx)\, d\nu(x).$$

Taking $\varphi = G_{2\alpha}$, we have

$$(6,9)\quad \frac{1}{\gamma_{2\alpha}(B)} = \|\mu\|_{2\alpha}^2 = \iint G_{2\alpha}(z-w)\, d\mu(z)\, d\mu(w)$$
$$= \iint G_{2\alpha}(Tx-Ty)\, d\nu(x)\, d\nu(y).$$

Put $|x-y| = \rho$ and $|Tx-Ty| = \rho_1$. By our assumption $\rho_1 \leq M\rho$, $\rho \leq r$, and $\rho_1 \leq r$. Now, for $0 < \alpha < \frac{n}{2}$ we evaluate the quotient

$$\frac{G_{2\alpha}(Tx-Ty)}{G_{2\alpha}(x-y)} = \frac{\rho_1^{\frac{2\alpha-n}{2}} K_{\frac{n-2\alpha}{2}}(\rho_1)}{\rho^{\frac{2\alpha-n}{2}} K_{\frac{n-2\alpha}{2}}(\rho)} = \left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^{2\alpha-n} \frac{\rho_1^{\frac{n-2\alpha}{2}} K_{\frac{n-2\alpha}{2}}(\rho_1)}{\rho^{\frac{n-2\alpha}{2}} K_{\frac{n-2\alpha}{2}}(\rho)}$$

By (3, 3) and (3, 7) $z^\nu K_\nu(z)$ is a decreasing function of z. From this and (3, 4) we get

$$\frac{G_{2\alpha}(Tx-Ty)}{G_{2\alpha}(x-y)} \geq \begin{cases} M^{2\alpha-n} & \text{if } M \leq 1 \\ M^{2\alpha-n} \dfrac{r^{\frac{n-2\alpha}{2}} K_{\frac{n-2\alpha}{2}}(r)}{2^{\frac{n-2\alpha-2}{2}} \Gamma\left(\frac{n-2\alpha}{2}\right)} & \text{if } M > 1. \end{cases}$$

Combining this with (6, 9) and the fact that $|\nu| = 1$ we get

$$\frac{1}{\gamma_{2\alpha}(B)} \geq M^{2\alpha-n}\|\nu\|_{2\alpha}^2 \geq \frac{M^{2\alpha-n}}{\gamma_{2\alpha}(A)} \qquad \textit{for} \quad M \leq 1,$$

$$\frac{1}{\gamma_{2\alpha}(B)} \geq \frac{r^{\frac{n-2\alpha}{2}} K_{\frac{n-2\alpha}{2}}(r)}{2^{\frac{n-2\alpha-2}{2}}\Gamma\left(\frac{n-2\alpha}{2}\right)} M^{2\alpha-n} \frac{1}{\gamma_{2\alpha}(A)} \qquad \textit{for} \quad M > 1.$$

Next, consider $\alpha = \frac{n}{2}$ and $M \leq 1$. Then $\rho_1 \leq M\rho \leq \rho$ and, by (4, 1) and (3, 7) we have

$$G_n(Tx - Ty) - G_n(x-y) = \frac{1}{2^{n-1}\pi^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}[K_0(\rho_1) - K_0(\rho)]$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}\pi^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_{\rho_1}^{\rho} K_1(t)\, dt.$$

By (3, 7) $tK_1(t)$ is decreasing, hence $K_1(t) \geq \frac{1}{t} rK_1(r)$ for $t \leq r$. Therefore, since $\rho_1 \leq M\rho$

$$G_n(Tx - Ty) - G_n(x-y) \geq \frac{rK_1(r)}{2^{n-1}\pi^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \log\frac{1}{M},$$

and from (6, 9) and the fact that $|\nu| = 1$ we get

$$\frac{1}{\gamma_n(B)} \geq \|\nu\|_{2\alpha}^2 + \frac{rK_1(r)}{2^{n-1}\pi^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \log\frac{1}{M}$$

$$\geq \frac{1}{\gamma_n(A)} + \frac{rK_1(r)}{2^{n-1}\pi^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \log\frac{1}{M}.$$

Finally, we show that for $M > 1$, we have

$$G_n(Tx - Ty) \geq \frac{1}{1 + \dfrac{\log M}{K_0(r)}} G_n(x-y),$$

which, combined with (6, 9) will give the required result.

First if $\rho_1 \leqq \rho$, this inequality certainly holds, since G_n is a decreasing function. Suppose, therefore, that $\rho_1 > \rho$. Then

$$\frac{G_n(x-y)-G_n(Tx-Ty)}{G_n(Tx-Ty)}=\frac{K_0(\rho)-K_0(\rho_1)}{K_0(\rho_1)}=\frac{1}{K_0(\rho_1)}\int_\rho^{\rho_1} K_1(t)\,dt.$$

By (3, 7), $tK_1(t)$ is decreasing, so $tK_1(t) \leqq \lim\limits_{t\to 0} tK_1(t) = 1$. Since K_0 is a decreasing function

$$\frac{G_n(x-y)-G_n(Tx-Ty)}{G_n(Tx-Ty)} \leqq \frac{1}{K_0(r)}\log\frac{\rho_1}{\rho} \leqq \frac{1}{K_0(r)}\log M$$

which gives the inequality at the beginning of the paragraph.

Now that we have proved the proposition when A is a compact set, we see from proposition 8, § 5, that it holds when A is an F_σ, and in particular when A is an open set; and having the proposition when A is an open set, we deduce immediately that it holds when A is arbitrary.

Corollary. — *If* A *has diameter* $\leqq r$, *then*

$$\gamma_n(A) \leqq \frac{2^{n-1}\pi^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{rK_0(r)K_1(r)}.$$

Proof. — Apply the last two inequalities in the proposition to the homothetic transformations $y \to \rho y$ and $y \to \frac{1}{\rho}y$ with any $\rho < 1$.

The following result is used in the proof of a generalization of the Frostman mean value theorem.

21) *If* $\rho \leqq 1$ *we have: for* $\alpha < \frac{n}{2}$

$$\frac{2K_{\frac{n-2\alpha}{2}}(2)}{\Gamma\left(\frac{n-2\alpha}{2}\right)}\gamma_{2\alpha}(S(0,1)) \leqq \frac{\gamma_{2\alpha}(S(0,\rho))}{\rho^{n-2\alpha}} \leqq \gamma_{2\alpha}(S(0,1))$$

and for $\alpha = \frac{n}{2}$,

$$K_0(2)\gamma_n(S(0,1)) \leqq \gamma_n(S(0,\rho))\log\frac{e}{\rho} \leqq \frac{2^{n-2}\pi^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{K_0(2)K_1(2)}.$$

Proof. — Proposition 20) applied to the transformations $y \to \rho y$ of $S(0,1)$ onto $S(0, \rho)$ and $y \to \frac{y}{\rho}$ of $S(0, \rho)$ onto $S(0,1)$ gives the inequalities stated for $\alpha < \frac{n}{2}$ and gives

$$\frac{\gamma_n(S(0,1))\left(1+\log\frac{1}{\rho}\right)}{1+\frac{1}{K_0(2)}\log\frac{1}{\rho}} \leqq \gamma_n(S(0, \rho))\log\frac{e}{\rho}$$

$$\leqq \frac{\gamma_n(S(0,1))\left(1+\log\frac{1}{\rho}\right)}{1+\frac{K_1(2)}{2^{n-2}\pi^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\log\frac{1}{\rho}\gamma_n(S(0,1))}.$$

For $0 < \rho < 1$ the left side varies monotonically between $\gamma_n(S(0,1))$ and $\gamma_n(S(0,1))\, K_0(2)$ and the latter is the lower bound since $e^2K_0(2) = .841...$ The right side varies monotonically between $\gamma_n(S(0,1))$ and $\frac{2^{n-2}\pi^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{K_1(2)}$. By the preceding corollary and the fact that $K_0(2) < 1$, both of these are smaller than the constant given in the proposition.

22) *There is a constant $c > 0$ (depending only on α, β, and n) such that if $0 \leqq \beta \leqq \alpha \leqq \frac{n}{2}$ and $A \subset S(x, \rho)$ with $\rho \leqq 1$, then*

$$\frac{\gamma_{2\alpha}(A)}{\gamma_{2\alpha}(S(x, \rho))} \geqq c\frac{\gamma_{2\beta}(A)}{\gamma_{2\beta}(S(x, \rho))}.$$

Proof. — Let $A \subset S(0, \rho)$ and let B denote the image of A under the transformation $y \to \frac{y}{\rho}$. Then by propositions 19) and 20) we have for $\alpha < \frac{n}{2}$

$$\gamma_{2\alpha}(A) \geqq c\rho^{n-2\alpha}\gamma_{2\alpha}(B) \geqq c\rho^{n-2\alpha}\gamma_{2\beta}(B) \geqq c\frac{\rho^{n-2\alpha}}{\rho^{n-2\beta}}\gamma_{2\beta}(A).$$

In view of 21) this is sufficient to prove our statement. For $\alpha = \frac{n}{2}$ the proof is similar with $\rho^{n-2\alpha}$ replaced by $\left(\log\frac{e}{\rho}\right)^{-1}$.

Next we consider subsets of a subspace $R^k \subset R^n$, $k < n$, and the relations between their capacities as subsets of R^k and their capacities as subsets of R^n. Quantities associated with R^k will be primed: thus x' denotes a point of R^k, $\gamma'_{2\beta}$ denotes the capacity of order 2β in the Euclidean space R^k, $\mathfrak{A}'_{2\alpha}$ is the class of subsets $A' \subset R^k$ with $\gamma'_{2\alpha}(A') = 0$.

23) *If* $2\alpha > n - k$, *then for every measure* μ *on* R^k *and every subset* A *of* R^k

$$(6, 10) \qquad \begin{aligned} \|\mu\|'^2_{2\alpha-(n-k)} &= \frac{2^{n-k}\pi^{\frac{n-k}{2}}\,\Gamma(\alpha)}{\Gamma\left(\alpha - \frac{n-k}{2}\right)}\|\mu\|^2_{2\alpha} \\ \gamma'_{2\alpha-(n-k)}(A) &= \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{n-k}{2}\right)}{2^{n-k}\pi^{\frac{n-k}{2}}\,\Gamma(\alpha)}\gamma_{2\alpha}(A). \end{aligned}$$

Proof. — It is easy to see from (4, 1) that

$$(6, 11) \qquad G'_{2\alpha-(n-k)}(x') = \frac{2^{n-k}\pi^{\frac{n-k}{2}}\,\Gamma(\alpha)}{\Gamma\left(\alpha - \frac{n-k}{2}\right)} G_{2\alpha}(x'),$$

and from this the first formula in (6, 10) is obvious. For compact sets A, the second formula in (6, 10) follows at once from the first. The validity of the second formula for compact sets implies the validity for sets F_σ, and then the validity for sets F_σ implies the validity for all sets.

24) *If* $2\alpha > n - k$, *then, as* $\rho \to 0$, $\gamma_{2\alpha}[S(0, \rho) \cap R^k]$ *is of order* $\rho^{n-2\alpha}$ *or of the order* $\dfrac{1}{\log 1/\rho}$, *according as* $\alpha < \dfrac{n}{2}$ *or* $\alpha = \dfrac{n}{2}$. *If* $0 \leq 2\alpha \leq n - k$, *then* $\gamma_{2\alpha}(R^k) = 0$.

Proof. — The first part of 24) is obtained by applying 21) to $\gamma'_{2\alpha-(n-k)}(S(0, \rho) \cap R^k)$ and then using 23).

As for the second part of 24), if in the second equation in (6, 10) we take A to be any compact subset of R^k and let $2\alpha \searrow n - k$, we can conclude from 10) that $\gamma_{n-k}(A) = 0$, and hence that $\gamma_{n-k}(R^k) = 0$. Using 19) again, we see that if $2\alpha < n - k$, then $\gamma_{2\alpha}(R^k) = 0$.

The next proposition, which we state without proof, shows the relation between sets of capacity 0 and sets of Hausdorff measure 0. It is due to Frostman [11].

If $h(t)$ is a continuous non-decreasing function of $t \geq 0$ with $h(0) = 0$ and $h(t) > 0$ for $t > 0$, the Hausdorff outer measure H corresponding to h is defined as follows:

$$\mathrm{H}(\mathrm{A}) = \lim_{\rho \to 0} \mathrm{H}_\rho(\mathrm{A}) \qquad \textit{where} \qquad \mathrm{H}_\rho(\mathrm{A}) = \inf \Sigma h(d(\mathrm{A}_k)),$$

where $d(\mathrm{A}_k)$ is the diameter of A_k and the infimum is taken over all sequences A_k satisfying $\mathrm{A} \subset \cup \mathrm{A}_k$ and $d(\mathrm{A}_k) < \rho$.

For $\alpha > 0$, the Hausdorff α-dimensional measure is the Hausdorff measure corresponding to $h(t) = c(\alpha)t^\alpha$, $c(\alpha)$ a suitable constant; the 0-dimensional, or logarithmic Hausdorff measure is the one corresponding to $h(t) = \dfrac{1}{\log \dfrac{1}{t}}$.

We say that $\tilde{\mathrm{H}}$ is weak relative to H if

$$\int_0^\varepsilon \frac{\tilde{h}(t)}{t\,h(t)}\,dt < \infty.$$

(Thus the β-dimensional measure is weak relative to the α-dimensional measure if $\beta > \alpha$.)

Frostman's theorem is as follows.

25) *If the* $(n\text{-}2\alpha)$*-dimensional measure of* A *is* 0, *then* $\gamma_{2\alpha}(\mathrm{A}) = 0$. *If* $\gamma_{2\alpha}(\mathrm{A}) = 0$ *then* $\mathrm{H}(\mathrm{A}) = 0$ *for every Hausdorff measure which is weak relative to the* $(n\text{-}2\alpha)$*-dimensional measure.*

Remark 4. — In the case $\alpha = n/2$ Frostman proves a slightly stronger statement: *if* $\gamma_n(\mathrm{A}) = 0$ *then* $\mathrm{H}(\mathrm{A}) = 0$ *for every Hausdorff measure with* $\int_0^\varepsilon t^{-1}h(t)\,dt < \infty$. The first part of 25) can be strengthened as follows: *if the* $(n - 2\alpha)$*-dimensional measure of A is finite then* $\gamma_{2\alpha}(\mathrm{A}) = 0$. This result for $\alpha = n/2$ and $n = 2$ is essentially due to P. Erdös and J. Gillis [10*a*] (a simpler proof was given more recently by L. Carleson [4*a*]). The proof was extended to arbitrary n and $\alpha \leq n/2$ by W. F. Donoghue (as yet unpublished).

It is clear from proposition 20) that if A is a set of 2α-capacity 0, then the projection of A on any hyperplane has 2α-capa-

city 0. To conclude the section we give a partial converse of this which will be used in the next section.

26) *If* A *is a set whose projection on some hyperplane of dimension n-k*, $k \leq \alpha$, *has* 2α-*capacity* 0, *then* $\gamma_{2\alpha-2k}(\mathrm{A}) = 0$ (35a).

Proof. — It is sufficient to consider $k = 1$, in which case, by virtue of proposition 20), the assertion is equivalent to the following lemma.

Lemma 1. — *If* $\mathrm{A} \in \mathfrak{A}_{2\alpha}$, $\alpha \geq 1$, *then the union of all lines which meet* A *and are parallel to the* x_n-*axis belongs to* $\mathfrak{A}_{2\alpha-2}$.

Proof. — First we consider $\alpha = 1$. In this case, by 20), the projection of A on the hyperplane $x_n = 0$ has 2-capacity 0, and by 23) it has 1-capacity 0 relative to the hyperplane. Therefore, it has (n-1)-dimensional Lebesgue measure 0. By a standard theorem in measure theory, the union of the lines which meet A and are parallel to the x_n-axis must have n-dimensional Lebesgue measure 0, that is, O-capacity 0.

Now assume that $\alpha > 1$ and that $\mathrm{A} \subset \underset{x}{\mathrm{E}}[\mathrm{G}_\alpha g(x) = +\infty]$, $0 \leq g \in \mathrm{L}^2$, and put

$$\bar{g}(x) = \sup_h \frac{1}{h} \int_{x_n}^{x_n+h} g(x', t)\, dt.$$

According to an important inequality of Hardy and Littlewood [12], $\bar{g} \in \mathrm{L}^2$. It will be shown that if x is any point such that $\mathrm{G}_\alpha g(x)$, $\mathrm{G}_\alpha \bar{g}(x)$, and $\mathrm{G}_{\alpha-1}\bar{g}(x)$ are all finite, then the line through x parallel to the x_n-axis does not meet A. This will prove the proposition, because the set of x such that either $\mathrm{G}_\alpha g(x)$, $\mathrm{G}_\alpha \bar{g}(x)$ or $\mathrm{G}_{\alpha-1}\bar{g}(x)$ is $= +\infty$ has (2α-2)-capacity 0.

From (4, 5) it is clear that if $\mathrm{G}_\alpha \bar{g}(x) + \mathrm{G}_{\alpha-1}\bar{g}(x) < \infty$, then $\int \left| \frac{\partial \mathrm{G}_\alpha(y)}{\partial y_n} \right| \bar{g}(x-y)\, dy < \infty$. Thus, if $\mathrm{G}_\alpha g(x) < \infty$, $\mathrm{G}_\alpha \bar{g}(x) < \infty$

(35a) *Added in proofs.* A stronger result holds due to M. Ohtsuka [13*d*]: the hypothesis $k \leq \alpha$ is replaced by $k \leq 2\alpha$ and the thesis $\gamma_{2\alpha-2k}(\mathrm{A}) = 0$ is replaced by $\gamma_{2\alpha-k}(\mathrm{A}) = 0$. However the weaker result of the text is sufficient for our purposes.

and $G_{\alpha-1}\bar{g}(x) < \infty$, we have for $h \neq 0$

$$\int\left|\frac{\partial G_\alpha(y)}{\partial y_n}\right|\bar{g}(x-y)\,dy \geq \left|\int\frac{\partial G_\alpha(y)}{\partial y_n}\left\{\frac{1}{h}\int_{x_n}^{x_n+h} g(x'-y', t-y_n)\,dt\right\}dy\right|$$
$$=\left|\frac{1}{h}\int_{x_n}^{x_n+h}\int\frac{\partial G_\alpha(y)}{\partial y_n}\,g(x'-y', t-y_n)\,dy\,dt\right|$$
$$=\left|\frac{1}{h}\int_{x_n}^{x_n+h}\int_{R^{n-1}}\int_{R^1}\frac{\partial G_\alpha(y', t-z_n)}{\partial y_n}\,g(x'-y', z_n)\,dy'\,dz_n\,dt\right|,$$
$$=\left|\int g(x'-y', z_n)\frac{1}{h}\int_{x_n}^{x_n+h}\frac{\partial G_\alpha(y', t-z_n)}{\partial y_n}\,dt\,dz_n\,dy'\right|,$$
$$=\left|\int g(x'-y', z_n)\left\{\frac{G_\alpha(y', x_n-z_n+h)-G_\alpha(y', x_n-z_n)}{h}\right\}dz_n\,dy'\right|,$$
$$=\left|\frac{G_\alpha g(x', x_n+h)-G_\alpha g(x)}{h}\right|.$$

This shows that $G_\alpha g(x', x_n+h) < \infty$ for all h and hence that no point (x', x_n+h) belongs to A.

§ 7. — Differentiability of functions in P^α.

The purpose of this section is to characterize the functions in P^α by differentiability and continuity properties.

THEOREM 1. — *Let $u \in P^\alpha$ and let $|i| = m \leq \alpha$. The derivative $D_i u$ exists in the ordinary sense exc. $\mathfrak{A}_{2\alpha-2m}$ and $D_i u \in P^{\alpha-m}$. If $u = G_\alpha g$ and $m < \alpha$, then $D_i u(x) = \int \frac{\partial^m G_\alpha(x-y)}{\partial x^i} g(y)\,dy$ exc. $\mathfrak{A}_{2\alpha-2m}$. If j is a permutation of i, then $D_i u(x) = D_j u(x)$ exc. $\mathfrak{A}_{2\alpha-2m}$. If $m \leq \alpha - 1$, $D_i u$ is absolutely continuous on all lines in any given direction except those contained entirely in a set $\in \mathfrak{A}_{2\alpha-2m-2}$ [36]. Finally, the direct formulas (1, 5) and (1, 10) for $d_\alpha(u)$ and $\|u\|_\alpha^2$ respectively, are valid for all $u \in P^\alpha$ and*

$$(7, 1)\qquad \begin{cases} d_\alpha(u) = \sum\limits_{\substack{i \\ |i|=m}} d_{\alpha-m}(D_i u), \\[2ex] \|u\|_\alpha^2 = \sum\limits_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \sum\limits_{\substack{j \\ |j|=k}} \|D_j u\|_{\alpha-m}^2. \end{cases}$$

[36] A function is absolutely continuous on a straight line if it is absolutely continuous on each finite interval of the line.

PROOF. — By using Fourier transforms we deduce that there are potentials $u_j \in P^{\alpha-|j|}$ such that $\hat{u}_j = i^{|j|}\xi^j\hat{u}$ and, when replacing $D_j u$, they satisfy (7. 1). Furthermore, we see immediately (by passing to Fourier transforms) that the difference quotient $\dfrac{1}{h}[u_j(x_1, \ldots, x_k + h, \ldots, x_n) - u_j(x)]$ converges in $P^{\alpha-|j|-1}$ to $u_{j,k}$, $(|j| \leqq \alpha - 1)$. An easy induction shows then that the theorem reduces to the following two statements: 1° the absolute continuity of u_j (replacing $D_j u$) and the pointwise convergence of the difference quotients exc. $\mathfrak{A}_{2\alpha-2|j|-2}$, and 2° $D_j u = (D_j G_\alpha) * g$ exc. $\mathfrak{A}_{2\alpha-2|j|}$. We prove first 1°; it is clear that we can restrict ourselves to the consideration of u (i.e. $|j| = 0$), $\alpha \geqq 1$ and the derivative $\dfrac{\partial}{\partial x_n}$.

We start with the case $\alpha = 1$ (which is treated separately since there is no kernel G_0). Let $\{u_k\}$ be a sequence in $C_0^\infty(R^n)$ which converges in P^1 to the given function u. By (7, 1), which obviously holds for functions in $C_0^\infty(R^n)$, the sequence $\left\{\dfrac{\partial u_k}{\partial x_n}\right\}$ converges in $P^0 = L^2$ to some function $\varphi \in P^0$. By picking a subsequence if necessary, it can be assumed that for fixed x' outside a set $E' \subset R^{n-1}$ of $(n\text{-}1)$-dimensional measure 0, $\dfrac{\partial u_k(x', x_n)}{\partial x_n} \to \varphi(x', x_n)$ in L^2 with respect to the variable x_n. By using Lemma 1 at the end of the last section, and again picking a subsequence if necessary, it can be assumed that if $x' \notin E'$, then $u_k(x', x_n) \to u(x', x_n)$. Then if $x' \notin E'$ we have

$$u(x', b) - u(x', a) = \lim\,[u_k(x', b) - u_k(x', a)]$$
$$= \lim \int_a^b \frac{\partial u_k(x', t)}{\partial x_n}\,dt = \int_a^b \varphi(x', t)\,dt.$$

It follows that if $x' \notin E'$, then $u(x', x_n)$ is absolutely continuous in x_n so that $\dfrac{\partial u}{\partial x_n}(x', x_n)$ exists and is equal to $\varphi(x', x_n)$ for almost all x_n. Hence $\dfrac{\partial u}{\partial x_n}$ exists and is equal to φ almost everywhere.

Now suppose that $\alpha > 1$, and consider $u = G_\alpha g$, with $g \in L^2$. If we put

$$\bar{g}(x', x_n) = \sup_{h \neq 0} \frac{1}{h} \int_0^h |g(x', x_n + t)|\,dt$$

then, by the Hardy-Littlewood inequality [12], $\bar{g} \in L^2$. Let

$$A_1 = \underset{x}{E}\left[\int\left|\frac{\partial G_\alpha(x-y)}{\partial x_n}\right|\bar{g}(y)dy = +\infty\right].$$

Since

$$\left|\frac{\partial G_\alpha(x-y)}{\partial x_n}\right| \frac{1}{h}\int_0^h |g(y', y_n+t)|\,dt \leq \left|\frac{\partial G_\alpha(x-y)}{\partial x_n}\bar{g}(y)\right|,$$

it follows that if $x \notin A_1$, then

$$\text{(7, 2)} \quad \lim_{h\to 0}\int\frac{\partial G_\alpha(x-y)}{\partial x_n}\frac{1}{h}\int_0^h g(y', y_n+t)\,dt\,dy = \frac{\partial G_\alpha}{\partial x_n}*g(x),$$

and also that

$$\text{(7, 3)} \quad \int\frac{\partial G_\alpha(x-y)}{\partial x_n}\frac{1}{h}\int_0^h g(y', y_n+t)\,dt\,dy$$

$$=\frac{1}{h}\int\{G_\alpha(x'-y', x_n+h-y_n)-G_\alpha(x'-y', x_n-y_n)\}g(y)\,dy.$$

Now let $u = G_\alpha g$ exc. $\mathfrak{A}_{2\alpha}$ and let A_2 be the union of all lines parallel to the x_n-axis which contain some point of $\underset{x}{E}[u(x) \neq G_\alpha g(x)] \cup \underset{x}{E}[G_\alpha|g|(x) = +\infty]$. Then if $x \notin A_1 \cup A_2$, (7, 2) and (7, 3) give

$$\text{(7,3')} \quad \lim_{h\to 0}\frac{u(x', x_n+h)-u(x', x_n)}{h} = \frac{\partial G_\alpha}{\partial x_n}*g(x),$$

so that $\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_n}$ exists provided that $x \notin A_1 \cup A_2$.

By (4, 5), $A_1 \in \mathfrak{A}_{2\alpha-2}$, and by the lemma at the end of the last section, $A_2 \in \mathfrak{A}_{2\alpha-2}$. Hence, for every $u \in P^\alpha$ the derivative $\dfrac{\partial u}{\partial x_n}$ exists in the pointwise sense except on a set of $(2\alpha\text{-}2)$-capacity 0.

We prove now the statement about absolute continuity. If l is any line parallel to the x_n-axis and not contained entirely in $A_1 \cup A_2$, then there is a point $x \in l-(A_1 \cup A_2)$, and, as A_2 is a union of lines, all points $(x', x_n+h) \in l-A_2$. It follows that the right hand side of (7, 3) can be written as

$$\frac{1}{h}[u(x', x_n+h)-u(x', x_n)]$$

and hence $u(x', x_n + h)$, as a function of h, is an integral, and therefore absolutely continuous.

Finally, to prove that $D_j u = (D_j G_\alpha) * g$ exc. $\mathfrak{A}_{2\alpha-2|j|}$ we proceed by induction with respect to the number of indices in the system j. We use an argument completely similar to the one which led to (7,2), (7,3) and (7,3'). The kernel G_α is now replaced by $D_j G_\alpha$ and we use the inequality

$$|D_j G_\alpha(x)| \leq c[G_\alpha(x) + G_{\alpha-|j|}(x)],$$

with a constant c depending only on α, $|j|$, and n. Thisi nequality is deduced in the same way as (4,5), from (3,7), (4,1), (4,2) and (4,3).

As corollaries of Theorem 1 we can now prove.

Corollary 1. — *If $\alpha > 2m$, where m is a positive integer, and if $g \in L^2$,*

$$(1 - \Delta)^m G_\alpha g(x) = G_{\alpha-2m} g(x).$$

We apply here formula (4, 11).

Corollary 2. — *If m is a positive integer and $g \in L^2$,*

$$(1 - \Delta)^m G_{2m} g(x) = g(x), \textit{ almost everywhere.}$$

Proof. — The formula for derivatives of a potential in Theorem 1 is not valid for orders $|i| = \alpha$ [37]. Since we have to prove equality of two functions in L^2, the simplest is to compare their Fourier transforms, both of which turn out to be $\hat{g}$.

Corollary 2 shows that $G_{2m}(x - y)$ is a fundamental solution corresponding to $(1 - \Delta)^m$. As was already mentioned in § 6 (see (6, 6)), $G_{2\alpha}$ is the pseudo-reproducing kernel of P^α. For $\alpha = m$ the reproducing property can be put in a form avoiding the use of measures:

Corollary 3. — *For $u \in P^m$, we have*

$$u(x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \sum_{|i|=k} \int \frac{\partial^k G_{2m}(x - y)}{\partial y^i} \frac{\partial^k u(y)}{\partial y^i} dy \text{ exc. } \mathfrak{A}_{2m} \ (^{38}).$$

([37]) The formula $\frac{\partial^{|i|}}{\partial x^i} G_\alpha g(x) = \int \frac{\partial^{|i|} G_\alpha(x - y)}{\partial x^i} g(y)\, dy$ for $|i| = \alpha$ can be made valid if we consider the integral as a singular integral.

([38]) A similar direct formula for arbitrary α is more complicated; double integrals must be used.

PROOF. — Since $\dfrac{\partial^k u}{\partial y^i}$ for $|i| = k \leq m$ is at least in L^2 and $\dfrac{\partial^k G_{2m}}{\partial y^i} = (-1)^k \dfrac{\partial^k G_{2m}}{\partial x^i}$, each term in the sum is a potential of order $\geq m$. Furthermore the Fourier transforms of both sides are obviously equal. Hence the equation is true almost everywhere and since both sides are in P^α our statement follows.

In proving a converse of Theorem 1 we shall use a generalization of the Frostman mean value theorem, 1), § 4. It will be recalled that a part of the Frostman theorem asserts that for each positive measure μ the value of a potential $G_{2\alpha}\mu$ at a point x_0 is the limit of the averages of $G_{2\alpha}\mu$ over spheres with center x_0 and radius converging to 0. In the generalization of this theorem the spheres are replaced by much more general closed sets, the essential point being that the closed sets can be quite thinly distributed.

1) *Let x_0 be a given point, and for each positive integer k let A_k be a closed set contained in $S(x_0, \rho_k)$, where $\rho_k \to 0$. If for some $\beta \leq \alpha$ there is a constant $c > 0$ such that*

$$(7, 4) \qquad \gamma_{2\beta}(A_k) \geq c\gamma_{2\beta}[S(x_0, \rho_k)],$$

then each A_k supports a measure ν^k of total mass 1 such that

$$G_{2\alpha}\mu(x_0) = \lim_{k \to \infty} \int G_{2\alpha}\mu(y)\, d\nu^k(y)$$

for every positive Borel measure μ. A suitable choice for ν^k is the normalised capacitary distribution for A_k.

A similar result holds for each function u in P^α exc. $\mathfrak{A}_{2\alpha}$.

2) *For each point x and each positive integer k let $A_k(x)$ be a closed set contained in $S(x, \rho_k(x))$ where $\rho_k(x) \to 0$. If for each x there is a $\beta \leq \alpha$ and a constant $c > 0$ (both may depend on x) such that (7, 4) holds, then each $A_k(x)$ supports a mearure ν_x^k of total mass 1 such that for every function $u \in P^\alpha$*

$$u(x) = \lim_{k \to \infty} \int u(y)\, d\nu_x^k(y) \text{ exc. } \mathfrak{A}_{2\alpha}.$$

A suitable choice for ν_x^k is the normalized capacitary distribution for $A_k(x)$.

The proofs of 1) and 2) are given in [15] for the special case

$\beta = \alpha$. In view of proposition 22) of the last section, however, if the hypothesis (7, 4) holds for some $\beta \leqq \alpha$, then it holds also for $\beta = \alpha$ ([39]). Indications of how thinly the sets $A_k(x)$ can be distributed are given by the results on the nature of the capacity of a set near the end of the last section. Additional results related to 1) and 2) can be found in [15].

Remark 1. — It is not necessary to require the sets A_k to be closed, provided the outer capacity $\gamma_{2\alpha}$ is replaced by the inner capacity. Of course, either the outer or the inner capacity can be used if the A_k are capacitable, in particular, if they are analytic. In this case ν^k cannot necessarily be taken to be the normalized capacitary distribution for A_k, but rather can be taken to be the normalized capacitary distribution of some closed subset of A_k.

3) *If* $u \in P^\alpha$, *then for each* $\varepsilon > 0$ *there is a set* B_ε *such that* $\gamma_{2\alpha}(B_\varepsilon) < \varepsilon$ *and such that the restriction of* u *to* $R^n - B_\varepsilon$ *is continuous. Conversely, if a function* u *has this continuity property and is equal almost everywhere to a function in* P^α, *then* $u \in P^\alpha$.

Proof. — The first part of the proposition is evident from proposition 2), § 2, chapter I. The second part is proved by showing that if $v \in P^\alpha$ and if $u = v$ almost everywhere, then $u = v$ except on a set of 2α-capacity 0.

To see this, let $\varepsilon > 0$ be given, and let B_ε be a set such that $\gamma_{2\alpha}(B_\varepsilon) < \varepsilon$ and such that on $R^n - B_\varepsilon$ both u and v are continuous. We may obviously increase B_ε to be an open set with the same properties; we may therefore assume that B_ε is an open set. Choose $g_\varepsilon \geqq 0$ such that $\|g_\varepsilon\|^2_{L^2} < \varepsilon$ and such that $G_\alpha g_\varepsilon(x) \geqq 1$ everywhere on B_ε and let

$$D_\varepsilon = \underset{x}{E}\left[G_\alpha g_\varepsilon(x) > \frac{1}{2}\right].$$

Then clearly $D_\varepsilon \supset B_\varepsilon$ and $\gamma_{2\alpha}(D_\varepsilon) < 4\varepsilon$. Moreover, if $x_0 \notin D_\varepsilon$, then $G_\alpha g_\varepsilon(x_0)$ is not the limit of mean values of $G_\alpha g_\varepsilon(y)$ over the sets $S(x_0, \rho_n) \cap B_\varepsilon$ for any sequence $\rho_n \to 0$. Therefore

([39]) The proof of 1) is rather simple, the proof of 2) rather delicate. In many applications the special case $\beta = 0$ is sufficient, and this special case is an almost immediate consequence of the Frostman theorem itself.

it follows from 1) (with $\beta = 0$) and the Remark 1 above, that

$$\frac{|S(x_0, \rho) \cap B_\varepsilon|}{|S(x_0, \rho)|} \to 0,$$

so that in particular, $|S(x_0, \rho) - B_\varepsilon| \neq 0$.

Since $u = v$ almost everywhere, we have

$$\int_{S(x_0, \rho) - B_\varepsilon} u(y)\, dy = \int_{S(x_0, \rho) - B_\varepsilon} v(y)\, dy,$$

and, as both u and v are continuous on $R^n - B_\varepsilon$ and as $|S(x_0, \rho) - B_\varepsilon| \neq 0$, we can divide both sides by $|S(x_0, \rho) - B_\varepsilon|$ and let $\rho \to 0$ and conclude that $u(x_0) = v(x_0)$. This shows that $u = v$ outside D_ε, and since $\gamma_{2\alpha}(D_\varepsilon) < 4\varepsilon$, it follows that $u = v$ except on a set of 2α-capacity 0.

We can now state the converse of Theorem 1.

THEOREM 2. — *Let* $u \in L^2$ *and* m *be an integer,* $0 \leq m \leq \alpha$. *The function* u *belongs to* P^α *if the following conditions are satisfied:*

a) u *is defined except on a set of* 2α*-capacity* 0 *and for each* $\varepsilon > 0$ *there exists a set* $B_\varepsilon \subset R^n$ *with* $\gamma_{2\alpha}(B_\varepsilon) < \varepsilon$ *such that* u, *restricted to* $R^n - B_\varepsilon$ *is continuous.*

b) All derivatives $D_j u$ *of orders* $|j| \leq m$ *exist when determined successively pointwise in the ordinary sense each one except on a set of corresponding* $(2\alpha\text{-}2|j|)$*-capacity* 0; *each derivative of order* $|j| < m$ *is absolutely continuous on all lines in the directions of coordinate axes except a set of such lines forming a union of* $(2\alpha\text{-}2|j|\text{-}2)$*-capacity* 0.

c) All derivatives of order $|j| = m$ *are in* $P^{\alpha-m}$.

PROOF. — One could give different proofs of this theorem (for instance by using the theory of distributions and proposition 3). The most direct, perhaps, is the one using regularization. If $u_\rho = e_\rho * u$, then, by using partial integration one gets successively for all $|j| \leq m$

$$D_j u_\rho = (D_j e_\rho) * u = e_\rho * D_j u.$$

Hence, for $|j| = m$, since $D_j u \in P^{\alpha-m} \subset L^2$,

$$\widehat{D_j u_\rho} = (2\pi)^{n/2} (i)^m \xi^j \hat{e}_\rho \hat{u} = (2\pi)^{n/2} \hat{e}_\rho \widehat{D_j u}.$$

It follows that $\widehat{D_j u} = (i)^m \xi^j \hat{u}$ and, $D_j u \in P^{\alpha-m}$, $u \in L^2$ gives (since $(1+|\xi|^2)^\alpha < 2^\alpha[1+|\xi|^{2m}(1+|\xi|^2)^{\alpha-m}]$

$$\int |\hat{u}|^2(1+|\xi|^2)^\alpha\, d\xi \leq 2^\alpha \int |\hat{u}|^2[1+|\xi|^{2m}(1+|\xi|^2)^{\alpha-m}]\, d\xi$$
$$= 2^\alpha \int |\hat{u}|^2\Big[1+\sum_{|j|=m}(\xi^j)^2(1+|\xi|^2)^{\alpha-m}\Big]\, d\xi < \infty.$$

Therefore u is equal to some $u' \in P^\alpha$ almost everywhere and by proposition 3) and condition a), $u \in P^\alpha$.

Remark 2. — Our proof shows that condition b) can be considerably weakened. In this condition it is enough to assume that for $k = 1, \ldots, n$, the pure derivatives $\dfrac{\partial^j u}{\partial x_k^j}$, $j < m$, are equal a.e. to functions absolutely continuous on almost all lines parallel to the x_k- axis. Correspondingly, condition c) can be (and should be) relaxed as follows: all derivatives $\dfrac{\partial^m u}{\partial x_k^m}$, $k = 1, \ldots, n$ are equal a.e. to functions in $P^{\alpha-m}$. In the last formula of the proof the inequality would be

$$\int |u|^2(1+|\xi|^2)^\alpha d\xi \leq 2^\alpha n^{m-1}\int |\hat{u}|^2\Big[1+\sum_{k=2}^{n}\xi_k^{2m}(1+|\xi|^2)^{\alpha-m}d\xi\Big] < \infty.$$

Remark 3. — Theorems 1 and 2 and the preceding remark allow a simple direct characterization of functions $u \in P^\alpha$ without using the Fourier transforms. To this effect we take $m =$ the largest integer $\leq \alpha$. The function u should be in L^2 and satisfy condition a) of Theorem 2, the derivatives $\dfrac{\partial^j u}{\partial x_k^j}$, $1 \leq k \leq n$, $|j| \leq \alpha - 1$ should exist pointwise and be equivalent to absolutely continuous funtions except on a set of lines of measure 0 and $\dfrac{\partial^m u}{\partial x_k^m}$ for each k must have a finite Dirichlet integral of order $\alpha - m$ (if $\alpha = m$ it is just $\displaystyle\int\left|\frac{\partial^m x}{\partial x_k^m}\right|^2 dx$). This integral, for $\alpha > m$, is given by (1, 4). The norm $\|u\|_\alpha$ is given by (7, 1) where $\|D_i u\|^2_{\alpha-m}$ are given directly by any of the formulas (1, 10), (4, 9), or (4, 10).

The next proposition is obtained immediately by using

Fourier transforms, proposition 5), § 2, and the corollary to proposition 2) § 2.

4) *If* $u \in P^{\alpha+1}$, *then for every unit vector e and every real number h,*

$$\left\|\frac{u(x+he)-u(x)}{h}\right\|_{\alpha} \leq \|u\|_{\alpha+1}.$$

Conversely, if $u \in P^{\alpha}$ *and if for each vector e in a basis for* R^n *there is a constant* M *such that for every real h*

$$\left\|\frac{u(x+he)-u(x)}{h}\right\|_{\alpha} \leq M,$$

then u is equal except on a set of 2α*-capacity* 0 *to a function in* $P^{\alpha+1}$.

§ 8. — Restrictions to subspaces.

The purpose of the section is to characterize the restrictions of the functions in P^{α} to a subspace $R^k \subset R^n$. In accordance with conventions, quantities associated with R^k are primed. In addition, if u is a function defined on R^n, u' denotes its restriction to R^k.

Theorem 1 *a.* — *If* $u \in P^{\alpha}$, $2\alpha > n-k$, *then* $u' \in P^{\alpha-\frac{n-k}{2}}(R^k)$ *and*

$$(8, 1) \quad \begin{cases} \|u'\|'^2_{\alpha-\frac{n-k}{2}} \leq \dfrac{\Gamma\left(\alpha-\frac{n-k}{2}\right)}{2^{n-k}\pi^{\frac{n-k}{2}}\Gamma(\alpha)}\|u\|^2_{\alpha} \\ \hat{u}'(\xi') = (2\pi)^{\frac{k-n}{2}}\displaystyle\int_{R^{n-k}}\hat{u}(\xi',\xi'')d\xi'' \textit{ almost everywhere.} \end{cases}$$

Proof. — For $u \in P^{\alpha}$, let Tu denote the function on the right side of the second formula in (8, 1). We shall show first that $Tu(\xi')$ is defined almost everywhere and that if

$$|||w|||^2 = \int(1+|\xi'|^2)^{\alpha-\frac{n-k}{2}}|w|^2 d\xi'$$

then

$$(8, 2) \qquad |||Tu|||^2 \leq \frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{n-k}{2}\right)}{2^{n-k}\pi^{\frac{n-k}{2}}\Gamma(\alpha)}\|u\|^2_{\alpha}.$$

If we apply the Schwarz inequality to the product $(1+|\xi|^2)^{-\alpha/2}\cdot(1+|\xi|^2)^{\alpha/2}\,\hat{u}(\xi)$ we obtain (at first with $\hat{u}$ replaced by $|\hat{u}|$ in order to show the absolute integrability of the functions involved)

$$|\mathrm{T}u(\xi')|^2 \leq (2\pi)^{k-n}\int_{\mathrm{R}^{n-k}}\frac{d\xi''}{(1+|\xi|^2)^\alpha}\int_{\mathrm{R}^{n-k}}(1+|\xi|^2)^\alpha|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi''$$
$$=\frac{(2\pi)^{k-n}}{(1+|\xi'|^2)^{\alpha-\frac{n-k}{2}}}\int_{\mathrm{R}^{n-k}}\frac{d\eta''}{(1+|\eta''|^2)}\int_{\mathrm{R}^{n-k}}(1+|\xi|^2)^\alpha|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi''.$$

Multiplying by $(1+|\xi'|^2)^{\alpha-\frac{n-k}{2}}$ and integrating with respect to ξ', we get (8, 2) and also the fact that the integral for $\mathrm{T}u(\xi')$ is absolutely convergent for almost all ξ'.

Now, if $u \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathrm{R}^n)$, then, as is well known, $\mathrm{T}u$ is simply $\hat{u}'$, Let u be an arbitrary function in P^α and let $\{u_m\}$ be a sequence in $\mathrm{C}_0^\infty(\mathrm{R}^n)$ which converges to u in P^α and pointwise except on a set of 2α-capacity 0. The inequality (8, 2) shows that $\{u'_m\}$ is Cauchy in $\mathrm{P}^{\alpha-\frac{n-k}{2}}(\mathrm{R}_k)$, and the second formula in (6, 10) shows that $u'_m \to u'$ pointwise in R_k exc. $\mathfrak{A}'_{2\alpha-n+k}$. This proves that $u' \in \mathrm{P}^{\alpha-\frac{n-k}{2}}(\mathrm{R}^k)$ and also the inequality in (8, 1).

From the fact that $\mathrm{T}u_m \to \mathrm{T}u$ relative to the norm $|||w|||$, and therefore relative to the L^2 norm, it follows that for some subsequence $\{u_{m_i}\}$, $\mathrm{T}u_{m_i}(\xi') \to \mathrm{T}u(\xi')$ pointwise almost everywhere. On the other hand, since $u'_{m_i} \to u'$ in $\mathrm{P}^{\alpha-\frac{n-k}{2}}$, $\hat{u}_{m_i} \to \hat{u}'$ in L^2, and hence some subsequence converges to $\hat{u}'$ almost everywhere. Therefore, since $\mathrm{T}u_{m_i} = \hat{u}'_{m_i}$, we have $\mathrm{T}u = \hat{u}'$ almost everywhere.

THEOREM 1 *b*. — *If* $u' \in \mathrm{P}^{\alpha-\frac{n-k}{2}}(\mathrm{R}^k)$, $2\alpha > n-k$, *then the restriction of the function* $u \in \mathrm{P}^\alpha$ *whose Fourier transform is given by*

$$(8,\,3)\qquad \hat{u}(\xi) = \frac{2^{\frac{n-k}{2}}\Gamma(\alpha)}{\Gamma\left(\alpha-\frac{n-k}{2}\right)}\,\frac{(1+|\xi'|^2)^{\alpha-\frac{n-k}{2}}}{(1+|\xi|^2)^\alpha}\,\hat{u}'(\xi')$$

is u', *and for this function* u *equality holds in* (8, 1).

Proof. — Inspection shows that any function whose Fourier transform is given by (8, 3) is equal almost everywhere to a function $u \in P^{\alpha}$. The second formula (in 8, 1) shows that the Fourier transform of the restriction of u to R^k is $\hat{u}'$, and hence that the restriction of u to R^k is equal to u' almost everywhere, and therefore, since both functions belong to $P^{\alpha-\frac{n-k}{2}}(R^k)$ except on a set of $\mathfrak{A}'_{2\alpha-n+k}$. Computation shows that for these u and u' equality holds in (8, 1).

Remark 1. — Formulas (6, 11) and (6, 10) show that if $u' = G'_{2\alpha-n+k}\mu$ for some measure $\mu \in \Omega'_{2\alpha-n+k}$ (μ may even be a signed measure, i.e. in $\Omega'_{2\alpha-n+k} - \Omega'_{2\alpha-n+k}$) then the function u defined by (8, 3) is simply

$$\frac{2^{n-k}\pi^{\frac{n-k}{2}}\Gamma(\alpha)}{\Gamma\left(\alpha-\frac{n-k}{2}\right)} G_{2\alpha}\mu.$$

Next we give a generalization of Theorem 1 *b* to the case in which not only the function but also certain of its normal derivatives are given on a hyperplane R^{n-1} (in the previous notations we now put $k = n-1$). In the formula we make use of a system of functions $\varphi_p(t)$ biorthogonal to the powers of t on $(-\infty, +\infty)$ with respect to the weight function $(1+t^2)^{-\alpha}$. To be explicit, let r be an integer $< \alpha - \frac{1}{2}$ and let φ_p be the polynomial of degree $\leq r$ which satisfies

$$(8, 4) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^q \varphi_p(t)\,dt}{(1+t^2)^{\alpha}} = \delta_{pq}, \qquad 0 \leq p, q \leq r.$$

Theorem 1 c. — *Let r be an integer $< \alpha - \frac{1}{2}$ and let $v_p \in P^{\alpha-p-\frac{1}{2}}(R^{n-1})$ for $p = 0, 1, \ldots, r$. If u is the function in P^{α} whose Fourier transform is given by*

(8, 5)

$$\hat{u}(\xi) = (2\pi)^{1/2} \sum_{p=0}^{r} i^{-p} \frac{(1+|\xi'|^2)^{\alpha-\frac{p+1}{2}}}{(1+|\xi|^2)^{\alpha}} \varphi_p\left(\frac{\xi_n}{\sqrt{1+|\xi'|^2}}\right) \hat{v}_p(\xi')$$

then

$$(8, 6) \qquad \frac{\partial^p u(x', 0)}{\partial x_n^p} = v_p(x') \quad \text{for} \quad p = 0, 1, \ldots, r,$$

and there is a constant c (depending only on α and r) such that

$$\|u\|_\alpha^2 \leq c \sum_{p=0}^{r} \|\varphi_p\|^{\prime 2}_{\alpha-p-\frac{1}{2}}. \tag{8, 7}$$

Moreover, u is the function in P^α *with minimum norm satisfying* (8, 6).

Proof. — From the fact that $\varphi_p \in P^{\alpha-p-\frac{1}{2}}(R^{n-1})$ it follows that the product of each summand in (8, 5) by $(1+|\xi|^2)^{\alpha/2}$ is square integrable over R^n, so that by proposition 5) § 2, there does exist a function $u \in P^\alpha$ whose Fourier transform is given by (8, 5) and whose α-norm satisfies (8, 7). The constant c can be taken to be $2\pi(r+1) \max_p \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_p(t)^2 dt}{(1+t^2)^\alpha}$. By Theorem 1 a (and Theorem 1 of the last section) the Fourier transform of $\frac{\partial^p u}{\partial x_n^p}(x', 0)$ is

$$(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} (i\xi_n)^p \, \hat{u}(\xi) \, d\xi_n,$$

which, by (8, 4) is easily shown to be $\hat{\varphi}_p(\xi')$. Therefore $\frac{\partial^p u(x', 0)}{\partial x_n^p} = \varphi_p(x')$ almost everywhere, and since both are in $P^{\alpha-p-\frac{1}{2}}(R^{n-1})$, $\frac{\partial^p u(x', 0)}{\partial x_n^p} = \varphi_p(x')$ exc. $\mathfrak{A}'_{2\alpha-2p-1}$.

In order to prove that u is the function with minimum α-norm among all functions in P^α which satisfy (8, 6), we have to prove that u is orthogonal to all $\varphi \in P^\alpha$ which satisfy $\frac{\partial^p \varphi}{\partial x_n^p}(x', 0) = 0$ for $p = 0, \ldots, r$. In terms of the Fourier transform, the problem is to show that

$$\int (1+|\xi|^2)^\alpha \hat{u}(\xi) \overline{\hat{\varphi}(\xi)} d\xi = 0$$

for all φ which satisfy

$$\int (i\xi_n)^p \hat{\varphi}(\xi) d\xi_n = 0 \qquad \text{for} \qquad p = 0, \ldots, r.$$

This is immediate, since φ_p is a polynomial of degree $\leq r$.

REMARK 2. — It is easy to see by the same argument that if $r+\frac{1}{2}<\beta\leqq\alpha$, and u is determined by (8, 5), then

$$(8, 8) \qquad ||u||_\beta^2 \leqq c_1 \sum_{p=0}^{r} ||\varphi_p||^2_{\beta-p-\frac{1}{2}}.$$

where c_1 depends on α, β, and r. This shows (interchanging the roles of α and β) that Theorem 1 *c* can be strengthened in the following way:

Suppose that $\beta\geqq\alpha>r+\frac{1}{2}$ *and that for* $p=0, \ldots, r$, $\varphi_p \in \mathrm{P}^{\beta-p-\frac{1}{2}}(\mathrm{R}^{n-1})$. *Then there exists* $u \in \mathrm{P}^\beta$ *such that* (8, 6) *and* (8, 7) *hold.*

In the next propositions we will use the following notations: as before x' denotes the first k coordinates of x as well as the corresponding point of R^k; x'' denotes the last $(n-k)$ coordinates of x as well as the corresponding point of R^{n-k}—the subspace where $x'=0$. If E is a subset of R^n, $\mathrm{E}_{x'}$ denotes the set of all x'' such that $(x', x'') \in \mathrm{E}$. If f is a function in R^n, $f_{x'}$ is the function on R^{n-k} defined by $f_{x'}(x'')=f(x', x'')$. By $\mathfrak{A}''_{2\alpha}$, $\gamma''_{2\alpha}$, etc., are denoted the classes, functions, etc., corresponding to R^{n-k}.

1) *If* $\mathrm{A}\subset\mathrm{R}^n$ *and* $\mathrm{A}\in\mathfrak{A}_{2\alpha}$ *and if* $0\leqq\beta\leqq\alpha$ *then, for all* x' *exc.* $\mathfrak{A}'_{2\alpha-2\beta}$, $\mathrm{A}_{x'}\in\mathfrak{A}''_{2\beta}$.

2) *If* $u\in\mathrm{P}^\alpha(\mathrm{R}^n)$ *and* $0\leqq\beta\leqq\alpha$, *then* $u_{x'}\in\mathrm{P}^\beta(\mathrm{R}^{n-k})$ *for all* x' *exc.* $\mathfrak{A}'_{2\alpha-2\beta}$.

PROOFS. — We assume first that $0<\beta<\alpha$. Consider $u\in\mathrm{P}^\alpha(\mathrm{R}^n)$. The function $\hat{h}(\xi)=(1+|\xi'|^2)^{\frac{\alpha-\beta}{2}}(1+|\xi''|^2)^{\frac{\beta}{2}}\hat{u}(\xi)$ is in L^2 and $||\hat{h}||_{\mathrm{L}^2}\leqq||(1+|\xi|^2)^{\frac{\alpha}{2}}\hat{u}||_{\mathrm{L}^2}$, hence its inverse Fourier transform $h(x)$ satisfies

$$(8, 9) \qquad ||h(x)||_{\mathrm{L}^2(\mathrm{R}^n)}\leqq||u||_\alpha.$$

Since $\hat{u}(\xi)=(1+|\xi'|^2)^{-\frac{\alpha-\beta}{2}}(1+|\xi''|^2)^{-\frac{\beta}{2}}\hat{h}(\xi)$, by using the kernels $\mathrm{G}'_{\alpha-\beta}$ and G''_β corresponding to spaces R^k and R^{n-k} we can write

$$(8, 10) \qquad u(x', x'')=\int_{\mathrm{R}^k}\int_{\mathrm{R}^{n-k}}\mathrm{G}'_{\alpha-\beta}(x'-y')\mathrm{G}''_\beta(x''-y'')h(y', y'')\,dy'\,dy''.$$

This equality is at first valid only almost everywhere. However, if we apply the above formulas to the regularized functions $u_\rho = e_\rho * u$, the corresponding h_ρ is obviously $e_\rho * h$ and the equation

(8, 10′)
$$u_\rho(x', x'') = \int_{R^k}\int_{R^{n-k}} G'_{\alpha-\beta}(x'-y')\, G''_\beta(x''-y'')\, h_\rho(y', y'')\, dy'\, dy''$$

is valid everywhere. We put now

$$w_{(\rho)}(x', y'') = \int_{R^k} G'_{\alpha-\beta}(x'-y')\, h_\rho(y', y'')dy',$$

$$h'_{(\rho)}(y') = \left[\int_{R^{n-k}} |h_\rho(y', y'')|^2 dy''\right]^{\frac{1}{2}}$$

and get

$$u_\rho(x', x'') = \int_{R^{n-k}} G''_\beta(x''-y'') w_{(\rho)}(x', y'')dy'',$$

$$||u_{\rho x'}||_\beta^2 = \int_R |w_{(\rho)}(x', y'')|^2\, dy''$$

$$= \int_{R^{n-k}}\int_{R^k}\int_{R^k} G'_{\alpha-\beta}(x'-y')G'_{\alpha-\beta}(x'-z')\overline{h_\rho(y', y'')}h_\rho(z', y'')\, dy'\, dz'\, dy''$$

$$\leq \left[\int_{R^k} G'_{\alpha-\beta}(x'-y')h'_{(\rho)}(y')\, dy'\right]^2,$$

(8, 11) $$||u_{\rho x'}||_\beta \leq \int_R G'_{\alpha-\beta}(x'-y')h'_{(\rho)}(y')\, dy'.$$

Similarly, for $u_\rho - u_{\rho_1}$, putting

$$h'_{\rho,\rho_1}(y') = \left[\int_{R^{n-k}} |h_\rho(y', y'') - h_{\rho_1}(y', y'')|^2 dy''\right]^{\frac{1}{2}}$$

we get

(8, 11′) $$||u_{\rho x'} - u_{\rho_1 x'}||_\beta \leq \int_{R^k} G'_{\alpha-\beta}(x'-y')h'_{\rho,\rho_1}(y')\, dy'.$$

Since h'_{ρ,ρ_1} converges to 0 in $L^2(R^k)$ when ρ and $\rho_1 \to 0$, we can choose a sequence $\rho_m \searrow 0$ such that the series

$$h'_{\rho_1}(x') + \sum_{m=1}^{\infty} h'_{\rho_{m+1},\rho_m}(x') = H'(x')$$

converges strongly in $L^2(R^k)$ and hence the sequence $\{u_{\rho_m x'}\}$ converges in $P^\beta(R^{n-k})$ for all $x' \in R^k$ except where $G'_{\alpha-\beta}H'(x') = +\infty$ i.e. except a set $B' \in \mathfrak{A}'_{2\alpha-2\beta}$. For each x' outside of this set we can then choose a subsequence $\{u_{\rho_{m_i} x'}\}$ converging pointwise in R^{n-k} except on a set $B''_{(x')} \in \mathfrak{A}''_{2\beta}$.

To prove proposition 1) we replace u by $v = G_\alpha g$, $g \in L^2(R^n)$, $g \geq 0$, such that $v(x) = +\infty$ for $x \in A$. Then $v_\rho(x) \to v(x)$

everywhere in extended sense and now, denoting the above sets B' and $B''_{(x')}$ by A' and $A''_{(x')}$ we get $A_{x'} \subset A''_{(x')}$, and hence $A_{x'} \in \mathfrak{A}''_{2\beta}$ except for $x' \in A' \in \mathfrak{A}'_{2\alpha-2\beta}$.

To prove proposition 2), denote by A the set where $u_\rho(x)$ does not converge to $u(x)$. Using proposition 1) we find a set $A' \in \mathfrak{A}'_{2\alpha-2\beta}$ outside of which $A_{x'} \in \mathfrak{A}''_{2\beta}$. Then, for $x' \notin A' \cup B'$, $u_{\rho_{m_l} x'}(x'')$ converges pointwise outside of $A_{x'}$ to $u_{x'}(x'')$ and hence $u_{x'}(x'')$ coincides with the limit of $\{u_{\rho_{m_l} x'}\}$ in

$$P^\beta(R^{n-k}) \text{ exc. } \mathfrak{A}''_{2\beta}.$$

We still have to settle the extreme cases: 1) $0 = \beta = \alpha$, 2) $0 = \beta < \alpha$, and 3) $0 < \beta = \alpha$. The first is trivial. The last two cases are treated like the general one: we must remember only that the operator G_θ reduces to identity for $\theta = 0$. For instance,

for $0 = \beta < \alpha$ (8, 10) becomes

$$u(x', x'') = \int_{R^k} G'_\alpha(x' - y')h(y', x'')\, dy'$$

for $0 < \beta = \alpha$ (8, 11) becomes $\|u_{\rho x'}\|_\beta \leqq h'_{(\rho)}(x')$.

As special cases or corollaries of proposition 2) we mention the following:

2 *a*) $0 < \beta = \alpha$. Almost everywhere in R^k, $u_{x'} \in P^\alpha(R^{n-k})$.

2 *b*) $0 = \beta < \alpha$. Except on a set of 2α-capacity 0 in R^k, $u_{x'} \in L^2(R^{n-k})$.

2 *c*) If $\alpha > \frac{n-k}{2}$, $u_{x'}$ is continuous in R^{n-k} except for x' in a set of 2δ-capacity 0 in R^k for any $\delta < \alpha - \frac{n-k}{2}$.

It should be noticed, however, that if $\alpha \geqq \frac{k}{2}$ we obtain from 2) that $u_{x'} \in P^{\alpha - \frac{k}{2}}(R^{n-k})$ except on a set of logarithmic capacity 0 in R^k whereas we know from Theorem 1 *a* that $u_{x'} \in P^{\alpha - \frac{k}{2}}(R^{n-k})$ for all $x' \in R^k$.

§ 9. Functions locally in P^α on an open set.

If D is an open set, $P^\alpha_{loc}(D)$ denotes the class of all functions on D which belong to P^α locally, that is, the class of all functions u defined on D exc. $\mathfrak{A}_{2\alpha}$ such that each point of D has

a neighborhood on which u coincides with some function in P^α. Many results about functions in $P^\alpha_{loc}(D)$ are immediate consequences of results already proved about functions in P^α. For example, if $u \in P^\alpha_{loc}(D)$ and if $|i| \leq \alpha$, then $D_i u$ exists in the ordinary sense exc. $\mathfrak{A}_{2\alpha-2|i|}$ and belongs to $P^{\alpha-|i|}_{loc}(D)$. Or, if $u \in P^\alpha_{loc}(D)$ and if $2\alpha > n - k$, then the restriction of u to $D \cap R^k$ belongs to $P_{loc}^{\alpha - \frac{n-k}{2}}(D \cap R^k)$. In this section we give a few results about $P^\alpha_{loc}(D)$ which are not so obviously covered by the earlier theorems.

1) $u \in P^\alpha_{loc}(D)$ *if and only if for each compact* $K \subset D$ *there exists a function* $u_K \in P^\alpha(R^n)$ *which coincides with* u *on the set* K.

Proof. — The first half follows directly from the definition of P^α_{loc}. To prove the second part we use the method of partition of unity.

We choose a locally finite covering $\{U_i\}$ of D by open sets such that $\overline{U}_i \subset D$ and that each U_i be sufficiently small so that there exists a function $u_i \in P^\alpha(R^n)$ coinciding with u on U_i. We take then a partition of unity corresponding to the covering $\{U_i\}$ i.e. functions $\varphi_i \in C_0^\infty(R_n)$ with values between 0 and 1, such that each φ_i vanishes outside of U_i and that $\Sigma\varphi_i(x) = 1$ for each $x \in D$.

We take now those $U_{i_1}, \ldots, U_{i_l}$ which intersect the compact K; there is only a finite number of them. The function

$$\varphi_{i_1}u_{i_1} + \ldots + \varphi_{i_l}u_{i_l}$$

is then the desired function u_K. In fact, by proposition 6) § 2, each $\varphi_i u_i \in P^\alpha(R_n)$. Then for $x \in D$, $\varphi_i u = \varphi_i u_i$ and for $x \in K$, $\varphi_{i_1}(x)u_{i_1}(x) + \ldots + \varphi_{i_l}(x)u_{i_l}(x) = u(x)\Sigma\varphi_i(x) = u(x)$.

As corollaries from 1) we get

1′) *If* $u \in P^\alpha_{loc}(D)$ *and* $\varphi \in C^{(\alpha^*, 1)}$ *and has a compact support in* D *then* φu, *when extended by* 0 *outside of* D, *belongs to* $P^\alpha(R^n)$.

Here again we use 6) § 2.

1″) *If* u *has a compact support in* D *and we extend* u *by* 0 *outside of* D, *then* $u \in P^\alpha_{loc}(D)$ *if and only if* $u \in P^\alpha(R^n)$.

As we already mentioned before, Theorem 1, § 7 on differentiation has an obvious extension in a localized form to $P^\alpha_{loc}(D)$. The extension, however, of the converse, Theo-

rem 2, is not so immediate. We prove it here under the weak hypotheses stated in Remark 2, section 7.

2) *Let m be an integer $0 \leqq m \leqq \alpha$. The function u belongs to $P^{\alpha}_{loc}(D)$ if*

a) u is defined in D except a set of 2α-capacity 0 and for each $\epsilon > 0$ there exists $B_\epsilon \subset D$ with $\gamma_{2\alpha}(B_\epsilon) < \epsilon$, so that u restricted to $D\text{-}B_\epsilon$ is continuous.

b) All pure derivatives $\dfrac{\partial^j u}{\partial x_k^j}$, $k = 1, \ldots, n$, $j = 0, 1, \ldots, m$, exist pointwise almost everywhere and all those of order $j < m$ are equivalent to absolutely continuous functions on almost all lines parallel to the corresponding x_k-axis [40].

c) The derivatives $\dfrac{\partial^m u}{\partial x_k^m}$, $k = 1, \ldots, n$, are almost everywhere equal to functions in $P^{\alpha-m}_{loc}(D)$.

Proof. — The first step is to prove that all the derivatives $\dfrac{\partial^j u}{\partial x_k^j}$, $j = 1, \ldots, m$ are locally L^2 in D. This is true for $j = m$ by c). To show it for $j < m$ we have to extend a lemma by Nikodym [13 *b*]. We introduce the following notations: Let Q be the closed cube $0 \leqq x_k \leqq a$, $k = 1, \ldots, n$, Q_k the face of Q lying in the coordinate hyperplane orthogonal to the x_k-axis, $x^{(k)}$ a variable point in Q_k. A point x in Q will be written $(x^{(k)}, x_k)$ for any k.

Lemma. — *Let u be defined almost everywhere in the n-dimensional cube Q. Suppose furthermore that for each k, $1 \leqq k \leqq n$, and for almost all $x^{(k)} \in Q_k$, the derivatives $\dfrac{\partial^j u(x^{(k)}, x_k)}{\partial x_k^j}$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$, are equivalent to absolutely continuous functions in $0 \leqq x_k \leqq a$. Then, if each $\dfrac{\partial^m u}{\partial x_k^m}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ is in $L^2(Q)$, all the derivatives $\dfrac{\partial^j u}{\partial x_k^j}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. $j = 0, 1, \ldots, m-1$ are in $L^2(Q)$.*

Proof. — We use induction with respect to the dimension n. For $n = 1$, the theorem is obviously true. Suppose that it is true for dimension $n-1$ and fix an index k, $1 \leqq k \leqq n$.

[40] The last condition means that for almost all such lines l intersecting D the derivatives are absolutely continuous on every *closed* segment contained in $l \cap D$.

By our assumptions it is clear that we can find a function $p_k(x^{(k)}, x_k)$ defined for almost all $x^{(k)} \in Q_k$ and which is a polynomial of order $\leq m-1$ in x_k such that if $u_k(x)$ is defined by

$$(9,0) \quad u_k(x^{(k)}, x_k) = p_k(x^{(k)}, x_k) + \int_0^{x_k} \frac{\partial^m u(x^{(k)}, t)}{\partial x_k^m} \frac{(x_k - t)^{m-1}}{(m-1)!} dt$$

then

$$(9,0') \quad \frac{\partial^j u_k(x)}{\partial x_k^j} = \frac{\partial^j u(x)}{\partial x_k^j} \textit{ almost everywhere in } Q \textit{ for } j = 0, 1, \dots, m.$$

Consider the $(n-1)$-dimensional cubes obtained by intersecting Q with the hyperplanes $x_k =$ const., $0 \leq x_k \leq a$. It is clear that by the hypotheses of our lemma, for almost all x_k in $[0, a]$ the function u satisfies in these $(n-1)$-cubes the conditions of our lemma with respect to the $n-1$ remaining variables. Hence we can find m distinct values a_i, $0 \leq a_1 < \dots < a_m \leq a$ such that

$$(9,1) \quad \sum_{i=1}^m \int_{Q_k} |u_k(x^{(k)}, a_i)|^2 dx^{(k)} = \sum_{i=1}^m \int_{Q_k} |u(x^{(k)}, a_i)|^2 dx^{(k)} < \infty.$$

For almost all $x^{(k)}$ in Q_k, $p_k(x^{(k)}, t)$ can be determined by its values at $t = a_1, \dots, a_m$ (we use the Lagrange interpolation formula). Therefore, from (9. 0) we get

$$(9,2) \quad u_k(x^{(k)}, x_k) = \int_0^{x_k} \frac{\partial^m u(x^{(k)}, t)}{\partial x_k^m} \frac{(x_k - t)^{m-1}}{(m-1)!} dt$$
$$+ \sum_{i=1}^m \frac{q(x_k)}{(x_k - a_i) q'(a_i)} \left[u_k(x^{(k)}, a_i) - \int_0^{a_i} \frac{\partial^m u(x^{(k)}, t)}{\partial x_k^m} \frac{(a_i - t)^{m-1}}{(m-1)!} dt \right],$$

where $q(t)$ is the polynomial $\prod_{i=1}^m (t - a_i)$ and q' is its derivative. By taking in (9, 2) the derivatives $\frac{\partial^j}{\partial x_j^k}$ for $j = 1, \dots, m-1$ we derive without trouble an evaluation

$$(9,3) \quad \sum_{j=0}^{m-1} \int_0^a \left| \frac{\partial^j u_k(x^{(k)}, x_k)}{\partial x_k^j} \right|^2 dx_k \leq$$
$$c \left[\int_0^a \left| \frac{\partial^m u(x^{(k)}, x_k)}{\partial x_k^m} \right|^2 dx_k + \sum_{i=1}^m |u_k(x^{(k)}, a_i)|^2 \right]$$

with constant $c > 0$ depending only on the $a_i's$, a, m, and n. Integration in (9, 3) with respect to $x^{(k)}$ over Q_k and (9, 1) together with (9, 0′) gives then the lemma.

Going back to the proof of proposition 2), consider a compact $K \subset D$ and a bounded open set $U \supset K$ such that $\overline{U} \subset D$. Take $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$ such that $\varphi(x) = 1$ on K and $\varphi(x) = 0$ outside of U. We write $v = \varphi u$ extending this function by 0 outside of D. It is obvious that $v \in L^2(R^n)$ by the above lemma, that condition *a*) of theorem 2, § 7 is satisfied and that condition *b*) of this theorem in the weakened form of remark 2 is satisfied also. However, condition *c*) of the theorem, even in the weakened version of remark 2 presents still a problem. Let us write

$$(9,4) \qquad \frac{\partial^m v}{\partial x_k^m} = \frac{\partial^m \varphi u}{\partial x_k^m} = \varphi \frac{\partial^m u}{\partial x_k^m} + \binom{m}{1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \frac{\partial^{m-1} u}{\partial x_k^m} + \cdots + \frac{\partial^m \varphi}{\partial x_k^m} u.$$

The first term is equivalent to a function in $P^{\alpha-m}$ but the best we know about the remaining terms, by the above lemma, is that they are in L^2. Hence $\dfrac{\partial^m v}{\partial x_k^m} \in L^2 = P^0$ and by theorem 2 (for $\alpha = m$) $v \in P^m$ and so $u \in P^m_{\text{loc}}(D)$.

Suppose that we know already that $u \in P^\beta_{\text{loc}}(D)$ for some β with $m \leq \beta < \alpha$. Then by (9, 4) and theorem 1, § 7 (applied to $\dfrac{\partial^j u}{\partial x_k^j}$ with $j = m - 1$) we get that $\dfrac{\partial^m v}{\partial x_k^m}$ is equivalent to a function in P^{β_1} with $\beta_1 = \min(\alpha - m, \beta - m + 1)$. Again, by theorem 2, remark 2, it follows that v is a potential of order $\min(\alpha, \beta + 1)$ and hence u is locally such a potential. This procedure allows us to reach stepwise (in a number of steps smaller than $\alpha - m + 1$) the stage where $\min(\alpha, \beta + 1) = \alpha$, when the proof will be done.

For later use we record a similar proposition (with a similar proof) which gives sufficient conditions in order that a function on D be equal almost everywhere to a function in $P^\alpha_{\text{loc}}(D)$.

2′) *If a measurable function u defined almost everywhere on* D *satisfies conditions b) and c) of proposition* 2, *then u is equal almost everywhere to a function in* $P^\alpha_{\text{loc}}(D)$.

A transformation is said to be of class $C^{(m,1)}$ on an open set if each of its coordinate functions is of class $C^{(m,1)}$ on the open

set. A transformation is a homeomorphism of class $C^{(m,1)}$ if both the transformation and its inverse are of class $C^{(m,1)}$.

3) *If* T *is a transformation of* D^* *into* D *which is locally a homeomorphism of class* $C^{(\alpha^*,1)}$ *then for each* $u \in P^{\alpha}_{loc}(D)$ *the function* $T^*u(x) = u(Tx)$ *belongs to* $P^{\alpha}_{loc}(D^*)$. *If* $\alpha \geq 1$, *the partial derivatives of* T^*u *are calculated by the usual formulas for the partial derivatives of composite functions.*

Proof. — By a classical theorem of topology, T transforms open sets on open sets ([41]). Therefore, it can be assumed (by restricting ourselves to a subdomain of D^*) that T is a homeomorphism of class $C^{(\alpha^*,1)}$. Also, by multiplying u by a function $\varphi \in C_0^\infty(D)$, it can be assumed that u has compact support in D. Hence it is sufficient to prove the following statement (which is a special case of the proposition).

4) *Let* T *be a homeomorphism of class* $C^{(\alpha^*,1)}$ *of* D^* *onto* D, *and let* U *be a relatively compact open subset of* D. *Then there is a constant* c *such that if* $u \in P^{\alpha}$ *and* u *vanishes outside* U, *then* $T^*u \in P^{\alpha}$ *and* $\|T^*u\|_{\alpha} \leq c\|u\|_{\alpha}$.

Proof. — If u is of class $C^{(\alpha^*,1)}$ then T^*u is also of class $C^{(\alpha^*,1)}$, so, by proposition 5) § 2, $T^*u \in P^{\alpha}$. In evaluating the norm of T^*u, formula (1, 5) is used. For integral values of α the existence of the constant c is obvious from the classical formula for the transformation of multiple integrals. For non-integral values of α the double integral over R^n is dominated by a sum of integrals

$$\int_{R^n-U}\int_{R^n-U}, \quad \int_{R^n-D}\int_{U} \quad \text{and} \quad \int_{D}\int_{D}$$

The first of these is 0, since u vanishes outside U. The second is easily seen to be dominated by $|T^*u|_{\alpha^*}$ (the constant depends on the distance from U to the boundary of D), and hence by $|u|_{\alpha}$. Finally, the evaluations that were used in the proof of proposition 6) § 2, and the classical formula for the transformation of integrals show that the third is also dominated by $|u|_{\alpha}$. Thus, the proposition is proved for u of class $C^{(\alpha^*,1)}$. It is proved for arbitrary u by using approximations of class $C^{(\alpha^*,1)}$. The approximating functions can

([41]) If $\alpha^* > 0$, the implicit function theorem can be used here, but if $\alpha^* = 0$ the theorem of Brouwer is needed.

be chosen to vanish outside an arbitrary neighborhood of U, and the above results applied to this neighborhood.

Proposition 3) shows that $P^{\alpha}_{\mathrm{loc}}(D)$ is defined not only when D is an open subset of R^n, but actually when D is an open subset of any differentiable manifold of class $C^{(\alpha^*, 1)}$. This fact will be important in chapter IV, part. II.

To finish this section we prove that some general potentials are locally in P^{α}.

Consider a measure μ (in general a signed measure) for which the potential $G_{\alpha}\mu$ has a meaning. Following (6, 4) this requires

$$\text{(9, 5)} \qquad \int (1+|x|)^{\frac{\alpha-n-1}{2}} e^{-|x|} |d\mu(x)| < \infty .$$

In general $G_{\alpha}\mu(x)$ is defined and finite exc. $\mathfrak{A}_{2\alpha}$ (see 18), § 6). However, more can be said under additional assumptions.

5) *If* μ *satisfies* (9, 5) *and in some domain* D, $d\mu(x) = g(x)\,dx$ *with* $g \in P^{\beta}_{\mathrm{loc}}(D)$, *then* $u = G_{\alpha}\mu$ *restricted to* D *is in* $P^{\alpha+\beta}_{\mathrm{loc}}(D)$.

Proof. — Take any bounded open set U with $\overline{U} \subset D$ and take $\varphi \in C^{\infty}_0(R^n)$ and such that $\varphi(x) = 1$ on U and φ vanishes outside of a compact lying in D. Then $d\mu = \varphi g\,dx + (1-\varphi)\,d\mu$ and

$$\text{(9, 6)} \qquad G_{\alpha}\mu(x) = \int G_{\alpha}(x-y)\varphi(y)g(y)\,dy + \int G_{\alpha}(x-y)(1-\varphi(y))\,d\mu(y).$$

Since $\varphi g \in P^{\beta}(R^n)$, the first potential $\in P^{\alpha+\beta}(R^n)$. In the second, there are no masses in the open set U and hence the second integral is an analytic regular function of the n variables $x = (x_1, \ldots, x_1)$ in U [42]. It follows from 2) that the second integral belongs to all classes $P^{\nu}_{\mathrm{loc}}(U)$ and thus $u \in P^{\alpha+\beta}_{\mathrm{loc}}(U)$. Since u is an arbitrary open bounded subset of D we get our statement.

Remark. — A statement similar 5) can be proved concerning more classical potentials such as newtonian or more generally Riesz potentials $R_{\alpha}\mu$ corresponding to the kernel $R_{\alpha}(r) = C_{\alpha}r^{\alpha-n}$ [43].

[42] To see this, in the integral replace the variables x_k by complex variables z_k, which is possible since $G_{\alpha}(r)$ is an analytic function of r regular outside $r = 0$.

[43] For $\alpha \geq n$, and $\alpha - n$ an even integer, this definition of R_{α} should be changed by putting a factor $\lg \frac{2}{r}$ and adding similar terms of lower order in r.

Since for $\alpha \leq n$, up to a constant coefficient, $R_\alpha(r)$ is the principal term of the development of $G_\alpha(r)$ around 0, both kernels together with all their derivatives behave alike in any fixed bounded set [44]. It follows that when the measure μ (or density g) have *compact support* the potentials $R_\alpha\mu$ and $G_\alpha\mu$ behave alike in every *bounded* domain as concerns sets where they are defined, or differentiability or the transfer of differentiation under the sign of integral. The essential difference between the potentials $R_\alpha\mu$ and $G_\alpha\mu$ is in their global behavior; $R_\alpha\mu$ is much less manageable than $G_\alpha\mu$. This is due to the fact that the kernel $R_\alpha(r)$ is never in L^2 or in L^1. However, for $\alpha < \frac{n}{2}$, the kernel is L^1 inside a sphere $r < r_0$ and L^2 outside of the sphere, which allows the use of classical theorems in Fourier transforms for the corresponding potentials of functions in L^2.

Coming back to the extension of 5) to $R_\alpha\mu$ we notice that the condition (9, 5) should be replaced now by

$$(9, 7) \qquad \int (1 + |x|)^{\alpha - n} d\mu(x) < \infty \text{ [45]}.$$

Replacing (9, 5) by (9, 7) in the statement of 5), and $u = G_\alpha\mu$ by $u = R_\alpha\mu$, the proof proceeds in the same way (with G replaced by R). The second integral in (9,6) is again analytic in U. The first, however, causes more trouble, and we must use proposition 2). To this effect we differentiate (which we may do) m times under the integration sign, m being such that $0 < \alpha - m < \frac{n}{2}$. The resulting differentiated kernels D_jR_α are then in L^1 in a sphere and in L^2 outside of a sphere which allows the application of classical theorems to the Fourier transform of $D_jR_\alpha(\varphi g)$ and we obtain

$$\widehat{D_jR_\alpha(\varphi g)} = (2\pi)^{n/2}\, \widehat{D_jR_\alpha}\ \widehat{(\varphi g)} = (i)^m \xi^j |\xi|^{-\alpha}\, \widehat{(\varphi g)}.$$

Since $\widehat{\varphi g}$ is an entire function and $(1 + |\xi|^2)^{\beta/2}\widehat{\varphi g}$ is in L^2 and since $|j| = m$, $|\xi^j| \leq |\xi|^m$, $|\xi^j|\xi|^{-\alpha}| < |\xi|^{m-\alpha}$ it follows that

[44] For $\alpha \geq n$, these facts are true only for derivatives of orders $\geq \alpha - n$ but those of lower orders are continuous at 0.

[45] Or the corresponding expression when $\alpha - n$ is an even non-negative integer.

$(1+|\xi|^2)^{\frac{\alpha+\beta-m}{2}}\widehat{D_jR_\alpha(\varphi g)}$ is in L^2, hence $D_jR_\alpha(\varphi g)\in P^{\alpha+\beta-m}$ which makes it possible to apply 2).

This line of proof leaves out two exceptional cases: $n=2$, α an integer and $n=1$, $\alpha=k+\alpha'$ with k integer and

$$1/2<\alpha'<1.$$

Another way of proving that $R_\alpha(\varphi g)\in P^{\alpha+\beta}_{\mathrm{loc}}(U)$ which avoids the exceptional cases is to prove it first for small α, $0<\alpha<\frac{n}{2}\cdot$ We then use the composition formula $R_\alpha=R_{\alpha_1}*R_{\alpha_2}*\cdots*R_{\alpha_m}$ with $\alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_m$, $0<\alpha_k<\frac{n}{2}\cdot$ We have successively $R_{\alpha_m}(\varphi g)\in P^{\alpha_m+\beta}_{\mathrm{loc}}(U)$, $R_{\alpha_{m-1}}*R_{\alpha_m}(\varphi g)$ $P^{\alpha_{m-1}+\alpha_m+\beta}_{\mathrm{loc}}(U)$ and so on till $R_\alpha(\varphi g)\in P^{\alpha+\beta}_{\mathrm{loc}}(U)$. Since the composition formula is valid only for $\alpha<n$, for $\alpha\geqq n$ we have to replace it by an approximate composition formula where the composition is taken not over the whole space but over a sufficiently large sphere containing U. The result of the composition differs then from R_α by a function regular in U and thus the proof can be achieved.

§ 10. — Relations between the classes P^α and L^q.

In this section we establish the L^q class to which a potential $G_\alpha f$, $f\in L^p$, $p\geqq 1$, belongs. When $p=2$ we obtain the L^q class to which the functions in P^α belong.

1) *If $f\in L^p$, $p\geqq 1$, then $G_\alpha f\in L^q$ for every $q\geqq p$ satisfying*

$$\frac{1}{q}\geqq\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{n}\quad \text{if}\quad p>1\quad\text{and}\quad \frac{1}{p}-\frac{\alpha}{n}\neq 0,$$
$$\frac{1}{q}>\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{n}\quad \text{if}\quad p=1\quad\text{or}\quad \frac{1}{p}-\frac{\alpha}{n}=0,$$

and there is a constant M *depending only on α, n, p, and q such that*

$$\|G_\alpha f\|_{L^q}\leqq M\|f\|_{L^p}.$$

PROOF. — A classical theorem of W. H. YOUNG states that if $\frac{1}{r}+\frac{1}{p}\geqq 1$, $1\leqq r\leqq\infty$, $1\leqq p\leqq\infty$, $\frac{1}{q}=\frac{1}{r}+\frac{1}{p}-1$ and if $u\in L^r(R^n)$, $v\in L^p(R^n)$ then

$$\|u*v\|_{L^q}\leqq\|u\|_{L^r}\|v\|_{L^p}.$$

Since $G_\alpha \in L^r(R^n)$ for every $r \geq 1$ with $\frac{1}{r} > 1 - \frac{\alpha}{n}$ we get immediately for any $q \geq p$ satisfying $\frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$

$$||G_\alpha F||_{L^q} \leq ||G_\alpha||_{L^r}||f||_p \qquad \textit{with} \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + 1.$$

This gives the statement (with $M = ||G_\alpha||_{L^r}$) except when $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n} > 0$ and $p > 1$. In this case, however, Soboleff's theorem, [15 b] or [14], states that

$$||R_\alpha f||_{L^q} \leq M||f||_{L^p}.$$

Since $\alpha < \frac{n}{p} < n$ and $R_\alpha(x) \geq G_\alpha(x)$, it follows that

$$||G_\alpha f||_{L^q} \leq M||f||_{L^p},$$

which finishes the proof.

Corollary. — $P^\alpha \subset L^q$ *for every* $q \geq 2$ *satisfying*

$$\frac{1}{q} \geq \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{n} \quad \textit{if} \quad \alpha \neq \frac{n}{2}, \qquad \frac{1}{q} > 0 \quad \textit{if} \quad \alpha = \frac{n}{2}.$$

§ 11. — Comparison of the class P^α with various other classes.

In the present section we are going to compare our potentials of order α with other classes of functions introduced and used previously by different authors. These are essentially the classes of Riesz potentials of order α $\left(\text{for } \alpha < \frac{n}{2}\right)$, the (BL)-classes and the classes $H^\alpha = W^\alpha = W_2^\alpha$ for α a non-negative integer. We will not give proofs in the remarks which follow; most of these proofs rely on arguments similar to those used in preceding sections.

1. *The Riesz potentials of order* α. — These were introduced by the present authors in [1] for $\alpha < n/2$ as the perfect functional completion of the class C_0^∞ with respect to the Dirichlet norm of order α, $\sqrt{d_\alpha(u)}$. They were also introduced by J. Deny [8] as potentials of magnetic distributions of order

2α which form the completion of the class of signed measures of finite 2α-energy with respect to the energy norm. For $\alpha \geq n/2$, C_0^∞ does not have a functional completion with respect to the norm $\sqrt{d_\alpha(u)}$ (see 2), § 1).

By using the same kind of computations as those which lead in § 1 to (1, 5) (or (1, 10)) we can give a direct formula for $d_\alpha(u)$ without using derivatives, for $u \in C_0^\infty$. To this effect we introduce the k-th differences of $u(x)$, $\Delta^k u(x, z_1, \ldots, z_k)$ as follows.

$$(11, 1) \quad \begin{aligned} &\Delta^0 u(x) = u(x), \\ &\Delta^{k+1} u(x; z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}) = \Delta^k u(x; z_1, \ldots, z_k) \\ &\qquad\qquad - \Delta^k u(x + z_{k+1}; z_1, \ldots, z_k). \end{aligned}$$

We then take any decomposition $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$, $0 < \alpha_i < 1$ and obtain

(11, 2)
$$d_\alpha(u) = \frac{1}{\Pi C(n, \alpha_i)} \int_{R^n} \cdots \int_{R^n} \frac{|\Delta^k u(x; z_1, \ldots, z_k)|^2}{|z_1|^{n+2\alpha_1} \ldots |z_k|^{n+2\alpha_k}} \, dx \, dz_1 \cdots dz_k \ ([46]).$$

In this way $d_\alpha(u)$ has a meaning for all measurable functions u. We could be tempted to consider those u for which (11, 2) is finite as Riesz potentials of order α. However, on the class of all such functions $\sqrt{d_\alpha(u)}$ is a pseudo-norm; it is 0 if (and only if) u is equivalent to a polynomial of order $< k$. It can be proved that this class is independent of the decomposition $\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k$ except for the adjunction of additional polynomials when we increase k.

Let us call the class of u with (11, 2) finite $F^{\alpha, k}$. Obviously $\Delta^k u(x, z_1, \ldots, z_k)$ is L^2 for almost all systems $(z_1, \ldots, z_k)$. From this, by an inductive argument as in Nikodym's lemma (see § 9), we can prove that $u \in L^2_{loc}(R^n)$.

If $\alpha < n/2$ it can be proved that $F^{\alpha, k}$ admits of a direct decomposition,

$$(11, 3) \quad F^{\alpha, k} = [\textit{polynomials of order} < k] \dotplus \overline{C_0^\infty},$$

the second class being the functional completion of C_0^∞ under the norm (11, 2) relative to the class of sets of measure 0,

[46] A similar formula, using higher differences instead of derivatives can be obtained for $\|u\|_\alpha^2$. The reason such formulas are not given in the main text is that they do not lead in a simple manner to norms in subdomains of R^n.

i.e. the class of all functions equivalent to Riesz potentials of order α. Such decomposition is no longer possible for $\alpha \geqq \frac{n}{2}$.

Our space P^α is a subclass of $F^{\alpha,k}$. A function u in $F^{\alpha,k}$ which is equivalent to a function in P^α is characterized by the simple fact that $u \in L^2$. Each function in $F^{\alpha,k}$ can be proved to be equivalent to a function in $P^\alpha_{\text{loc}}(R^n)$. We can consider as the essential part of $F^{\alpha,k}$ the subclass $\check{F}^{\alpha,k}$ of $P^\alpha_{\text{loc}}(R^n)$ with finite (11, 2). If we add $\int_S |u|^2\, dx$ to (11, 2) for a fixed bounded set of positive Lebesgue measure, we obtain a quadratic norm which makes $\check{F}^{\alpha,k}$ into a complete functional space. This space is the perfect functional completion of $C^\infty(R^n) \cap F^{\alpha,k}$ with respect to this new norm. For $\alpha > n/2$ it will be a proper functional space.

2. *(BL)-classes of order α.* — These classes were introduced first for $\alpha = 1$ by O. Nikodym [13 *b*], for α a positive integer by J. Deny [8], and for arbitrary α by J. Deny and J. L. Lions [8 *a*] as a special case of much more general (BL)-classes which, besides those which are akin to our spaces P^α, contain many other important classes. They are divided into two categories : those « in large sense » and those in « precise sense ».

Those in large sense akin to our P^α (which we will denote by $(BL)_\alpha$) were formed explicitly for α an integer by assuming that the derivatives exist pointwise a.e. (original definition) or that they are taken in the sense of distributions and that the last derivatives (of order α when α integer, of order α^* when α is not an integer) have a finite $\sqrt{d_{\alpha-\alpha_*}}$ norm. These classes are essentially the same as the above classes $F^{\alpha,k}$ except that the latter contain polynomials of higher order and that in the original definition the exceptional class of sets was somehow smaller than the sets of measure 0 (see [8 *a*]).

The classes in precise sense differ from those in large sense only by the fact that their exceptional sets are taken smaller than in the original, namely they are sets of 2-capacity 0.

Spaces $H^m = W^m = W^2_m$, *m* positive integer. — These spaces are used by many authors working in partial differential equations (the notation depending on the author). A function u

belongs to $H^m(R^n)$ if it is L^2 and has strong derivatives in L^2 sense of all orders $\leq m$.

The space H^m is exactly the functional completion of C_0^∞ with respect to our norm $|u|_m$ or $||u||_m$ relative to the class of all sets of Lebesgue measure 0. It is therefore an « imperfect » version of P^m.

General remark. — All functions in the above considered spaces are equivalent to functions in the corresponding P^α or P^α_{loc}. We can always replace the former by the latter for which all our results concerning differentiability and restrictions to lower dimensional spaces, etc., are valid. This replacement can be very easily achieved by considering as the corrected value of the function u at a point x the mean value limit

$$\lim \frac{1}{|S|}\int_S u(y)\,dy = u'(x)$$

for spheres S with center at x, with radius converging to 0. The corrected function u' is defined wherever the limit exists (in any case a.e. if u is locally integrable), it is equivalent to u (when $u \in L^1_{loc}$) and belongs to P^α or P^α_{loc} whenever u is equivalent to such a function.

BIBLIOGRAPHY

[0] N. Aronszajn, Boundary values of functions with finite Dirichlet integral, *Conference on Partial Differential equations*, 1954, *University of Kansas*, Lawrence, Kansas.

[1] N. Aronszajn and K. T. Smith, Functional spaces and functional completion, *Annales de l'Inst. Fourier*, vol. 6, 1955-1956, pp. 125-185.

[2] N. Aronszajn and K. T. Smith, Characterization of positive reproducing kernels, Applications to Green's functions, *American Journ. Math.*, vol. 79, 1957, pp. 611-622.

[3] S. Bochner, *Vorlesungen über Fouriersche Integrale*, Chelsea, New York, 1948.

[4] M. Brelot, Points irréguliers et transformations continues en théorie du potentiel, *Journal de Math. Pures et Appl.*, vol. 19, 1940.

[4*a*] L. Carleson, On the connection between Hausdorff measures and capacity, Arkiv. f. Mat. vol. 36, 1957, pp. 403-406.

[5] H. Cartan, Sur les fondements de la théorie du potentiel, *Bull. Soc. Math. de France*, vol. 69, 1941, pp. 71-96.

[6] H. Cartan, Théorie du potentiel newtonien : énergie, capacité, suites de potentiels, *Bull. Soc. Math. de France*, vol. 73, 1945, pp. 74-106.

[7] G. Choquet, Theory of capacities, *Ann. de l'Inst. Fourier*, vol. 5, 1953-1954, pp. 131-295.

[7 *a*] G. Choquet and J. Deny, Modèles finis en théorie du potentiel, *Journ. d'Analyse Math.*, vol. 5, 1956-1957, pp. 77-135.

[8] J. Deny, Les potentiels d'énergie finie, *Acta Math.*, vol. 82, 1950, pp. 107-183.

[8 *a*] J. Deny and J. L. Lions, Les espaces du type de Beppo Levi, *Ann. de l'Inst. Fourier*, vol. 5, 1955, pp. 305-370.

[9] A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi, *Tables of Integral Transforms II*, New York, McGraw-Hill, 1954.

[10] A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions II*, New York, McGraw-Hill, 1953.

[10 *a*] P. Erdos and J. Gillis, Note on the transfinite diameter, *J. Lond. Math. Soc.*, vol. 12 (1937).

[11] O. Frostman, Potentiels d'équilibre et capacité des ensembles, *Thesis*, Lund, 1935.

[11 *a*] B. Fuglede, Extremal length and functional completion, *Acta Math.*, vol. 98, 1957, pp. 171-219.

[12] G. H. Hardy, J. E. Littlewood et G. Polya, *Inequalities*, Cambridge, The University Press, 1934.

[13] M. D. Kirszbraun, Uber die zusammenziehende und Lipschitzsche Transformationen, *Fund. Math.*, vol. 22, 1934.

[13 *a*] K. Kunugui, Étude sur la théorie du potentiel generalisé, Osaka, *Math. Journ.*, vol. 2, 1950, pp. 63-103.

[13 *b*] O. Nikodym, Sur une classe de fonctions considérées dans l'étude du problème de Dirichlet, *Fund. Math.*, vol. 21, 1933, pp. 129-150.

[13 *c*] N. Ninomiya, Étude sur la théorie du potentiel pris par rapport au noyau symétrique, *J. Inst. Polytech. Osaka City Univ.*, vol. 8, 1957, pp. 147-179.

[13 *d*] M. Ohtsuka, Capacité des ensembles produits, *Nagoya Math. Journ.* vol. 12, 1957, pp. 95-130.

[14] L. Schwartz, Théorie des distributions, I, II. *Ac. Sci. Ind.*, vol. 1091, 1122, Paris, 1950-1951.

[14 *a*] L. N. Slobodetzky, Spaces of S. L. Soboleff of fractional order... (in Russian) *Doklady Akad. Nauk. S.S.S.R.*, 118, 1958, pp. 243-246.

[14 *b*] L. N. Slobodetzky, Évaluations of solutions... (in Russian), *Doklady Akad. Nauk S.S.S.R.*, vol. 120, 1958, pp. 468-471.

[15] K. T. Smith, Mean values and continuity of Riesz potentials, *Comm. Pure and Applied Math.*, vol. 9, 1956, pp. 569-576.

[15 *a*] K. T. Smith, Functional spaces, functional completion and differential problems, Conference on Partial Differential Equations, *University of Kansas*, 1954, pp. 59-75.

[15 *b*] S. L. Soboleff, Sur un théorème de l'analyse fonctionnelle, *C. R. Ac. Sci. U.R.S.S.*, vol. 29, 1938, pp. 5-9.

[16] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge, The University Press, 1922.

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
11, (1961), 477-492.

HYPOELLIPTIC DIFFERENTIAL OPERATORS [1]

par Lars HÖRMANDER (Princeton)

1. Introduction.

A differential operator $P(x, D)$ with coefficients in C^∞ is called *hypoelliptic* if the equation

$$P(x, D)u = f \tag{1.1}$$

only has solutions $u \in C^\infty$ when $f \in C^\infty$. (For the notations see section 2.) When the coefficients are constant, a complete algebraic characterization of hypoelliptic operators was given in [1]. For variable coefficients a sufficient condition for hypoellipticity has been given by several authors (see [2], [3], [4], [6]), namely that the operators with constant coefficients $P(x, D)$ obtained by giving x fixed values shall be hypoelliptic and equally strong in the sense defined in [1]. In fact, the latter condition enables one to carry over most results known in the case of constant coefficients at least locally by means of a perturbation argument (see [4]). A weaker sufficient condition has also been given by Trèves [6], but it is extremely implicit and difficult to verify for a given operator. His proofs depend on the construction of a parametrix for the adjoint operator by the method of successive approximations, in an abstract and very intricate form. We shall here use the same idea but in a technically different and really straight-forward

[1] This work was sponsored by the Office of Ordnance Research, U. S. Army.

way. This will yield sufficient conditions for hypoellipticity which are weaker than those of [2], [3], [4] and are satisfied by the only other example of a hypoelliptic operator given in [6].

2. The plan for constructing a parametrix.

In this section we shall only give a formal outline of the construction of a parametrix which will be carried out in section 4. Accordingly, we shall postpone discussing the convergence of the integrals occurring here.

We first introduce some notations. Differential operators will be written in the form

$$P(x, D) = \Sigma a_\alpha(x) D^\alpha$$

where $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, called a multi-index, is a sequence of integers between 1 and the dimension n of the space, and

$$D^\alpha = (-i\partial/\partial x_{\alpha_1}) \ldots (-i\partial/\partial x_{\alpha_k}).$$

The empty multi-index will be denoted by 0; we set $D^0 = 1$. The length k of the multi-index is denoted by $|\alpha|$. If

$$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$$

is a real vector, we write

$$P(x, \xi) = \Sigma a_\alpha(x) \xi_\alpha$$

where $\xi_\alpha = \xi_{\alpha_1} \ldots \xi_{\alpha_k}$. The derivatives of $P(x, \xi)$ with respect to ξ are sometimes denoted by $P^{(\alpha)}(x, \xi)$;

$$P^{(\alpha)}(x, \xi) = \partial^{|\alpha|} P(x, \xi)/\partial\xi_{\alpha_1} \ldots \partial\xi_{\alpha_k}.$$

Derivatives with respect to ξ or x will be denoted by D_ξ^α or D_x^α. Finally, we shall use the notation

$$\tilde{P}(x, \xi) = (\Sigma |P^{(\alpha)}(x, \xi)|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

A fundamental solution $E(x, y)$ of a differential operator $P(x, D)$ is a kernel (in fact a distribution) such that

$$\varphi(x) = P(x, D) \int E(x, y)\varphi(y)\, dy \tag{2. 1}$$

if φ has compact support. In the case where the coefficients

are constant, it is convenient to construct a fundamental solution by means of the Fourier transformation, that is, to set

$$\int E(x, y)\varphi(y)\,dy = (2\pi)^{-n}\int e^{i\langle x,\xi\rangle}P(\xi)^{-1}\hat{\varphi}(\xi)\,d\xi,$$

where

$$(2.2)\qquad \hat{\varphi}(\xi) = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle}\varphi(x)\,dx$$

is the Fourier transform of φ. We shall imitate this in the case of variable coefficients, thus try to find a kernel K such that

$$(2.3)\qquad \varphi(x) = P(x, D)(2\pi)^{-n}\int e^{i\langle x,\xi\rangle}K(x, \xi)\hat{\varphi}(\xi)\,d\xi$$

when φ has compact support. Operating under the integral sign we find that this is equivalent to

$$(2.4)\qquad \varphi(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{i\langle x,\xi\rangle}P(x, D_x+\xi)\,K(x, \xi)\,\hat{\varphi}(\xi)\,d\xi.$$

Thus we have to find a kernel K such that

$$P(x, D_x+\xi)\,K(x, \xi) = 1,$$

or, which is equivalent in view of Taylor's formula,

$$(2.5)\qquad P(x, \xi)\,K(x, \xi) + \sum_{\alpha\neq 0} P^{(\alpha)}(x, \xi)\,D_x^{\alpha}K(x, \xi)/|\alpha|! = 1.$$

The equation (2.5) can be solved approximately in the following way. First we neglect the sum since it would have been absent if the coefficients were constant. Thus we define a kernel K_0 by the equation

$$(2.6)\qquad P(x, \xi)\,K_0(x, \xi) = 1.$$

To compensate the error committed in solving (2.5) in this way we then define successively kernels K_j by means of the recursion formula

$$(2.7)$$
$$P(x, \xi)\,K_{j+1}(x, \xi) + \sum_{\alpha\neq 0} P^{(\alpha)}(x, \xi)\,D_x^{\alpha}K_j(x, \xi)/|\alpha|! = 0, \quad j \geq 0.$$

Adding the equations (2.7) and (2.6) we obtain

$$(2.8)\qquad P(x, D_x+\xi)\,(K_0+\cdots+K_j) + P(x, \xi)\,K_{j+1} = 1.$$

Hence, formally, we obtain instead of (2. 3)

(2. 9)
$$\varphi(x) = P(x, D)(2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi\rangle}(K_0(x, \xi) + \cdots + K_j(x, \xi))\hat{\varphi}(\xi)\, d\xi + (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi\rangle} P(x, \xi) K_{j+1}(x, \xi)\, \hat{\varphi}(\xi)\, d\xi.$$

If the polynomial $P(x, \xi)$ has real zeros, the kernels K_j become singular. However, if the zeros are all contained in a fixed compact set, as will be the case here, it is easy to avoid the singularities in the following way. Choose a function $\psi_0 \in C_0^\infty$ which is equal to 1 in a neighborhood of the zeros of $P(x, \xi)$ (as a function of ξ). Set $\psi_1 = 1 - \psi_0$, so that $\psi_1 = 1$ outside a compact set. Since

$$1 = \psi_1 + \psi_0 = P(x, D_x + \xi)(K_0 + \cdots + K_j)\psi_1 + P(x, \xi) K_{j+1}\psi_1 + \psi_0,$$

we may then replace (2. 9) by

(2. 10)
$$\varphi(x) = P(x, D)(2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi\rangle}(K_0(x, \xi) + \cdots + K_j(x, \xi))\psi_1(\xi)\hat{\varphi}(\xi)\, d\xi + (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi\rangle}(P(x, \xi) K_{j+1}(x, \xi)\psi_1(\xi) + \psi_0(\xi))\hat{\varphi}(\xi)\, d\xi.$$

In the next section we shall introduce certain conditions which ensure that the kernel $K_{j+1}(x, \xi)$ decreases very rapidly as $\xi \to \infty$ when j is large. The last term in (2. 10) will then be an integral operator with a very smooth kernel when expressed in terms of φ instead of $\hat{\varphi}$. The first term on the right hand side of (2. 10), on the other hand, will be easy to study with the same methods that are used in the case of constant coefficients.

3. The condition HE.

The recursion formula (2. 7) indicates that to be sure that K_{j+1} decreases faster than K_j at infinity, we need to know that differentiation of $P(x, \xi)$ with respect to ξ will decrease the growth at infinity more than the corresponding differentiation with respect to x will increase the growth. This leads to the condition posed in the following definition.

Definition. — *The operator* $P(x, D)$ *will be said to satisfy the condition* HE *in* Ω *if* $P(x, D)$ *is not identically* 0 *in any component of* Ω *and*

a) *The coefficients are in* $C^\infty(\Omega)$;

b) *There are functions* $M_j(x, \xi)$ *defined in* $\Omega \times R^n$ *such that for all* α *and* β

$$(3.1)\quad |D_\xi^\alpha D_x^\beta P(x,\xi)| \leq C_{\beta,x}(1+|\xi|)^{-d|\alpha|} M^{\beta-\alpha}(x,\xi)\tilde{P}(x,\xi), \xi \in R^n,$$
$$(3.2)\quad 1 \leq M_j(x, \xi) \leq C_x(1 + |\xi|)^{1-d}.$$

Here d *is a positive constant,* $C_{\beta,x}$ *and* C_x *are bounded when* x *varies in compact subsets of* Ω, *and we have used the notation*

$$M^{\beta-\alpha} = M_{\beta_1} M_{\beta_2} \ldots M_{\alpha_1}^{-1} M_{\alpha_2}^{-1} \ldots$$

Since this condition, although very convenient in the proofs, may seem involved and difficult to check, we also give a simpler but more restrictive condition.

THEOREM 3. 1. — *Let the coefficients of* $P(x, D)$ *be in* $C^\infty(\Omega)$ *and set*

$$M(\xi) = \sup_{x, y \in \Omega} \tilde{P}(y, \xi)/\tilde{P}(x, \xi).$$

Assume that the coefficients only depend on $x_1, \ldots, x_k$ *and set* $|\alpha|_k =$ *the number of indices* $\leq k$ *in* α. *If there are positive constants* C *and* d *such that*

$$(3.3)\quad |P^{(\alpha)}(y, \xi)|/\tilde{P}(y, \xi) \leq C(1 + |\xi|)^{-d|\alpha|} M(\xi)^{-|\alpha|_k}, \quad (y, \xi) \in \Omega \times R^n,$$
$$(3.4)\quad M(\xi) \leq C(1 + |\xi|)^{1-d},$$

it then follows that $P(x, D)$ *satisfies the condition* HE.

PROOF. — Set $M_j(\xi) = M(\xi)$ when $j \leq k$ and $M_j(\xi) = 1$ when $j > k$. If $\beta = 0$, the inequality (3. 1) then follows from (3. 3), and (3. 1) is trivial if $|\beta|_k = 0$ but $|\beta| \neq 0$, the left hand side being 0. Hence we may assume that $|\beta|_k \neq 0$.

It is clear that (3. 4) implies that the degree of $P(x, \xi)$ in ξ is bounded when $x \in \Omega$. Hence there exists a maximal set of points x_j such that the polynomials $P_j(\xi) = P(x_j, \xi)$ are linearly independent. We can thus write

$$P(x, \xi) = \Sigma c_j(x)\ P_j(\xi)$$

with uniquely determined coefficients $c_j \in C^\infty(\Omega)$. From the formula

$$D_x^\beta P^{(\alpha)}(x, \xi) = \Sigma D_x^\beta c_j(x) P_j^{(\alpha)}(\xi),$$

we obtain by using (3. 3) and the definition of $M(\xi)$, with y replaced by x_j, that

$$|D_x^\beta P^{(\alpha)}(x, \xi)| \leqq C_{\beta,x}(1+|\xi|)^{-d|\alpha|}M(\xi)^{1-|\alpha|_k}\tilde{P}(x, \xi).$$

When $|\beta|_k \neq 0$, this implies (3. 1). The proof is complete.

Remark. — The sufficient condition for hypoellipticity given in [2], [3] and [4] is that M shall be bounded and (3. 3) valid with the factor $M^{-|\alpha|_k}$ omitted. Hence Theorem 5. 1 below will contain the results of those papers. In section 6 we shall also give some other examples, in particular one studied in [6].

Before proceeding we shall write (3. 1) in a more useful form. First note that taking $\beta=0$ in (3. 1), squaring and adding over all $\alpha \neq 0$, we obtain, since $M_j(x, \xi) \geqq 1$,

$$\tilde{P}(x, \xi)^2 \leqq |P(x, \xi)|^2 + C_x\tilde{P}(x, \xi)^2(1+|\xi|)^{-2d}.$$

Here C_x is bounded on compact subsets of Ω. (From now on this will be the case whenever we indicate that a constant depends on x. The same notation will be used for different constants.) Hence there is a constant A_x such that

$$\tilde{P}(x, \xi) \leqq 2|P(x, \xi)|, \quad |\xi| \geqq A_x, \tag{3. 5}$$

so we may replace (3. 1) by

(3. 1)′
$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta P(x, \xi)| \leqq C_{\beta,x}(1+|\xi|)^{-d|\alpha|}M^{\beta-\alpha}(x, \xi)|P(x, \xi)|, \quad |\xi| \geqq A_x.$$

We note that if follows from (3. 1)′ that $P(x, \xi) \neq 0$ when $|\xi| \geqq A_x$. For if $P(x_0, \xi_0) = 0$ and $|\xi_0| \geqq A_{x_0}$, it follows from (3. 1)′ that $D_\xi^\alpha P(x_0, \xi_0) = 0$ for all α, hence $P(x_0, \xi) = 0$ for all ξ. Since (3. 1)′ with $\alpha = 0$ and $|\beta| = 1$ shows that

$$|\mathrm{grad}_x P(x, \xi)| \leqq C_{x,\xi}|P(x, \xi)| \quad \text{when} \quad |\xi| \geqq A_x,$$

it would follow that $P(x, \xi) = 0$ for all ξ and all x in the same component of Ω as x_0, which contradicts the definition. We can thus define the kernels $K_j(x, \xi)$ by means of (2. 6) and (2. 7) when $|\xi| \geqq A_x$.

Theorem 3. 2. — *If* $P(x, D)$ *satsifies the condition* HE *and the kernels* K_j *are defined by* (2. 6) *and* (2. 7), *we have the estimates*

(3. 6)
$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta K_j(x, \xi)| \leqq C_{\alpha,\beta,x,j}(1+|\xi|)^{-d(|\alpha|+j)}M^{\beta-\alpha}(x, \xi)/|P(x, \xi)|, \; |\xi| \geqq A_x.$$

REMARK. — Note that for $j = 0$ this differs from (3. 1)′ only in the fact that $P(x, \xi)$ has been replaced by $1/P(x, \xi) = K_0(x, \xi)$. It is thus clear that (3. 6) for $j = 0$ implies (3. 1)′ so that (3. 6) is in fact equivalent to the assumptions.

PROOF OF THEOREM 3. 2. — When $j = |\alpha| = |\beta| = 0$, the estimate (3. 6) is trivial. We shall prove it in general by induction. With the convention $K_{-1} = 0$, it follows from (2. 6) and (2. 7) by application of the differential operator $D_\xi^\alpha D_x^\beta$ that

$$(3.7)\quad P(x,\xi) D_\xi^\alpha D_x^\beta K_j(x,\xi) = -\Sigma' (D_\xi^{\alpha'} D_x^{\beta'} P(x,\xi))(D_\xi^{\alpha''} D_x^{\beta''} K_j(x,\xi)) - \Sigma \sum_{|\gamma| \neq 0} i^{|\gamma|} (D_\xi^{\alpha'+\gamma} D_x^{\beta'} P(x,\xi))(D_\xi^{\alpha''} D_x^{\beta''+\gamma} K_{j-1}(x,\xi))/|\gamma|\,!$$

if $|\alpha| + |\beta| + j \neq 0$. The sums are extended over all α', α'', β', β'' with $\alpha' + \alpha'' = \alpha$ and $\beta' + \beta'' = \beta$, except in the sum denoted by Σ', where the term $\alpha' = \beta' = 0$ shall be omitted.

Assume that (3. 6) is already proved when j is replaced by a smaller number or the multi-indices α, β are replaced by multi-indices of smaller total length. In view of (3. 1)′ we can then estimate the right hand side of (3. 7) by a constant times

$$(1 + |\xi|)^{-d(|\alpha|+j)} M^{\beta-\alpha}(x, \xi) + \sum_{|\gamma| \neq 0} (1 + |\xi|)^{-d(|\alpha|+|\gamma|+j-1)} M^{\beta-\alpha}(x, \xi).$$

Since $|\gamma| - 1 \geq 0$ in the last sum, this proves (3. 6).

Two corollaries of Theorem 3. 2 will be useful in the next section.

COROLLARY 3. 1. — *If* $P(x, D)$ *satisfies the condition* HE, *we have*

$$(3.8)\quad |D_x^\beta(P(x,\xi)K_j(x,\xi))| \leq C_{\beta,x,j}(1 + |\xi|)^{|\beta|-dj},\ |\xi| \geq A_x.$$

PROOF. — The inequality follows immediately from Leibniz' formula, (3. 1)′ and (3. 6) if we estimate $M^\beta(x, \xi)$ by $C_x(1 + |\xi|)^{|\beta|}$, which is possible in view of (3. 2).

COROLLARY 3. 2. — *If* $P(x, D)$ *satisfies the condition* HE *and we denote by* m_x *the order of* $P(x, D)$ *we have*

$$(3.9)\quad |D_\xi^\alpha D_x^\beta K_j(x,\xi)| \leq C_{\beta,\alpha,x,j}(1 + |\xi|)^{m_x+|\beta|-d(j+|\alpha|+|\beta|)},\quad |\xi| \geq A_x.$$

Proof. — In (3. 6) we estimate $M^{\beta-\alpha}$ by $(C_x(1+|\xi|)^{1-d})^{|\beta|}$, which is possible in view of (3. 2). It then only remains to prove that

$$1/|P(x, \xi)| \leqq C_x(1+|\xi|)^{m_x}, \quad |\xi| \geqq A_x. \tag{3. 10}$$

By forming the Taylor expansion of $P(x, \xi)$ at ξ we find that

$$\tilde{P}(x, 0) \leqq C_{m_x}(1+|\xi|)^{m_x}\tilde{P}(x, \xi),$$

hence

$$1/\tilde{P}(x, \xi) \leqq C_{m_x}(1+|\xi|)^{m_x}/\tilde{P}(x, 0). \tag{3. 11}$$

As proved after (3. 1)′ the polynomial $P(x, \xi)$ is not identically 0 for any x, hence $\tilde{P}(x, 0)$ is continuous and $\neq 0$ everywhere. The inequality (3. 10) is therefore a consequence of (3. 11) and (3. 5).

For reference in section 5 we end this section by proving

Theorem 3. 3. — *If* $P(x, D)$ *satisfies the condition* HE, *it follows that the adjoint operator* $P^*(x, D)$ *also satisfies the condition* HE.

Proof. — First recall that the adjoint is defined by the identity

$$\int (P(x, D)u)v\,dx = \int uP^*(x, D)v\,dx$$

when u and v are in $C_0^\infty(\Omega)$. This means that if we write

$$P(x, D) = \Sigma a_j(x)P_j(D)$$

where $P_j(D)$ are differential operators with constant coefficient (for example the operators D^α indexed as a sequence), then

$$P^*(x, D)v = \Sigma P_j(-D)(a_jv) = \Sigma((-D_x)^\alpha a_j)(P_j^{(\alpha)}(-D)v)/|\alpha|!$$

Thus

$$P^*(x, -\xi) = \Sigma(-1)^{|\alpha|}D_x^\alpha P^{(\alpha)}(x, \xi)/|\alpha|! \tag{3. 12}$$

which gives in view of (3. 1)′

$$|P^*(x, -\xi) - P(x, \xi)| \leqq C_x(1+|\xi|)^{-d}|P(x, \xi)|, \quad |\xi| \geqq A_x. \tag{3. 13}$$

Hence we can find B_x so that

$$|P(x, \xi)| \leqq 2|P^*(x, -\xi)| \quad \text{when} \quad |\xi| \geqq B_x. \tag{3. 14}$$

From (3. 12) and (3. 1)′ we now immediately obtain using (3. 14) that

$$(3.\ 15)\quad |D_\xi^\alpha D_x^\beta P^*(x, -\xi)| \leq C_{\beta,x}(1+|\xi|)^{-d|\alpha|}M^{\beta-\alpha}(x, \xi)|P^*(x, -\xi)|, \ |\xi| \geq B_x,$$

which proves the theorem.

4. Regularity properties of the parametrix.

We assume once for all in this section that $P(x, D)$ satisfies the condition HE. By Ω' we denote a relatively compact open subset of Ω and by A' an upper bound for A_x when $x \in \Omega'$. We shall study the integral operators in (2. 10) for $x \in \Omega'$, taking $\psi_0(\xi) = 1$ when $|\xi| \leq A'$. Note that if $x \in \Omega'$ it follows from (3. 9) that all integrals in (2. 10) converge, hence that (2. 10) is valid.

THEOREM 4. 1. — *The integral*

(4. 1)

$$F_j(x, y) = (2\pi)^{-n}\int e^{i\langle x-y, \xi\rangle}(\psi_1(\xi)P(x, \xi)K_{j+1}(x, \xi) + \psi_0(\xi))\, d\xi, \quad x \in \Omega',$$

converges absolutely and F_j *is in* $C^k(\Omega' \times R^n)$ *if* $d(j+1) > (n+k)$. *If* $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$, *we then have*

$$(4.\ 2)\quad \int F_j(x, y)\varphi(y)\, dy = (2\pi)^{-n}\int e^{i\langle x, \xi\rangle}(P(x, \xi)K_{j+1}(x, \xi)\psi_1(\xi) + \psi_0(\xi))\hat{\varphi}(\xi)\, d\xi.$$

PROOF. — From Corollary 3. 1 it follows that when $|\beta| \leq k$ and $x \in \Omega'$, $|\xi| \geq A'$,

$$(4.\ 3)\quad (1+|\xi|)^{k-|\beta|}|D_x^\beta(P(x, \xi)K_{j+1}(x, \xi))| \leq C_{k,j}(1+|\xi|)^{k-d(j+1)}.$$

Since the exponent $k - d(j+1)$ is $< -n$ by assumption, the inequality (4. 3) shows that the integral (4. 1) and the integrals obtained by at most k differentiations under the integral sign are absolutely and uniformly convergent. This proves the theorem since $\int f\, \hat{g}\, dx = \int \hat{f}\, g\, d\xi$ for arbitrary integrable functions f and g.

In general, the other terms in the right hand side of (2. 10)

cannot be written as integral operators on φ with functions as kernels. However, we can introduce distribution kernels in the following way. If F is in $C_0^\infty(\Omega' \times R^n)$, we set

$$\hat{F}(x, \xi) = \int e^{-i\langle y, \xi\rangle} F(x, y)\, dy$$

and write

$$E_j(F) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi\rangle} K_j(x, \xi)\psi_1(\xi)\hat{F}(x, \xi)\, d\xi\, dx. \tag{4.4}$$

Since K_j is bounded by a power of $|\xi|$ at infinity (Corollary 3. 2), it is clear that this does define a distribution in $\Omega' \times R^n$.

THEOREM 4. 2. — *The distribution* E_j *in* $\Omega' \times R^n$ *defined by* (4. 4) *is an infinitely differentiable function outside the diagonal. If* $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$ *and* x *is in* Ω' *but not in the support of* φ, *we have*

$$\int E_j(x, y)\varphi(y)\, dy = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi\rangle} K_j(x, \xi)\psi_1(\xi)\hat{\varphi}(\xi)\, d\xi. \tag{4.5}$$

PROOF. — To prove that E_j is smooth outside the diagonal we shall study the product $(x - y)_\alpha E_j$. Since

$$e^{i\langle x, \xi\rangle} \int e^{-i\langle y, \xi\rangle} (x - y)_\alpha\, F(x, y)\, dy = D_\xi^\alpha(e^{i\langle x, \xi\rangle}\hat{F}(x, \xi)),$$

we have

$$((x - y)_\alpha E_j)(F) = E_j((x - y)_\alpha F(x, y)) =$$
$$= (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi\rangle} \hat{F}(x, \xi)(- D_\xi)^\alpha (K_j(x, \xi)\psi_1(\xi))\, d\xi\, dx.$$

If we choose α so large that

$$d(j + |\alpha|) > n + m, \quad m = \sup_{x \in \Omega'} m_x,$$

it follows from (3. 9) that $(- D_\xi)^\alpha (K_j(x, \xi)\psi_1(\xi))$ is integrable, uniformly in x. Hence we obtain

$$((x - y)_\alpha E_j)(F) =$$
$$\iint F(x, y)\, dx\, dy\, (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x - y, \xi\rangle} (- D_\xi)^\alpha (K_j(x, \xi)\, \psi_1(\xi))\, d\xi.$$

This means that $(x - y)_\alpha E_j$ is equal to a continuous function

$$(x - y)_\alpha E_j = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x - y, \xi\rangle} (- D_\xi)^\alpha (K_j(x, \xi)\, \psi_1(\xi))\, d\xi. \tag{4.6}$$

If the inequality

$$d(j + |\alpha|) > n + m + |\beta| + |\gamma| \tag{4.7}$$

is valid, we still obtain a uniformly convergent integral if we apply the differential operator $D_x^\beta D_y^\gamma$ to the integral (4. 6), for in view of (3. 9) the integrand obtained after differentiating will have a bound of the form

$$C(1 + |\xi|)^{m+|\beta|+|\gamma|-d(j+|\alpha|)}$$

which is integrable in view of (4. 7). Hence E_j is infinitely differentiable outside the diagonal.

To prove the last statement we observe that if $g \in C_0^\infty(\Omega')$ has a support disjoint from that of φ, the definition (4. 4) of E_j applied to $F(x, y) = g(x)\varphi(y)$ shows that

$$\iint E_j(x, y)\, g(x)\, \varphi(y)\, dx\, dy = (2\pi)^{-n} \int g(x)\, dx \int e^{i\langle x, \xi\rangle} K_j(x, \xi)\, \psi_1(\xi)\, \hat{\varphi}(\xi)\, d\xi$$

since $g(x)\varphi(y)$ vanishes in a neighborhood of the diagonal. This implies (4. 5). The proof is complete.

If $g \in C_0^\infty(\Omega')$ and $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$ we shall, following Schwartz [5], denote the function $(x, y) \to g(x)\varphi(y)$ defined in $\Omega' \times R^n$ by $g \times \varphi$. We also recall that a distribution E in $\Omega' \times R^n$ is called *regular* in x if for every *fixed* $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$ there is a function $E\varphi \in C^\infty(\Omega')$ such that

$$(4.\ 8) \qquad E(g \times \varphi) = \int g E\varphi\, dx, \quad g \in C_0^\infty(\Omega)';$$

similarly E is called regular in y if to every *fixed* $g \in C_0^\infty(\Omega')$ there is a function $E^*g \in C^\infty(R^n)$ such that

$$(4.\ 9) \qquad E(g \times \varphi) = \int (E^*g)\, \varphi\, dy, \quad \varphi \in C_0^\infty(R^n).$$

(Obviously $E\varphi$ and E^*g are uniquely determined by these identities.)

THEOREM 4. 3. — *The distribution* E_j *in* $\Omega' \times R^n$ *defined by* (4. 4) *is regular both in* x *and in* y.

PROOF. — To prove the regularity in x, which we do not strictly need in the next section, we only have to note that the function

$$(4.\ 10) \quad (E_j\varphi)(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi\rangle} K_j(x, \xi)\psi_1(\xi)\hat{\varphi}(\xi)\, d\xi$$

satisfies (4. 8) and is in $C^\infty(\Omega')$ if $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$ In fact, since $\hat{\varphi}$

tends to 0 at infinity faster than $(1+|\xi|)^{-N}$ for every N, it follows from (3. 9) that the integral (4. 10) is absolutely and uniformly convergent and remains so after any number of differentiations with respect to x.

The regularity with respect to y is less trivial. Writing

$$(4.\ 11) \qquad G(\xi) = (2\pi)^{-n}\int e^{i\langle x,\, \xi\rangle} K_j(x, \xi)\psi_1(\xi) g(x)\, dx,$$

we have

$$E_j(g \times \varphi) = \int G(\xi)\hat{\varphi}(\xi)\, d\xi = \int \hat{G}(x)\varphi(x)\, dx$$

provided that G is integrable. We shall prove this and, moreover, that $G(\xi)(1+|\xi|)^N$ is bounded for every N. This will show that $\hat{G} \in C^\infty(R^n)$ and since $E_j^* g = \hat{G}$, the proof of the theorem will then be complete.

To estimate G we multiply (4. 11) by $|\xi|^{2k}$ and integrate by parts. If we denote the Laplace operator by Δ, this gives

$$|\xi|^{2k}G(\xi) = (2\pi)^{-n}(-1)^k \int e^{i\langle x,\, \xi\rangle}\Delta_x^k(K_j(x, \xi)g(x))\psi_1(\xi)\, dx.$$

Now g is in $C_0^\infty(\Omega')$, so we obtain by using the estimate (3. 9) that

$$|\xi|^{2k}|G(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{m+2k(1-d)-dj}.$$

Since $G = 0$ in a neighborhood of 0, this gives with another constant

$$|G(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{m-d(j+2k)}.$$

This completes the proof of the theorem, for k is an arbitrary positive integer.

Remark. — The proof of this theorem is essentially the same as that of proposition 1. 18 in [6].

5. Hypoellipticity of operators satisfying the condition HE.

It is very well known how regularity theorems can be proved when one has a parametrix with the properties obtained in the preceding paragraph. However, we shall supply the proof here for the convenience of the reader. (See also Schwartz [5].)

THEOREM 5. 1. — *Every differential operator satisfying the condition* HE *in* Ω *is hypoelliptic in* Ω.

PROOF. — Denote the adjoint operator by $P(x, D)$. According to Theorem 3. 3 the operator $P(x, D)$ also satisfies the condition HE. We have to prove that if $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ and $P^*(x, D)u = f$, then $u \in C^\infty(\omega)$ if ω is an open subset of Ω such that $f \in C^\infty(\omega)$. There is no restriction in assuming that ω is relatively compact, and multipliyng u by a function in $C_0^\infty(\Omega)$ which equals 1 in ω we may then reduce ourselves to the case where $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$. We choose a relatively compact subdomain Ω' of Ω such that the support of u is contained in Ω'. Replacing ω by a smaller domain we may finally write $f = g + h$ where $g \in C_0^\infty(\Omega')$ and h vanishes in ω.

Summing up, we have to prove that if $u \in \mathcal{E}'(\Omega')$,

$$P^*(x, D)u = g + h,$$

where $g \in C_0^\infty(\Omega')$ and h vanishes in ω, then $u \in C^m(\omega)$ for an arbitrary integer m.

With $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$ we now apply (2. 10) in combination with (4. 2) and (4. 10). This gives

$$\varphi(x) = P(x, D)\sum_0^j (E_k\varphi)(x) + \int F_j(x, y)\,\varphi(y)\,dy$$

Let μ be the order of the distribution u and choose j so large that $F_j \in C^{\mu+m}(\Omega' \times R^n)$. Since u has compact support we then obtain

$$(5.\ 1)\quad u(\varphi) = (P^*u)\left(\sum_0^j E_k\varphi\right) + \int (u(F_j(\cdot, y))\varphi(y)\,dy.$$

Here we have used the properties of the direct product of distributions (Schwartz [5]); the notation $u(F_j(\cdot, y))$ means that the distribution u operates on the variable indicated by a dot. Since F_j is in $C^{m+\mu}$, this a function in $C^m(\omega)$. The other terms in (5. 1) we rewrite in the following way

$$\begin{aligned}(P^*u)(E_k\varphi) &= (g + h)(E_k\varphi) = E_k(g \times \varphi) + h(E_k\varphi)\\ &= \int (E_k^*g)\varphi\,dy + \int h(E_k(\cdot, y))\varphi(y)\,dy.\end{aligned}$$

The last computation follows again from the fact that

$$(E_k\varphi)(x) = \int E_k(x, y)\varphi(y)\,dy, \quad x \notin \omega,$$

in view of Theorem 4. 2, by using the properties of the direct product and the fact that the support of h belongs to $C\omega$. Hence u is in ω equal to the function

$$y \to \sum_0^j (E^* g)(y) + \sum_0^j h(E_k(.,\ y)) + u(F_j(.,\ y)).$$

Since all terms except the last are in $C^\infty(\omega)$ and the last is in $C^m(\omega)$, this completes the proof.

6. Examples.

We first give an example which proves that an operator which is elliptic except at a point where the principal part degenerates may still be hypoelliptic if the principal part vanishes so rapidly that the strength of the operator does not change too fast.

EXAMPLE 1. — *The operator corresponding to*

$$P(x, \xi) = 1 + |x|^{2\nu}|\xi|^{2\mu} \tag{6. 1}$$

satisfies the condition HE, *hence is hypoelliptic, if* $\nu > \mu$.

PROOF. — We shall choose for $j = 1, \ldots, n$

$$M_j(x,\ \xi) = M(x,\ \xi) = ((1 + \rho^{2\mu})/(1 + r^{2\nu}\rho^{2\mu}))^{1/2\nu}$$

where $\rho = |\xi|$ and $r = |x|$. We may of course assume that $r < 1$; the inequality (3. 2) is then fulfilled since $\nu > \mu$ and

$$1 \leq M(x, \xi) \leq (1 + \rho^{2\mu})^{1/2\nu}.$$

For $0 \leq j \leq 2\nu$ and $0 \leq k \leq 2\mu$ we shall prove that

$$r^{2\nu-j}\rho^{2\mu-k}M^{k-j}(1 + \rho)^{dk}/(1 + r^{2\nu}\rho^{2\mu}) \tag{6. 2}$$

is bounded if $0 < d \leq 1 - \mu/\nu$. That (6. 2) is bounded for $0 < \rho < 1$ is trivial. If the number c defined by

$$\mu c = 2\mu - k + (k - j)\mu/\nu + dk$$

is negative, the boundedness of (6. 2) is trivial also for $\rho > 1$ since the total order in ρ of the factors in (6. 2) which do not contain r is μc. On the other hand, if $c \geq 0$ we can estimate (6. 2) for $\rho > 1$ by a constant times

$$r^{2\nu-j-\nu c}(r^\nu\rho^\mu)^c/(1 + r^{2\nu}\rho^{2\mu})^{1+(k-j)/2\nu}.$$

Since $2\nu - j - \nu c = k\nu(1 - d - \mu/\nu)/\mu \geqq 0$ and

$$2 + (k - j)/\nu - c = k(1 - d)/\mu \geqslant 0,$$

this proves the boundedness.

We shall also give two examples of operators in two variables, related to the example of Trèves [6].

Example 2. — *The operator corresponding to*

$$\text{(6. 3)} \qquad P(x, \xi) = \xi_1^{2m} + \xi_2^{2n} + ic(x)\xi_1^a\xi_2^b + 1$$

satisfies the condition HE, *hence is hypoelliptic, if* $c \in C^\infty$ *is real valued and*

$$\text{(6. 4)} \quad (a - 1)/2m + b/2n < 1, \qquad a/2m + (b - 1)/2n < 1.$$

Note that (6. 4) means that the first order derivatives of the polynomial $P_2(\xi) = \xi_1^a\xi_2^b$ shall be strictly weaker than $P_1(\xi) = \xi_1^{2m} + \xi_2^{2n} + 1$. The operator is of constant strength if, and for general c only if, $a/2m + b/2n \leqq 1$. The example then gives nothing new.

The example studied by Trèves [6] is of the form (6. 3) with $m = 1$, $n = 2$, $a = 1$, $b = 3$ and c depending only on x_1. The inequalities (6. 4) are not satisfied in this example, so we give another containing the example of [6] where we use in an essential way that c only depends on x_1.

Example 3. — *The operator given by* (6. 3) *satisfies* HE, *hence is hypoelliptic, if* $c \in C^\infty$ *is a real valued function of* x_1 *only, and*

$$\text{(6. 5)} \quad (a - 1)/2m + b/2n < 1, \qquad 0 < a < 2m.$$

We leave it to the reader to verify that the hypotheses of Theorem 3. 1 are fulfilled in examples 2 and 3.

REFERENCES

[1] L. Hörmander, On the theory of general partial differential operators. *Acta Math.*, 94, 1955, pp. 161-248.
[2] L. Hörmander, On interior regularity of the solutions of partial differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, 11, 1958, pp. 197-218.
[3] B. Malgrange, Sur une classe d'opérateurs différentiels hypoelliptiques, *Bull. Soc. Math. France*, 85, 1957, pp. 283-306.
[4] J. Peetre, Théorèmes de régularité pour quelques classes d'opérateurs différentiels, *Thesis*, Lund, 1959.
[5] L. Schwartz, Théorie des distributions, I-II, Paris, 1950-1951.
[6] F. Treves, Opérateurs différentiels hypoelliptiques, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 9, 1959, pp. 1-73.

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
11 (1961), 493-514.

VARIATIONS OF COMPLEX STRUCTURES ON AN OPEN RIEMANN SURFACE

by **Mudumbai S. NARASIMHAN** (Bombay)

---

1. Introduction.

The purpose of this paper is to study the local properties of variations of complex structures on a relatively compact subdomain of an open Riemann surface.

Let M be an open Riemann surface and M_1 a relatively compact subdomain of M. Let $\mathcal{S}(t)$ be a family of complex structures on M (or on a neighbourhood of M_1) which depends holomorphically on t, t being in a neighbourhood U_1 of t_0 in $\mathbf{C}^m$. We suppose that $\mathcal{S}(t_0)$ is identical with the given structure on M. Consider the family of complex structures $\mathcal{S}(t, M_1)$ induced on M_1 by $\mathcal{S}(t)$. The family $\mathcal{S}(t, M_1)$ defines a complex analytic structure on $M_1 \times U_1$; we denote by $\mathcal{S}(M_1 \times U_1)$ the complex analytic manifold (or structure) thus defined. The projection $\pi_1 : M_1 \times U_1 \to U_1$ defines a family of deformations of complex structures in the sense of Kodaira-Spencer.

We first prove that for every sufficiently small Stein neighbourhood U of t_0, $\mathcal{S}(M_1 \times U)$ is a Stein manifold (Theorem 1). We then show that the restriction of the family

$$\pi_1 : \mathcal{S}(M_1 \times U_1) \to U_1$$

to a sufficiently small neighbourhood U of t_0 is complex ana-

lytically homeomorphic to the family $\pi: \Omega \to \pi(\Omega) \subset C^m$, where Ω is an open Stein submanifold of the product complex manifold $M \times C^m$ and $\pi: M \times C^m \to C^m$ is the canonical projection of $M \times C^m$ onto C^m (Theorem 2). This result may be viewed as a sort of local triviality (« semi-triviality ») or a local imbedding theorem.

We prove also an analogue of Theorem 2 for differentiable variations of complex structures (Theorem 3).

The proofs use the theory of linear elliptic partial differential equations and some tools from functional analysis.

We now give a rough sketch of the proofs. We show that there exists a sufficiently small neighbourhood U_2 of t_0 such that any functions which is holomorphic (upto the boundary) on any fibre over a point of U_2 can be extended to a holomorphic function on the whole fibre system restricted to U_2. From this it follows easily that we can separate points on the fibre system by holomorphic functions and that there exist $(m+1)$ holomorphic functions which form a local coordinate system at a given point. To prove the holomorph-convexity, we first prove, by considering variations of complex structures on a disc, that the fibre system, restricted to a small Stein neighbourhood of t_0, is « locally holomorphically convex ». Then, by solving a problem analogous to the first Cousin problem with the help of currents, the holomorph-convexity is proved.

Once Theorem 1 is proved, Theorem B on Stein manifolds assures the vanishing of certain cohomology groups; we then prove theorem 2, adopting a method of Kodaira-Spencer.

Theorem 3 (differentiable case) is proved by solving the following problem : given Cousin data on $\mathcal{G}(t, \overline{M}_1)$ which depend differentiably on the parameter, to find solutions of the (first) Cousin problem such that the solutions also depend differentiably on the parameter. The proof is inspired by a proof (unpublished) by L. Schwartz of some results concerning Cousin problems on a compact Riemann surface with varying complex structures and by some considerations in Kodaira-Spencer [2].

The author is thankful to Professor L. Schwartz for suggesting the use of Lemma 1, which simplifies the earlier demonstration of the author using power series expansions.

2. Statement of the theorems.

Let M be an open Riemann surface. Let Θ be the holomorphic tangent bundle of M. Let $\mathcal{E}(\Theta \otimes \overline{\Theta}^*)$ denote the space of $C^\infty(0, 1)$ forms with coefficients in Θ, endowed with the natural topology [5]. If $\tilde{\mu} \in \mathcal{E}(\Theta \otimes \overline{\Theta}^*)$ and z a local coordinate system then $\tilde{\mu}$ is of the form $\mu(z)\, d\bar{z} \otimes \partial/\partial z$. If we define $|\tilde{\mu}| = |\mu|$ locally, then $|\tilde{\mu}|$ is intrinsically defined as a function on M. If $\tilde{\mu} \in \mathcal{E}(\Theta \otimes \overline{\Theta}^*)$ with $|\tilde{\mu}| < 1$ then locally the forms $dz + \mu(z)\, d\bar{z}$ define a (1, 0) form for a complex structure and thus $\tilde{\mu}$ defines a complex structure on M.

Let $t_0 \in \mathbf{C}^m$ and U_0 be an open set in $\mathbf{C}^m$ containing t_0. 't' will denote a point in U_0.

For our purposes a holomorphic family $\mathcal{S}(t)$ of complex structures on M will be, by definition, a holomorphic function $\tilde{\mu}(t)$ defined in U_0 with values in $\mathcal{E}(\Theta \otimes \overline{\Theta}^*)$ such that $|\tilde{\mu}(t)| < 1$ and $\tilde{\mu}(t_0) = 0$. We then have on $M \times U_0$ an almost complex structure defined locally by the forms $dz + \mu(t, z)\, d\bar{z}$, $dt^1, \ldots, dt^m$ where $t^1, \ldots, t^m$ are the coordinate function in $\mathbf{C}^m$. This almost complex structure is integrable since $\tilde{\mu}(z, t)$ is holomorphic in t. Hence we have a complex structure on $M \times U_0$ (see also proposition 1). We denote $M \times U_0$ endowed with this complex structure by $\mathcal{S}(M \times U_0)$. The projection $\pi_1 : S(M \times U_0) \to U_0$ is holomorphic and we have a holomorphic familly of deformations of complex structures in the sense of Kodaira-Spencer [2].

If M_1 is a subdomain of M and V a neighbourhood of t_0 in $\mathbf{C}^m$ with $V \subset U_0$, we denote the manifold $M_1 \times V$ with the complex structure induced from $\mathcal{S}(M \times U_0)$ by $\mathcal{S}(M_1 \times V)$. We denote by $\mathcal{S}(t)$ the complex analytic structure on M defined by $\tilde{\mu}(t)$.

We have

THEOREM 1. — *Let $\mathcal{S}$ be a holomorphic family of complex structures on an open Riemann surface* M. *Let* M_1 *be a relatively compact subdomain of* M. *Then there exists a neighbourhood* V *of* t_0 *such that for every Stein neighbourhood* U *of* t_0 *contained in* V, $\mathcal{S}(M_1 \times U)$ *is a Stein manifold.*

THEOREM 2. — *Let $\mathcal{S}$ be a holomorphic family of complex structures on an open Riemann surface* M *and* M_1 *a relatively compact subdomain of* M. *Then there exist a neighbourhood* U *of* t_0, *an open Stein submanifold* Ω *of the product manifold* $M \times \mathbf{C}^m$, *a complex analytic homeomorphism* Φ *of* $\mathcal{S}(M_1 \times U)$ *onto* Ω *and a complex analytic homeomorphism* φ *of* U *onto* $\pi(\Omega)$ *(*π *denoting the projection* $M \times \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^m$*) such that the following diagram is commutative:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(M_1 \times U) & \xrightarrow{\Phi} & \Omega \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ U & \xrightarrow{\varphi} & \pi(\Omega). \end{array}$$

REMARK. — In Theorems 1 and 2 and as well in Theorem 3, if the boundary of M_1 is smooth it is sufficient to assume that the variation is given only upto the boundary of M_1.

Let U_0 be an open subset in $\mathbf{R}^m$ and $t_0 \in U_0$. A differentiable family of complex structures we mean differentiable function $\tilde{\mu}(t)$ defined in U_0 with values in $\mathcal{E}(\Theta \otimes \overline{\Theta}^*)$ such that $|\tilde{\mu}(t)| < 1$ and $\tilde{\mu}(t_0) = 0$. (By differentiable we always mean « indefinitely differentiable ».) For a subdomain M_1 of M we denote by $\mathcal{S}(t, M_1)$, $t \in U_0$, the surface M_1 endowed with the complex structure defined by $\tilde{\mu}(t)$.

We have then

THEOREM 3. — *Let* $\mathcal{S}(t)$ *be a family of complex structures on* M *depending differentiably on* t, t *being in a neighbourhood of* t_0 *in* $\mathbf{R}^m$. *Let* M_1 *be a relatively compact subdomain of* M. *Then there exist a neighbourhood* U *of* t_0 *and a differentiable map* Φ *of* $M_1 \times U$ *into* M *which maps each fibre* $\mathcal{S}(t, M_1)$, $t \in U$, *biholomorphically into* M.

3. Some lemmas in functional analysis and potential theory.

Some of the lemmas stated in this section are more or less well-known. We state them here for convenience of reference.

We denote by U_0 an open set in $\mathbf{C}^m$ or $\mathbf{R}^m$ according as we consider holomorphic or differentiable variations. t_0 is a point of U_0.

Let E and F be two complete barrelled locally convex topological vector spaces. We shall say that a family of continuous linear operators $T_t: E \to F$, $t \in U_0$, depends holomorphically (resp. differentiably) on $t \in U_0$ if $t \to T_t$ is a holomorphic (resp. differentiable) function of U_0 with values in $\mathcal{L}_s(E, F)$, where $\mathcal{L}_s(E, F)$ denotes the space of continuous linear operators of E into F endowed with the topology simple convergence. We remark that if T_t depends holomorphically (resp. differentiably, differentiably) on t and $f(t)$ is a holomorphic (resp. differentiable) function with values in E then $t \to T_t f(t)$ is a holomorphic (resp. differentiable) function with values in F.

Lemma 1. — *Let* E *and* F *be two Banach spaces and* T_t: $E \to F$ *depend holomorphically (resp. differentiably) on* t. *Assume that* T_{t_0} *is an isomorphism. Then there exists a neighbourhood* U'_0 *of* t_0 *such that* T_t *is an isomorphism for each* $t \in U'_0$ *and the operators* $T_t^{-1}: F \to E$ *depend holomorphically (resp. differentiably) on* $t \in U'_0$.

This lemma is a special case of implicit function theorem in Banach spaces and is proved easily.

Lemma 2. — *Let* E *and* F *be two Banach spaces and* T_t: $E \to F$ *depend holomorphically (resp. differentiably) on* t. *Assume that* T_{t_0} *admits of a right inverse. Then there exists a neighbourhood* U'_0 *of* t_0 *such that for* $t \in U'_0$, T_t *admits of a right inverse depending holomorphically (resp. differentiably) on* t.

Proof. — We recall that a right inverse for T_{t_0} is a continuous linear map S_{t_0}: $F \to E$ such that $T_{t_0} \circ S_{t_0}$ is the identity map of F. Now we apply Lemma 1 to the operators

$$T_t \mid S_{t_0}(F) : S_{t_0}(F) \to F$$

and Lemma 2 follows.

Let D be a relatively compact open subset of $\mathbf{C}$. Let α be a fixed real number with $0 < \alpha < 1$. Let f be a complex valued function satisfying a Hölder condition of order α on $\overline{D}$. Put

$$\|f\|_{0,\alpha,D} = \operatorname*{Sup}_{\overline{D}} |f| + \operatorname*{Sup}_{\substack{z_1, z_2 \in \overline{D} \\ z_1 \neq z_2}} \frac{|f(z_1) - f(z_2)|}{|z_1 - z_2|^\alpha}.$$

We denote the space of these functions by $H_\alpha(D)$.

If f is a function which is once differentiable such that its partial derivatives satisfy in $\overline{D}$ a Hölder condition of order α put

$$\|f\|_{1,\alpha,D} = \operatorname*{Sup}_{\overline{D}} |f| + \left\|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right\|_{0,\alpha,D} + \left\|\frac{\partial f}{\partial z}\right\|_{0,\alpha,D}.$$

Let $H_{1,\alpha}(D)$ denote the space of such functions.

Let now D be a disc $|z| < R$, $0 < R < \infty$ in the plane. The operator $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ is a continuous linear operator from the Banach space $H_{1,\alpha}(D)$ (with the norm $\|f\|_{1,\alpha}$) to the Banach space $H_\alpha(D)$ (with the norm $\|f\|_{0,\alpha}$).

LEMMA 3. — *Let* D *be a disc in the plane. The operator*

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} : H_{1,\alpha}(D) \to H_\alpha(D)$$

admits of a right inverse.

This lemma is classical. For instance convolution with $\frac{1}{\pi z}$ yields a right inverse [1].

Let M_0 be a relatively compact subdomain of an open Riemann surface M such that M_0 is bounded by a finite number of disjoint analytic Jordan curves. We shall say, for brevity, that M_0 has an analytic boundary. We shall denote by ∂M_0 boundary of M_0 in M.

Let $D_1, \ldots, D_k, D_{k+1}, \ldots, D_n$ be a covering of $\overline{M}_0$ by coordinate discs D_i in M with $\overline{D}_i$ compact and contained in a coordinate disc such that the following conditions are satisfied:

i) $\overline{D}_i$ is contained in M_0 for $i = 1, \ldots, k$

ii) if z_j is the coordinate function in D_j mapping D_j onto $|z| < \varepsilon$, then z_j maps for $j = k+1, \ldots, n$, $D_j \cap \overline{M}_0$ onto the « semi-disc » $\{|z| < \varepsilon, \operatorname{Im} z > 0\}$ and $D_j \cap \partial M_0$ onto $\{-\varepsilon < Rlz < \varepsilon\}$.

Let D_i' denote the covering of $\overline{M}_0$ formed by $D_1, \ldots, D_k$, $D_{k+1} \cap \overline{M}_0, \ldots, D_n \cap M_0$. Let $\{D_i''\}$ be a shrinking of the covering $\{D_i'\}$.

Let $H_{1,\alpha}(M_0)$ denote the Banach space of complex valued functions in $\overline{M}_0$ which are once differentiable in M_0 and whose first partial derivatives satisfy a Hölder condition of order α

in every compact subset contained in a coordinate neighbourhood of $\overline{M}_0$ (e.g. D_i') with the norm

$$\|f\|_{1,\alpha} = \operatorname*{Sup}_{i=1,\dots,n} \|f\|_{1,\alpha,D_i''}.$$

Let $\overset{0,1}{H}_\alpha(M_0)$ denote the space of (0, 1) forms whose coefficients satisfy a Hölder condition of order α in every compact set contained in a coordinate neighbourhood of $\overline{M}_0$. If $f \in \overset{0,1}{H}_\alpha(M_0)$ and $f = f_i\, d\bar{z}^i$ in D' (z^i being the coordinate function in D_i') define

$$\|f\|_{0,\alpha,M_0} = \operatorname*{Sup}_{i} \|f_i\|_{0,\alpha,D_i''};$$

with this norm $\overset{0,1}{H}_\alpha(M_0)$ becomes a Banach space.

Lemma 4. — *Let* M_0 *be a relatively compact subdomain of* M *with analytic boundary. Then the operator*

$$d_{\bar{z}}\colon H_{1,\alpha}(M_0) \to \overset{0,1}{H}_\alpha(M_0)$$

admits of a right inverse.

Proof. — We give a sketch of the proof of this lemma. Let M_1 be a relatively compact subdomain of M, with analytic boundary, containing $\bigcup_{i=1,\dots,n} \overline{D}_i$. We first remark that we can find a continuous linear map $\rho\colon \overset{0,1}{H}_\alpha(M_0) \to \overset{0,1}{H}_\alpha(M_1)$ such that $\gamma \circ \rho =$ identity map of $\overset{0,1}{H}_\alpha(M_0)$, where $\gamma\colon \overset{0,1}{H}_\alpha(M_1) \to \overset{0,1}{H}_\alpha(M_0)$ denotes the restriction map. [The question being local at the boundary, locally the extension is given by reflection at the x-axis. For details see e.g. [4, Th. 2. 4]]. On $M_1 \times M_1$ there exists (H. Behnke-K. Stein, Math. Ann. 120, p. 436) a meromorphic differential $K(z, d\zeta)$, holomorphic for $z \neq \zeta$ such that in a coordinate disc around $z = \zeta$ we have,

$$K(z, d\zeta) = \left\{\frac{-1}{4\pi(z-\zeta)} + \text{regular function}\right\} d\zeta.$$

We may then estimate the potential

$$T_1\tilde{f} = 2i\int_{M_1} K(z, d\zeta) \wedge \tilde{f}(\zeta), \qquad \tilde{f} \in \overset{0,1}{H}_\alpha(M_1)$$

on compact subsets of D_i using the estimate on a disc

for the potential with the kernel $\dfrac{1}{\pi(z-\zeta)}$ [1]. If $f \in \overset{0,1}{H}_\alpha(M_0)$ let Tf denote the restriction of $T_1(\rho(f))$ to M_0. Then $d_{\bar z}Tf = f$ and

$$\|Tf\|_{1,\alpha,M_0} \leqslant C_1\|\rho(f)\|_{0,\alpha,M_1} \leqslant C_2\|f\|_{0,\alpha,M_0}$$

with positive constants C_1 and C_2. This proves Lemma 4.

The next lemma will be required only for the holomorphic tangent bundle of M. But we shall prove it for a general holomorphic line bundle.

Let L be a holomorphic line bundle on M. Let $H_{1,\alpha}(M_0, L)$ denote the Banach space of sections of L in $\overline{M}_0$ which are once differentiable in M_0 and whose first partial derivatives satisfy a Hölder condition of order α. Let $\overset{0,1}{H}_\alpha(M_0, L)$ denote the Banach space of Hölder continuous (0, 1) forms in M_0 with coefficients in L (we introduce norms on $H_{1,\alpha}(M_0, L)$ and $\overset{0,1}{H}_\alpha(L)$ as on $H_{1,\alpha}(M_0)$ and $\overset{0,1}{H}_\alpha(M_0)$.

Lemma 5. — *Let* L *be a holomorphic line bundle on* M. *Let* M_0 *be a relatively compact subdomain with analytic boundary. Then the operator*

$$d_{\bar z} : H_{1,\alpha}(M_0, L) \rightarrow \overset{0,1}{H}_\alpha(M_0, L)$$

admits of a right inverse.

Proof. — Since M is an open Riemann surface, every holomorphic line bundle on M is holomorphically trivial. This follows for example from the exact sequence.

$$H^1(M, O) \rightarrow H^1(M, O^*) \rightarrow H^2(M, Z)$$

remarking that $H^1(M, O) = 0$, $H^2(M, Z) = 0$. (Here O denotes the sheaf of germs of holomorphic functions and O^* the sheaf of germs of non-vanishing holomorphic functions.) Since L is holomorphically trivial on M there exist topological isomorphisms

$$\psi_1 : H_{1,\alpha}(M_0, L) \rightarrow H_{1,\alpha}(M_0)$$
$$\psi_2 : \overset{0,1}{H}_\alpha(M_0, L) \rightarrow \overset{0,1}{H}_\alpha(M_0)$$

such that the following diagram is commutative:

$$\begin{array}{ccc} H_{1,\alpha}(M_0, L) & \xrightarrow{\psi_1} & H_{1,\alpha}(M_0) \\ \downarrow d_{\bar z} & & \downarrow d_{\bar z} \\ \overset{0,1}{H}_\alpha(M_0, L) & \xrightarrow{\psi_2} & \overset{0,1}{H}_\alpha(M_0) \end{array}$$

Since $d_{\bar z}: H_{1,\alpha}(M_0) \to \overset{0,1}{H}_\alpha(M_0)$ admits of a right inverse it follows thats $d_{\bar z}: H_{1,\alpha}(M_0, L) \to \overset{0,1}{H}_\alpha(M_0, L)$ admits of a right inverse.

4. Variation of complex structures on a disc.

PROPOSITION 1. — *Let* D *be a disc in the plane. Let* $\mu(t) = \mu(z, t)$ *be a holomorphic function defined in a neighbourhood of* t_0 *in* $\mathbf{C}^m$ *with values in* $H_\alpha(D)$ *with* $\mu(t_0) = 0$. *Then there exist a neighbourhood* U′ *of* t_0 *and a* C^1 *function* $\zeta(z, t)$ *defined in* $D \times U'$ *such that*

i)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial\zeta(z, t)}{\partial\bar z} - \mu(z, t)\dfrac{\partial\zeta(z, t)}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial\zeta(z, t)}{\partial\bar t^i} = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

ii) *there exist positive constants* K_1, *and* K_2 *such that one has* $K_1|z_1 - z_2| \leqslant |\zeta(z_1, t) - \zeta(z_2, t)| \leqslant K_2|z_1 - z_2|$ for $z_1, z_2 \in \bar D$ *and all* $t \in U'$.

iii) *If* $F(t) = F(z, t) = \dfrac{1}{\zeta(z, t) - \zeta(z_0, t)}$, $z_0 \in D$, *the function* $t \to F(t)$ *is a holomorphic function in* U′ *with values in* $\mathcal{D}'(D)$, *where* $\mathcal{D}'(D)$ *denotes the space of distributions in* D; *moreover for each fixed* t, $F(z, t)$ *is holomorphic outside* z_0 *for the complex structure defined by* $dz + \mu(z, t)\,d\bar z$ $(|\mu| < 1)$.

Proof. — There exists a constant $C_1 > 0$ such that for $f, g \in H_\alpha(D)$ one has $\|fg\|_{0,\alpha} \leqslant C_1\|f\|_{0,\alpha}\|g\|_{0,\alpha}$. Hence the operator of multiplication by $\mu(z, t)$ is a holomorphic function of t with values in $\mathcal{L}_s(H_\alpha, H_\alpha)$. It follows that the operators

$$T_t = \frac{\partial}{\partial\bar z} - \mu(z, t)\frac{\partial}{\partial z} : H_{1,\alpha}(D) \to H_\alpha(D)$$

depend holomorphically on t. Now $T_{t_0} = \dfrac{\partial}{\partial\bar z}$. By Lemma 3

T_{t_0} admits a right inverse. Hence by lemma 2 there exists a neighbourhood U'' of t_0 and continuous linear operators

$$S_t : H_\alpha \to H_{1,\alpha}$$

depending holomorphically on $t \in U''$ such that $T_t \circ S_t =$ Identity map of H_α. Now $\mu(t)$ is a holomorphic function with values in H_α. Hence $f(t) = S_t(\mu(t))$ is a holomorphic function with values in $H_{1,\alpha}$. Let

$$\zeta(z, t) = z + f(z, t).$$

$\zeta(z, t)$ is of class C^1. Moreover

$$\begin{aligned}\frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f(z, t)}{\partial \bar{z}} &= \mu(z, t)\frac{\partial f}{\partial z} + \mu(z, t) \\ &= \mu(z, t)\left(1 + \frac{\partial f}{\partial z}\right) \\ &= \mu(z, t)\frac{\partial \zeta}{\partial z},\end{aligned}$$

so that $\zeta(z, t)$ satisfies

$$\text{i)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \zeta(z, t)}{\partial \bar{z}} - \mu(z, t)\dfrac{\partial \zeta}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial \zeta(z, t)}{\partial \bar{t}^i} = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

To prove ii) we remark that there exists a constant $k > 0$ (depending only on D) such that for each $f \in H_{1,\alpha}$ one has

$$|f(z_1) - (z_2)| \leqslant k|z_1 - z_2| \, ||f||_{1,\alpha}, \qquad z_1, z_2 \in \bar{D}.$$

(This is proved easily applying the mean value theorem.) Since $f(t_0) = 0$ we can choose a relatively compact neighbourhood U' of t_0 with $\bar{U'} \subset U''$ such that for $t \in U'$, $||f(t)||_{1,\alpha} \leqslant \frac{\varepsilon}{k}$, given ε with $0 < \varepsilon < 1$. It is evident that there exists a constant K_2 such that

$$|\zeta(z_1, t) - \zeta(z_2, t)| \leqslant K_2|z_1 - z_2|, \qquad t \in U', \qquad z_1, z_2 \in \bar{D}.$$

On the other hand

$$\begin{aligned}|\zeta(z_1, t) - \zeta(z_2, t)| &= |\{z_1 + f(z_1, t)\} - \{z_2 + f(z_2, t)\}| \\ &\geqslant |z_1 - z_2| - |f(z_1, t) - f(z_2, t)| \\ &\geqslant (1 - \varepsilon)|z_1 - z_2|.\end{aligned}$$

This completes the proof of ii).

To prove iii), we note that for t fixed $1/\zeta(z, t)-\zeta(z_0, t)$ is a locally summable function in D (see ii); and since

$$|F(z, t)| \leqslant K_1^{-1}/|z-z_0|,$$

$t \in U'$, we see, by Lebesgue's dominated convergence theorem, that $t \to F(t)$ is a continuous function with values in $\mathfrak{D}'(D)$. To prove that $F(t)$ is a holomorphic function with values in $\mathfrak{D}'(D)$ it is sufficient to prove that $h(t) = \langle F(t), \varphi\rangle$ is a holomorphic function of t for each $\varphi \in \mathfrak{D}(D)$. [$\mathfrak{D}(D)$ denotes the space of C^∞ functions with compact supports in D; $\langle F(t), \varphi\rangle$ denotes the scalar product between $F(t)$ and φ]. As was noted earlier $h(t)$ is a continuous function. Let $t_1 = (t_1^1, \ldots, t_1^m) \in U'$. We shall show that $h(t^1, t_1^2, \ldots, t_1^m)$ is differentiable at t_1^1 as a function of t^1.

Let

$$\psi(t^1) = \{h(t^1, t_1^2, \ldots, t_1^m) - h(t_1^1, t_1^2, \ldots, t_1^m)\}/(t^1 - t_1^1).$$

Then

$$\psi(t^1) = \int_K \frac{1}{t^1 - t_1^1} \times \left\{\frac{[\zeta(z, t_1) - \zeta(z_0, t_1)] - [\zeta(z, t^1, t_1^2, \ldots, t_1^m) - \zeta(z_0, t^1, \ldots, t_1^m)]}{[\zeta(z, t^1, t_1^2, \ldots, t_1^m) - \zeta(z_0, t^1, \ldots, t_1^m)] - [\zeta(z, t_1) - \zeta(z_0, t_1)]}\right\} \varphi \, dx \, dy$$

where K is the support of φ.

We assert that there exists a constant K_3 such that for t^1 in a sufficiently small neighbourhood of t_1^1 we have

(A)
$$\left|\frac{[\zeta(z, t_1^1, \ldots, t_1^m) - \zeta(z_0, t_1^1, \ldots, t_1^m)] - [\zeta(z, t^1, t_1^2, \ldots, t_1^m) - \zeta(z_0, t', t_1^2, \ldots, t_1^m)]}{t^1 - t_1^1}\right| \leqslant K_3/|z - z_0|.$$

In fact, consider the function with values in $H_{1,\alpha}$ defined in a neighbourhood of t_1^1:

$$g(t^1) = \begin{cases} \dfrac{\zeta(t_1^1, \ldots, t_1^m) - \zeta(t^1, t_2^2, \ldots, t_1^m)}{t^1 - t_1^1} & \text{for } t^1 \neq t_1^1 \\[2ex] \left\{\dfrac{d}{dt^1}\zeta(t^1, t_1^2, \ldots, t_1^m)\right\}_{t^1 = t_1^1} & \text{for } t^1 = t_1^1 \end{cases}$$

Since $\zeta(t)$ is a holomorphic function with values in $H_{1,\alpha}$,

$g(t^1)$ is a continuous function and hence in a neighbourhood of t_1^1, $\|g(t^1)\|_{1,\alpha} \leqslant K_4$. Using the inequality

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leqslant k|z_1 - z_2| \, \|f\|_{1,\alpha}$$

we obtain (A). From (A) and the first inequality in ii) we see that the integrand is majorised by $K_5/|z - z_0|$ for all t^1 in a sufficiently small neighbourhood of t_1^1. By Lebesgue's theorem we see that $\lim_{t_1 \to t_1^1} \psi(t^1)$ exists and is equal to

$$-\int_K \frac{\frac{d}{dt^1}(\zeta(t^1, \ldots, t_1^m)(z))_{t^1=t_1^1} - \left(\frac{d}{dt^1}\zeta(t^1, \ldots, t_1^m)(z_0)\right)_{t^1=t_1^1}}{\{\zeta(z, t_1^1, \ldots, t_1^m) - \zeta(z_0, t_1^1, \ldots, t_1^m)\}^2} \varphi \, dx \, dy.$$

Similary we show that the other derivatives exist. This proves that $h(t)$ is holomorphic.

From the first inequality in ii) we see that $\zeta(z, t) - \zeta(z_0, t) \neq 0$ for $z \neq z_0$, $t \in U'$. The second assertion in iii) follows immediately from this fact. This completes the proof of Proposition 1.

Remark 2. — Using i) and ii) we can show easily that if U is a polydisc contained in U′ the map $(t, z) \to (t, \zeta(t, z))$ maps $\mathcal{G}(U \times D)$ (endowed with the complex structure defined by $dz + \mu(z, t)\, d\bar{z}, dt^1, \ldots, dt^m$, $|\mu(z, t)| < 1$), biholomorphically onto a bounded domain of holomorphy in $\mathbf{C}^{m+1}$. Proposition 1 is also valid if we replace the disc by a bounded plane domain with a smooth boundary. Thus Theorems 1 and 2 are immediate consequences of Proposition 1 in the case of plane domains.

5. Elementary kernels for elliptic differential operators depending holomorphically on a parameter.

Let M be an open Riemann surface and let $\overset{p,q}{\mathfrak{D}}(M)$, $\overset{p,q}{\mathcal{E}}(M)$, $\overset{p,q}{\mathfrak{D}'}(M)$, $\overset{p,q}{\mathcal{E}'}(M)$ $(p = 0, 1, q = 0, 1)$ denote the space of C^∞ forms of type (p, q) with compact supports, C^∞ forms of type (p, q), currents of type (p, q) and currents of type (p, q) with compact supports respectively ,each endowed with the usual topology [5].

Let $\mathscr{S}(t, \mathrm{M})$ be a family of complex structures depending holomorphically on t. Define $\mathrm{T}_t : \overset{0,0}{\mathfrak{D}'}(\mathrm{M}) \to \overset{0,1}{\mathfrak{D}'}(\mathrm{M})$ by

$$\mathrm{T}_t f = d_{\bar{z}} f - \langle \tilde{\mu}(t), d_z f \rangle, \qquad f \in \overset{0,0}{\mathfrak{D}'}(\mathrm{M})$$

where $\langle \tilde{\mu}(t), d_z f \rangle$ denotes the current of type $(0, 1)$ obtained by contracting $\tilde{\mu}(t)$ (which is of type $(-1, 1)$) and $d_z f$ (which is of type $(1, 0)$). We remark that a function f is holomorphic for the structure $\mathscr{S}(t, \mathrm{M})$ if and only if $\mathrm{T}_t f = 0$. A function f defined on $\mathrm{U}_0 \times \mathrm{M}$ is holomorphic for the structure $\mathscr{S}(\mathrm{U}_0 \times \mathrm{M})$ if and only if it satisfies the system of differential equations:

$$\begin{cases} \mathrm{T}_t f(z, t) = 0, \\ \dfrac{\partial f(z, t)}{\partial \bar{t}^i} = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

Proposition 2. — *Let* M_0 *be a relatively compact subdomain of* M, *with analytic boundary. Then there exists a neighbourhood* U_3 *of* t_0 *and for* $t \in \mathrm{U}_3$ *continuous linear operators* $\mathrm{S}_t : \overset{0,1}{\mathcal{E}}(\mathrm{M}_0) \to \overset{0,0}{\mathfrak{D}'}(\mathrm{M}_0)$ *depending* holomorphically *on* t *such that for* $f \in \overset{0,1}{\mathcal{E}'}(\mathrm{M}_0)$ *one has* $\mathrm{T}_t \mathrm{S}_t f = f$ $(\mathrm{T}_t = d_{\bar{z}} - \langle \tilde{\mu}, d_z \rangle)$.

Proof. — Let $\mathrm{H}_{1,\alpha}(\mathrm{M}_0)$ and $\overset{0,1}{\mathrm{H}}_\alpha(\mathrm{M}_0)$ have the meaning given in § 3. By Lemma 4, $\mathrm{T}_{t_0} : \mathrm{H}_{1,\alpha} \to \overset{0,1}{\mathrm{H}}_\alpha$ has a right inverse. Let $\mathrm{S}_t : \overset{0,1}{\mathrm{H}}_\alpha \to \mathrm{H}_{1,\alpha}$ be right inverses defined in a neighbourhood U_3 of t_0 depending holomorphically on t (Lemma 2). S_t maps $\overset{0,1}{\mathfrak{D}}(\mathrm{M}_0)$ into $\mathrm{H}_{1,\alpha}$. We shall show that $\mathrm{S}_t : \overset{0,1}{\mathfrak{D}} \to \mathrm{H}_{1,\alpha}$ can be extended to a continuous linear map, still denoted by S_t, of $\overset{0,1}{\mathcal{E}'}$ into $\overset{0,0}{\mathfrak{D}'}$ and $\mathrm{S}_t : \overset{0,1}{\mathcal{E}'} \to \overset{0,0}{\mathfrak{D}'}$ depends holomorphically on t. This will prove Proposition 2, as is easy to see.

Now each T_t is a linear elliptic operator. By the hypo-ellipticity of T_t, S_t maps $\overset{0,1}{\mathfrak{D}}$ into $\overset{0,0}{\mathcal{E}}$ and $\mathrm{S}_t : \overset{0,1}{\mathfrak{D}} \to \overset{0,0}{\mathcal{E}}$ is continuous by Banach's closed graph theorem. We prove that $\mathrm{S}_t : \overset{0,1}{\mathfrak{D}} \to \overset{0,0}{\mathcal{E}}$ depends holomorphically on t. Let $\varphi \in \overset{0,1}{\mathfrak{D}}$. Then the current $\mathrm{F}(z, t) = \mathrm{S}_t \varphi$ satisfies the system of differential equations

$$\begin{cases} \mathrm{T}_t \mathrm{F} = \varphi \\ \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial \bar{t}^i} = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

Since this system is elliptic, $F(z, t)$ is a C^∞ function in $M_0 \times U_3$. It follows that $t \to S_t\varphi$ is a holomorphic function with values in $\overset{0,0}{\mathcal{E}}$.

Let $T'_t : \overset{1,0}{\mathfrak{D}}{}' \to \overset{1,1}{\mathfrak{D}}{}'$ be the transpose of the differential operator T_t. Then T_t is a linear elliptic differential operator with C^∞ coefficients. Let $S'_t : \overset{1,1}{\mathcal{E}}{}' \to \overset{1,0}{\mathfrak{D}}{}'$ be the transpose of $S_t : \overset{0,1}{\mathfrak{D}} \to \overset{0,0}{\mathcal{E}}$. Then $S_t : \overset{1,1}{\mathcal{E}}{}' \to \overset{1,0}{\mathfrak{D}}{}'$ depends holomorphically on t. By the hypo-ellipticity of S'_t, S'_t maps $\overset{1,1}{\mathfrak{D}}$ into $\overset{1,1}{\mathcal{E}}$ and $S_t : \overset{0,1}{\mathfrak{D}} \to \overset{1,0}{\mathcal{E}}$ is continuous. As we proved for S_t, we prove, using the hypo-ellipticity of the system $\left\{S'_t, \frac{\partial}{\partial \bar{t}^1}, \dots \frac{\partial^t}{\partial \bar{t}^m}\right\}$ that $S_t : \overset{1,1}{\mathfrak{D}} \to \overset{1,0}{\mathcal{E}}$ depends holomorphically on t. By taking transposes we obtain $S_t : \overset{0,1}{\mathcal{E}}{}' \to \overset{0,0}{\mathfrak{D}}{}'$ depending holomorphically on t and coinciding on $\overset{0,1}{\mathfrak{D}}$ with the S_t originally given.

This proves Proposition 2.

6. A result on the prolongation of holomorphic functions.

Proposition 3. — *Let* M_0 *be a relatively compact subdomain of* M *with analytic boundary. Then there exists a neighbourhood* U_2 *of* t_0 *with the following property: if* $f(z)$ *is a function which is holomorphic for the structure* $\mathcal{S}(t_1)$ *in* $\overline{M}_1$, $t_1 \in U_2$, *then there exists a function* $F(z, t)$ *in* $M_0 \times U_2$ *which is holomorphic for the structure* $\mathcal{S}(M_0 \times U_2)$ *such that* $F(z, t_1) = f(z)$.

Proof. — Let $S_t : \overset{0,1}{H}_\alpha(M_0) \to H_{1,\alpha}(M_0)$ be right inverses for T_t depending holomorphically on $t \in U_2$. Now $f \in H_{1,\alpha}$. Define

$$F(z, t) = f - S_t T_t f, \quad (t \in U_2).$$

We then have

$$T_t(f - S_t T_t f) = T_t f - T_t S_t T_t f = T_t f - T_t f = 0;$$

since $T_{t_1} f = 0$, $F(z, t_1) = f(z)$. $F(z, t)$ satisfies the system of differential equations

$$\begin{cases} T_t F(z, t) = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \bar{t}^i} = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

Hence $F(z, t)$ is holomorphic for the structure $\mathcal{S}(M_0 \times U_2)$.

7. Proof of Theorem 1.

We now proceed to prove Theorem 1. Let M_0 be a relatively compact sub-domain of M with analytic boundary such that $\overline{M}_1 \subset M_0$. Let $O_1, \ldots, O_i, \ldots, O_k$ be a finite number of coordinate discs for the structure $\mathcal{S}(t_0)$ with $\overline{O}_i \subset M_0$ and $\bigcup_i O_i \supset \overline{M}_1$. Let z^i be the coordinate function in O_i. Then $\tilde{\mu} = \mu_i \, d\bar{z}^i \otimes \dfrac{\partial}{\partial z^i}$. Let V_i, $i = 1, \ldots, k$, be neighbourhoods of t_0 such that functions $\zeta_i(z^i, t)$, $z^i \in O_i$, $t \in V_i$ can be defined satisfying conditions i), ii), iii) of Proposition 1. (By an obvious abuse of notation we use the letter z^i to denote a point on the Riemann surface and as well its image by the coordinate function z^i.) Let U_3 and U_2 be neighbourhoods of t_0 given in Proposition 2 and 3. Let V and V' relatively compact neghbourhoods of t_0 such that $\overline{V} \subset V'$ and $\overline{V}' \subset \bigcap_{i=1, \ldots, k} V_i \cap U_2 \cap U_3$. Let U be a Stein neighbourhood of t_0 contained in V.

We first show that holomorphic functions on $\mathcal{S}(M_1 \times U)$ separate points. Since $(t^1, \ldots, t^m)$ are holomorphic functions on $\mathcal{S}(U \times M_1)$ we have only to consider the case when the points are on the same fibre. Let then (z_1, t_1), (z_2, t_1) be two points $t_1 \in U$, $z_1, z_2 \in M_1$, $z_1 \neq z_2$. Now there exists a function $f(z)$ holomorphic in $\overline{M}_0$ for $\mathcal{S}(t_1)$ with $f(z_1) \neq f(z_2)$. [This is shown, for example, by taking an open set slightly larger than M_0 and using the fact every open Riemann surface is a Stein manifold.] By Proposition 3 there exists a function $F(z, t)$ holomorphic for the structure $\mathcal{S}(M_0 \times U)$ such that $F(z_1, t_1) = f(z)$. Hence $F(z_1, t_1) \neq F(z_2, t_1)$.

Next let (z_1, t_1), $z_1 \in M_1$, $t_1 \in U$ be a point in $M_1 \times U$. We shall show that there exist $(m + 1)$ functions in $M_1 \times U$ which

are holomorphic on $\mathcal{S}(M_1 \times U)$ and which form a local coordinate system at (z_1, t_1). Let $f(z)$ be a function holomorphic for $\mathcal{S}(t_1)$ in $\overline{M}_0$ which forms a local coordinate system at z_1 in M_0. Let $F(z, t)$ be an extension of $f(z)$ to $M_0 \times U$ as a function holomorphic for the structure $\mathcal{S}(M_0 \times U)$. Suppose $z_1 \in O_i$. With respect to the coordinate system $(z^i, t^1, \ldots, t^m)$ the Jacobian of $(F, t^1, .., t^m)$ at (z_1, t_1) is

$$\left|\left[\frac{\partial}{\partial z^i} F(z, t)\right]_{(z_1, t_1)}\right|^2 (1 - |\mu_i(z, t)|^2)$$

or

$$\left|\frac{\partial f(z)}{\partial z^i}\right|^2 (1 - |\mu_i(z, t)|^2).$$

But $\left(\dfrac{\partial f}{\partial z^i}\right)_{z^i = z_1} \neq 0$; for if it were zero, then $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}^i} = \mu_i \dfrac{\partial f}{\partial z^i}$ would be zero so that the Jacobian of f at z_1 would be zero. Thus the Jacobian of $(F, t^1, .., t^m)$ at (z_1, t_1) is different from zero.

Finally we show that given infinite discrete set of points $\{z_n, t_n\}$, $z_n \in M_1$, $t_n \in U$ there exists a holomorphic function Ψ on $\mathcal{S}(M_1 \times U)$ such that the sequence $\{\Psi(z_n, t_n)\}$ is not bounded. Now either the sequence $\{t_n\}$ contains an infinite discrete subset or the sequence $\{z_n\}$ contains an infinite discrete subset. If $\{t_n\}$ contains an infinite discrete subset we can find, since U is Stein, a holomorphic function $F(t)$ in U such that $\{F(t_n)\}$ is not bounded. Then $\Psi(z, t) = F(t)$ is holomorphic on $\mathcal{S}(M_1 \times U)$ and $\Psi(z_n, t_n)$ is not bounded. If $\{z_n\}$ contains an infinite discrete subsequence $\{z_k\}$ let $z_0 \in \overline{M}_1 \subset M_0$ be an adherent point of $\{z_k\}$, $z_0 \notin M_1$. Suppose $z_0 \in O_i$. Consider the currents of degree 0, $F(t) = 1/\zeta_i(z^i, t) - \zeta_i(z_0, t)$ in O_i. Since $F(t)$ is a holomorphic function with values $\overset{0}{\mathfrak{D}}'(O_i)$ and $T_t : \overset{0}{\mathfrak{D}}'(O_i) \to \overset{0,1}{\mathfrak{D}}'(O_i)$ depends homorphically on t, $T_t F(t)$ is a holomorphic function t with values in $\overset{0,1}{\mathfrak{D}}'(O_i)$. But the supports of $T_t F(t)$ are at z_0 and hence $T_t F(t)$ is a holomorphic function with values in $\overset{0,1}{\mathcal{E}}'(M_0)$. Let S_t be the operators given by Proposition 2, in U_3. Let $\Psi(t) = S_t(T_t F(t))$. Then

$$\begin{cases} T_t \Psi(t) = (T_t F(t)), \\ \dfrac{\partial \Psi(t)}{\partial \bar{t}^i} = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

Since $z_0 \notin M_1$, $\Psi(t)$ defines a function in $M_1 \times U$ satisfying in $M_1 \times U$

$$\begin{cases} T_t\Psi(z, t) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial \bar{t}^i}\Psi(z, t) = 0, \quad i = 1, \ldots, m; \end{cases}$$

that is $\Psi(z, t)$ is holomorphic on $\mathcal{G}(M_1 \times U)$. It remains to show that $\{\Psi(z_k, t_k)\}$ is not bounded. Let O_i' be a relatively compact neighbourhood of z_0 such that $\overline{O_i'} \subset O_i$. We may suppose that all z_k belong to O_i'. On $O_i \times V'$ the currents $G(z, t) = F_t(z) - \Psi_t(z)$ satisfies the system of differential equations

$$\begin{cases} T_tG(z, t) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial \bar{t}^i}G(z, t) = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

Hence $G(z, t)$ is a C^∞ function in $O_i \times V'$ and is hence bounded on $O_i' \times U$. For $z \in M_1 \times O_i$, $t \in U$

$$\Psi(z, t) = F(z, t) - G(z, t).$$

Hence

$$\Psi(z_k, t_k) = F(z_k t_k) - G(z_k, t_k) = \frac{1}{\zeta(z_k, t_k) - \zeta(z_0, t_k)} - G(z_k, t_k)$$

So

$$|\Psi(z_k, t_k) + G(z_k, t_k)| \geq K_2^{-1}/|z_k - z_0|.$$

by Proposition 1. Since $G(z_k, t_k)$ is bounded and z_0 is adherent to z_k, it follows that $\Psi(z_k, t_k)$ is not bounded. This completes the proof of Theorem 1.

8. Proof of Theorem 2.

The proof is essentially same as the proof of Theorem 5. 1 in Kodaira-Spencer [2], once we have Theorem 1. Still we give the complete proof since some changes are required in our case. It is sufficient to prove the theorem without the requirement that Ω be Stein. For, once we have a Φ with Ω an open subset of $M \times \mathbf{C}^m$ we could restrict Φ to $\mathcal{G}(M_1 \times U)$ where U is a sufficiently small Stein neighbourhood of t_0 and obtain Theorem 2 (since $\mathcal{G}(M_1 \times U)$ is Stein by Theorem 1).

Thus it is enough to show that there exist a neighbourhood U' of t_0, an analytic homeomorphism Φ: $\mathcal{S}(M_1 \times U') \to \Omega$ where Ω is an open submanifold of $M \times \mathbf{C}^m$, and an analytic homeomorphism $\varphi: U' \to \pi(\Omega)$ such that the following diagram is commutative:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(U' \times M_1) & \xrightarrow{\Phi} & \Omega \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \downarrow \\ U' & \xrightarrow{\varphi} & \pi(\Omega) \end{array}$$

We make the following inductive assumption:

A_{p-1}: If the dimension of U_0 is $(p-1)$ and M_1, is any relatively compact subdomain of an open Riemann surface M, then there exists a neighbourhood U of t_0 and a holomorphic map h: $\mathcal{S}(M_1 \times U)$ into M which maps each fibre biholomorphically into M.

Now, assumig A_{p-1} we prove A_p.

Let M_0 be a relatively compact subdomain of M such that $\overline{M}_1 \subset M_0$. Let W be a sufficiently small Stein neighbourhood of t_0 in $\mathbf{C}^p$, with $\overline{W}$ compact, $\overline{W} \subset U_0$. Then $\mathcal{S}(M_0 \times W)$ is a Stein manifold. If $\mathcal{F}$ denotes the holomorphic tangent bundle along the fibres, then by Theorem B on Stein manifolds $H^1(\mathcal{S}(M_0 \times W), \mathcal{F}) = 0$. From the exact sequence

$$H^0(\mathcal{S}(M_0 \times W), \Pi) \to H^0(W, T) \to H^1(\mathcal{S}(M_0 \times W), \mathcal{F})$$

(Π denotes the sheaf of germs of holomorphic vector fields which are projectable, T denotes the sheaf of germs of holomorphic vector fields on W), we see that the vector field $\dfrac{\partial}{\partial t^p}$ can be lifted into a holomorphic vector field X of $\mathcal{S}(M_0 \times W)$. We may suppose $t_0 = 0$. Let $f(x) = \exp(-\pi^p(x)X)$, $x \in M_1 \times W'$ where $\pi^p(x)$ is defined as follows: if $x = (z, t^1, \ldots, t^p)$, $\pi^p(x) = t^p$. By the complex analytic analogue of Proposition 5. 1 in [2], for a neighbourhood $W' \subset W$, f maps $\mathcal{S}(M_1 \times W')$ holomorphically into $\mathcal{S}(M_0 \times (t^1, \ldots, t^{p-1}, 0))$ mapping the fibre at $(t^1, \ldots, t^p)$ biholomorphically into $\mathcal{S}((t^1, \ldots, t^{p-1}, 0), M_0)$. M_0 being a relatively compact subdomain of M, there exists, by the inductive hypothesis, a holomorphic map g:

$$M_0 \times (t^1, \ldots, t^{p-1}, 0) \to M$$

which maps each fibre biholomorphically into M. Taking the

composite $h = g \circ f$ we get a holomorphic map of $\mathcal{S}(U_t \times M_1)$ where U_t is a neighbourhood of t_0 in $\mathbf{C}^p$, mapping each fibre biholomorphically into M. This proves A_p.

Once we have proved the assertion A_m, consider the map

$$\Phi : \mathcal{S}(U \times M_1) \to U \times M$$

defined by $(t, z) \to (t, h(t, z))$. Φ is holomorphic and one to one. By a known theorem on holomorphic functions Φ maps $\mathcal{S}(U \times M_1)$ biholomorphically onto an open subset Ω of $U \times M$ and we have the commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} S(U \times M_1) & \xrightarrow{\Phi} & \Omega \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ U & \xrightarrow{\text{identity}} & U \end{array}$$

This completes the proof of Theorem 2.

9. Differentiable variations of complex structures. Proof of Theorem 3.

Let $\mathcal{S}(t, M)$ be a differentiable variation of complex structures on an open Riemann surface M, $t \in U_0 \subset R^m$. Let J_t be the almost complex structure tensor corresponding to the structure $\mathcal{S}(t, M)$. On $M \times U_0$ let J denote the tensor along the fibres composed of $\{J_t\}$. If X is a *projectable* vector field on $M \times U_0$ (with respect to the projection $M \times U_0 \to U_0$) we remark that the Lie derivative of J with respect to the vector field X, denoted by [X, J], is defined as a tensor along the fibres.

Let X be a projectable vector field on $M \times U_0$ satisfying the condition $[X, J] = 0$. Let M′ (resp U_0') be a relatively compact subdomain of M (resp. U_0'). If exp (sX) denotes the one parameter family of transformations associated with X, exp (sX) is a diffeomorphism of $M' \times U_0'$ into $M \times U_0$ which maps $\mathcal{S}(t, M')$, $t \in U_0'$ biholomorphically into $\mathcal{S}(\exp(s\varphi)(t), M)$, where φ denotes the projection of X on U_0. Now referring to the proof of Theorem 2, we see that to prove Theorem 3 it is sufficient to prove

Proposition 4. — *Let $\mathcal{S}(t)$ be a differentiable family of complex structures on an open Riemann surface* M. *Let* M_1 *be a relatively compact subdomain of* M. *Then there exists a neighbourhood* U_1 *of* t_0 *in* R^m *such that every differentiable vector field (real) on* U_1 *can be lifted into a differentiable vector field* X *on* $M_1 \times U_1$ *satisfying the condition* $[X, J] = 0$, J *denoting the tensor along the fibres composed on the almost complex structure tensors along the fibres.*

Proof of Proposition 4. — Let M_0 be a relatively compact subdomain (of M) with analytic boundary, with $\overline{M}_1 \subset M_0$. Let Θ_t denote the holomorphic tangent bundle of $\mathcal{S}(t, M)$. Let $\mathcal{F} = U_t\Theta_t$ be the bundle on $M \times U_0$ composed of the holomorphic tangent bundles along the fibres. If U_2 is a spherical neighbourhood of t_0 with $U_2 \subset U_0$ then $\mathcal{F}|M \times U_2$ is differentiably equivalent to the bundle $U_2 \times \Theta_{t_0}$ (Homotopy theorem). It follows that there exist isomorphisms

$$\psi_1(t) : H_{1,\alpha}(M_0, \Theta_t) \rightarrow H_{1,\alpha}(M_0, \Theta_{t_0}),$$
$$\psi_2(t) : \overset{0,1}{H}_\alpha(M_0, \Theta_t) \rightarrow \overset{0,1}{H}_\alpha(M_0, \Theta_{t_0}),$$

depending differentiably on t such that $\psi_1(t_0) = \text{identity}$, $\psi_2(t_0) = \text{identity}$. Let

$$T_t = \psi_2(t)\, d_{\bar{z}}(t)\, \psi_1(t)^{-1} : H_{1,\alpha}(M_0, \Theta_{t_0}) \rightarrow \overset{0,1}{H}_\alpha(M_0, \Theta_{t_0})$$

where $d_{\bar{z}}(t)$ denotes the $d_{\bar{z}}$ operator with respect to the structure $\mathcal{S}(t)$. T_t depends differentiably on t. Since $T_{t_0} = d_{\bar{z}}(t_0)$ admits of a right inverse by Lemma 5, there exist a neighbourhood U_3 of t_0 and operators

$$S_t : \overset{0,1}{H}_\alpha(M_0, \Theta_{t_0}) \rightarrow H_{1,\alpha}(M_0, \Theta_{t_0}), \quad t \in U_3$$

depending differentiably on $t \in U_3$ and such that S_t is a right inverse of T_t (Lemma 2).

Let M_2 be a relatively compact subdomain of $\overline{M}$ with $M_0 \subset M_2$ Let U_4 be a neighbourhood of t_0 such that there exist a finite open covering $O_1, \ldots, O_k$ of M_2 and diffeomorphisms g_i of $O_i \times U_4$ into $\mathbf{C} \times U_4$ which maps $\mathcal{S}(t, O_i)$, $t \in U_4$ biholomorphically into in $\mathbf{C} \times (t)$. [Such a neighbourhood U_4 exists. This follows from the definition of differentiable variation of complex structures in the sense of Kodaira-Spencer. With our

definition this follows from the differentiable analogue of Proposition 1]. We denote the coordinate function in $O_i \times U_4$ by (z^i, t).

Let U_1 be a relatively compact neighbourhood of t_0 in R^m such that $\overline{U}_1 \subset U_2 \cap U_3 \cap U_4$. Let $\nu = (\nu_1(t), \ldots, \nu_m(t))$ be a differentiable vector field in U_1. In $O_i \times U_4$ consider the vector field π_i defined by $(O, \nu_1(t), \ldots, \nu_m(t))$ with respect to the coordinate system (z^i, t). We have $[\pi_i, J] = 0$. Put $\theta_{ij} = \pi_i - \pi_j$ in $(O_i \times U_4) \cap (O_j \times U_4)$. Let $\theta'_{ij} = \theta_{ij} - iJ\theta_{ij}$. Then θ'_{ij} are sections of $\mathcal{F}$ over $(O_i \times U_4) \cap (O_j \times U_4)$ whose restriction to each fibre is holomorphic. Evidently there exist differentiable sections $f'_i(z^i, t)$ of $\mathcal{F}$ over $O_i \times U_4$ such that $f'_i - f'_j = \theta'_{ij}$, in $(O_i \times U_4) \cap (O_j \times U_4)$. If we define $\varphi(t) = d_{\bar{z}}(t) f'_i(z^i, t)$, $\varphi(t)$ is a (0, 1) form on $\mathcal{S}(t, M_2)$ with values in Θ_t which depends differentiably on t. Let $\eta(t) = \psi_2(t)\{\varphi(t) \mid \overline{M}_0\}$ [$\psi_2(t)$ is the isomorphism defined earlier.] Then $\eta(t)$ is a differentiable function with values in $\overset{0,1}{H}_\alpha(M_0, \Theta_{t_0})$. For $t \in U_1$, let $h_1(t) = S_t\eta(t)$. Then $h_1(t)$ depends differentiably on t. Let $h_2(t) = \{\psi_1(t)\}^{-1}(h_1(t))$. Then $h_2(t)$ depends differentiably on t and satisfies $d_{\bar{z}}(t)h_2(t) = \varphi(t)$. [It follows easily from differentiability theorem for elliptic differential equations that $h_2(z, t)$ is a differentiable vector field on $M_1 \times U_1$. See proposition 1 in [3]]. Let

$$h(z, t) = \frac{1}{2}\{h_2(z, t) + \bar{h}_2(z, t)\}$$

and

$$f_i(z, t) = \frac{1}{2}\{f'_i(z, t) + \bar{f}'_i(z, t)\}.$$

Define

$$X = \pi_i + h - f_i \qquad \text{in} \qquad (O_i \cap M_1) \times U_1.$$

Then X is globally defined on $M_1 \times U_1$, projects into ν and satisfies the equation $[X, J] = 0$. This completes the proof of Proposition 4.

REFERENCES

[1] S. S. Chern. An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 6 (1955), pp. 771-782.

[2] K. Kodaira and D. C. Spencer : On deformations of complex analytic structures I, *Annals of Math.*, 67 (1958), pp. 328-401.

[3] K. Kodaira and D. C. Spencer. On deformations of complex analytic structures, III, *Annals of Math.*, 71 (1960), pp. 43-76.
[4] J. L. Lions. Lectures on elliptic partial differential equations, *Tata Institute of Fundamental Research*, Bombay, 1957.
[5] G. de Rham. *Variétés différentiables*, Paris, 1955.

Tata Institute of Fundamental Research, Bombay
and
Centre National de la Recherche Scientifique, Paris.

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
11 (1961), 515-562.

FONCTIONS PLURISOUSHARMONIQUES ET FONCTIONS ANALYTIQUES DE VARIABLES RÉELLES

par **Pierre LELONG** (Paris).

1. — Introduction.

1. On se propose d'étudier ici certaines propriétés des fonctions plurisousharmoniques au voisinage d'un ensemble de points appartenant au sous-espace réel R^p, plongé dans l'espace C^p des p variables complexes $X_k = x_k + iy_k$, $1 \leqslant k \leqslant p$; dans la seconde partie du travail, des applications seront faites à l'étude des fonctions analytiques de variables réelles.

Précisons quelques notations. On désignera par des majuscules les variables *complexes*, par des minuscules les variables *réelles*. Les ensembles d'intérieur non vide *pour la topologie de* C^p seront notés par des lettres grecques. On considérera en particulier la situation suivante : Δ est un domaine de C^p qui coupe le sous-espace réel R^p, $(y_k = 0)$, selon un ensemble D non vide, qui est un domaine *pour la topologie de* R^p. On note F_Δ, par abréviation, une famille localement bornée supérieurement de fonctions définies dans Δ.

On sait (cf. [6, *c*, IX]) que si $v_n(X)$ est une suite F_Δ de fonctions plurisousharmoniques, les fonctions $w(X) = \sup_n v_n(X)$ et $w'(X) = \lim \sup_n v_n(X)$ ne sont pas, en général, des fonctions plurisousharmoniques, mais appartiennent à une classe plus générale (M). La plus petite majorante semi-continue supérieurement d'une fonction $w \in (M)$ est une fonction plurisousharmonique w^*, dite sa « *régularisée* », qu'on notera toujours par le signe $*$. On a $w \leqslant w^*$ partout et l'on est ramené à l'étude de l'ensemble $\mathcal{E}(w < w^*)$. On distinguera ici les

classes (M_0) et (M), $(M_0) \subset (M)$. La classe (M_0) contient les fonctions plurisousharmoniques et est fermée par rapport aux opérations qui consistent à construire :

A_1 — l'enveloppe supérieure de suites F_Δ de fonctions de (M_0).

A_2 — la limite $(\not\equiv -\infty)$ de suites non croissantes de fonctions de (M_0). Toute fonction $\mathscr{V} \in (M_0)$ appartient aux classes de Baire et a, de ce fait, pour restriction à une sous-variété de $C^p = R^{2p}$ une fonction mesurable.

La classe (M) est définie de même, A_1 étant remplacé par l'opération A'_1 consistant à construire l'enveloppe supérieure des sous-familles F_Δ non nécessairement dénombrables.

On montrera que l'ensemble $\mathcal{E}(\mathscr{V} < \mathscr{V}^*)$ a pour restriction au sous-espace réel R^p un ensemble de R^p-mesure nulle. En fait des propriétés un plus peu précises seront établies. Comme la classe (M) est invariante par rapport aux homéomorphismes analytiques complexes, les restrictions de $\mathcal{E}(\mathscr{V} < \mathscr{V}^*)$ aux sous-variétés de $R^{2p} = C^p$ localement équivalentes à R^p, (par exemple les arêtes des polycercles), sont aussi des ensembles de mesure nulle. Ces précisions sur l'ensemble $\mathcal{E}(\mathscr{V} < \mathscr{V}^*)$ sont essentielles pour les applications. Elles ne peuvent évidemment, être obtenues à partir du fait que $\mathscr{V}$ est une fonction R^{2p}-quasi-sousharmonique et $\mathcal{E}(\mathscr{V} < \mathscr{V}^*)$ de R^{2p}-capacité nulle; d'une manière générale le sous-espace R^p de R^{2p} étant de R^{2p}-capacité nulle, les applications directes de la théorie du potentiel fourniraient ici des énoncés insuffisants.

L'étude faite conduit dans la deuxième partie de ce travail (§ 3) à des résultats concernant les fonctions analytiques de plusieurs variables *réelles*. En utilisant essentiellement les propriétés des fonctions plurisousharmoniques au voisinage de R^p, on étendra à certaines classes de fonctions analytiques de deux groupes de variables *réelles*, un résultat de F. Hartogs, d'après lequel une fonction de plusieurs variables *complexes*, holomorphe par rapport à chacune d'entre elles *séparément*, (c'est-à-dire quand on donne aux autres variables des valeurs fixes, quelconques), est une fonction holomorphe de l'ensemble des variables. La démonstration de cet énoncé classique utilise, comme on sait, outre le théorème de Baire, une propriété des fonctions sousharmoniques que nous avons énoncée ailleurs (cf. [6, *a*], et [5]) sous la forme générale que nous rappelons ici :

Soit $v_t(x) = v_t(x_1, \ldots, x_s)$, $a < t < b$, une famille de fonctions sousharmoniques définie et localement bornée supérieurement dans un domaine G de l'espace euclidien R^s; si l'on a dans G :

$$(1, 1) \qquad \limsup_{t \to b} v_t(x) \leqslant g(x)$$

où $g(x)$ est une fonction continue, alors, à tout compact $K \subset G$ et à tout $\varepsilon > 0$, correspond une valeur t_0, $a < t_0 < b$, telle qu'on ait

$$(1, 2) \qquad v_t(x) \leqslant g(x) + \varepsilon$$

pour $t > t_0$ et $x \in K$.

Cet énoncé, dans le cas d'une suite $v_n(x)$, donne une majoration uniforme, sur tout compact de G, des $v_n(x)$, à partir d'une majoration de lim sup $v_n(x)$ par une fonction continue.

Si maintenant, $v_t(X)$ étant une famille F_Δ de fonctions plurisousharmoniques, on fait l'hypothèse (1, 1) relativement aux seules restrictions $v_t(x)$ au sous-espace réel R^p, obtient-on encore une majoration uniforme, du type (1, 2), sur tout compact K pris dans $D = \Delta \cap R^p$? Il en est bien ainsi et l'on obtient une majoration uniforme non seulement sur tout compact de D, mais encore, ce qui est essentiel pour certaines applications, sur tout compact de Δ suffisamment voisin d'un compact de D, donc sur des voisinages ouverts de K *dans* C^p. C'est l'objet de l'énoncé suivant :

THÉORÈME. — *Soit* $v_t(X)$, $X_k = x_k + iy_k$, $a < t < b$, *une famille* F_Δ *de fonctions plurisousharmoniques localement bornées supérieurement dans leur ensemble dans un domaine* Δ *de* C^p, *dont l'intersection* $D = \Delta \cap R^p$ *avec l'espace réel* R^p de C^p *est un domaine; soit* $g(x)$ *une fonction continue dans* D, $g(X)$ *une fonction continue dans* Δ *ayant* $g(x)$ *pour restriction à* D. *Si l'on a*

$$(1, 3) \qquad \limsup v_t(x) \leqslant g(x)$$

sur D, alors :

1) *A tout compact* $K \subset D$ *et à tout* $\varepsilon > 0$, *correspond* t_0, $a < t_0 < b$, *tel qu'on ait*

$$(1, 4) \qquad v_t(x) \leqslant g(x) + \varepsilon$$

pour $x \in K$, $t > t_0$;

11) *A tout compact* $K \subset D$ *et à tout* $\varepsilon > 0$, *on peut faire correspondre un ouvert* $\Delta' \subset \Delta$ *de* C^p *qui contient* K *et une valeur* t_0, $a < t_0 < b$, *tels qu'on ait*

$$v_t(X) \leqslant g(X) + \varepsilon \tag{1, 5}$$

pour $X \subset \Delta'$, $t > t_0$.

Il s'ensuit que la majoration uniforme (1, 5) vaut sur tout compact de C^p suffisamment voisin de l'ensemble K de R^p, pris compact dans D.

Le théorème 1 est la pièce essentielle de la démonstration donnée au § 3 : lorsqu'une fonction $f(x, u) = f(x_1, \ldots, x_p, u_1, \ldots, u_q)$ est, par rapport à chaque groupe de variables séparément, (c'est-à-dire les valeurs attribuées aux variables de l'autre groupe demeurant fixes, quelconques) une fonction analytique appartenant à une classe $\mathfrak{L}$ définie au § 3, $f(x, u)$ est analytique de l'ensemble des $p + q$ variables x, u. Bien entendu, aucune hypothèse n'est faite concernant le comportement (par exemple la continuité) de f par rapport à l'*ensemble des variables*.

Les classes $\mathfrak{L}$ de fonctions analytiques de variables réelles sont définies de la manière suivante : un ensemble de fonctions $f(x_1, \ldots, x_p)$ forme une classe $\mathfrak{L}$ dans un domaine D si tout point de D est centre d'un polycercle dans l'espace complexifié C^p, ces polycercles formant une famille qui ne dépend que de $\mathfrak{L}$ et de D; leur réunion est un ouvert $\Omega(D)$, et toute fonction $f \in \mathfrak{L}$ se prolonge en une fonction $f(X)$ holomorphe dans $\Omega(D)$. De plus il existe une majoration de $|f(X)|$ sur tout compact $\Gamma \subset \Omega(D)$ donnée par :

$$|f(X)| \leqslant C_\Gamma \sup_{x \in G} |f(x)| \tag{1, 7}$$

G étant un compact de D associé au compact Γ de $\Omega(D)$ et C_Γ une constante qui ne dépend que de cette configuration. Enfin, on suppose que pour $f_1 \in \mathfrak{L}$ et $f_2 \in \mathfrak{L}$, on a : $a(f_1 - f_2) \in \mathfrak{L}$, pour toute constante a. Cette condition impose à $\mathfrak{L}$ d'être un espace vectoriel si $f \equiv 0$ appartient à $\mathfrak{L}$. Les fonctions harmoniques, les fonctions polyharmoniques dans D forment des classes $\mathfrak{L}$; il en est de même des solutions d'équations aux dérivées partielles linéaires, lorsqu'on peut établir l'existence de la majoration (1, 7). Toute fonction $f(x, u)$, dont les restrictions $f_u(x)$ et $f_x(u)$ appartiennent respectivement à des classes $\mathfrak{L}_x$,

$\mathcal{L}'_u$ du type indiqué, est une fonction analytique de l'ensemble des variables $(x, u) = (x_1, \ldots, x_p, u_1, \ldots, u_q)$. Comme exemple citons : si $f(x, u)$ est séparément harmonique des variables (x) et (u), alors $f(x, u)$ est analytique — sans autre hypothèse — de l'ensemble (x, u) et est alors harmonique dans l'espace produit, des (x, u) ; ce résultat particulier peut être rapproché du résultat de F. Hartogs cité plus haut et le contient, comme on le voit aisément en considérant séparément la partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction à valeurs complexes.

2. — Majoration des fonctions plurisousharmoniques au voisinage du sous-espace réel.

1. Rappelons qu'une fonction $\varphi(X_1, \ldots, X_p) = \varphi(X)$, à valeurs réelles, $-\infty \leqslant \varphi < +\infty$, est dite plurisousharmonique dans un domaine Δ de C^p si elle est semi-continue supérieurement et si, étant donnée une composante ouverte D de l'intersection $P \cap \Delta$, où P est une droite complexe définie par $X_k = X_k^0 + a_k T$, T complexe, sa restriction $\varphi \mid P = \psi_P(T)$ est la constante $-\infty$ ou une fonction sousharmonique [1] sur D. On convient d'exclure la constante $-\infty$ des fonctions plurisousharmoniques, ainsi que des fonctions sousharmoniques afin de n'avoir dans ces classes que des fonctions localement sommables.

Par définition, si φ est plurisousharmonique et si l'on explicite $\varphi(X_1, \ldots, X_p) = \varphi(x_1, y_1; \ldots; x_p, y_p)$ les restrictions de φ aux droites complexes $C^1(X_k)$ parallèles aux axes sont, localement, des fonctions R^2-sousharmoniques des (x_k, y_k), ou la constante $-\infty$; cette propriété sera parfois seule utilisée, avec la semi-continuité supérieure de φ ; de ce fait certains énoncés s'appliqueront à la classe plus générale, mais non invariante par les transformations linéaires de C^p, formée des fonctions R^{2p}-sousharmoniques qui sont séparément sousharmoniques des couples (x_k, y_k).

[1] On dira encore que la trace $\psi_P(T)$, est localement, soit la constante $-\infty$, soit une fonction sousharmonique. Pour la définition et les propriétés utilisées ici des fonctions plurisousharmoniques, cf. [6, *b*], [6, *c*], [6, *d*]. On rappelle que toute fonction plurisousharmonique (dans C^p) est une fonction R^{2p}-sousharmonique des variables x_k, y_k, $1 \leqslant k \leqslant p$.

La notation F_Δ désigne une famille de fonctions localement bornée supérieurement dans un domaine Δ. On adoptera les définitions suivantes, conformes notamment à [6, *a*] et à [6, *c*] :

1° Par *régularisée supérieure* (ou, simplement, *régularisée* quand il n'y a pas ambiguïté) d'une fonction discontinue, on entend sa plus petite majorante semi-continue supérieurement.

2° Par fonction quasi-sousharmonique, on entend, comme dans [6, *a*] et [6, *c*], une fonction égale à une fonction sousharmonique, sauf aux points d'un ensemble E, de capacité nulle, où elle lui est inférieure : les enveloppes supérieures des familles F_Δ de fonctions sousharmoniques sont quasi-sousharmoniques, au sens précis adopté ici [2]. Si $w(x)$ est quasi-sousharmonique, sa régularisée w^* est, par définition sousharmonique et $E = \mathcal{E}(w < w^*)$ de capacité nulle dans l'espace des (x).

Rappelons que si $w(x)$ est quasi-sousharmonique et si $\lambda(w, x, r)$ désigne la moyenne de w sur la sphère

$$S(x, r) = \mathcal{E}[|x' - x| = r],$$

de centre x, de rayon r, on a, en tout point x :

$$(2, 1) \quad \begin{aligned} w^*(x) &= \lim_{r=0} \lambda(w, x, r) \\ w^*(x) &= \limsup w(x + \xi), \quad \xi \to 0, \quad \xi \in e \end{aligned}$$

où e est un ensemble *non effilé* à l'origine $\xi = 0$. La première égalité est conséquence du fait que $\mathcal{E}(w < w^*)$ est de mesure nulle sur $S(x, r)$ frontière de la boule $B(x, r)$ ce qui entraîne $\lambda(w, x, r) = \lambda(w^*, x, r)$. Pour établir la seconde égalité, rappelons que e est dit effilé à l'origine, au sens de la théorie du potentiel, s'il existe une fonction sousharmonique $u(x)$ au voisinage de $x = 0$, avec

$$u(0) > \limsup u(x), \quad x \to 0, \quad x \in e.$$

De cette définition, il résulte que la réunion de deux ensembles effilés à l'origine est encore effilée à l'origine. Dans (2, 1), l'ensemble $e_1 = \mathcal{E}(w < w^*)$ qui est de capacité nulle est effilé en x; alors $x + e$ étant un ensemble non effilé en x, $e_2 = e - e \cap e_1$

[2] Signalons que M. Brelot emploie ce mot dans un sens différent et appelle quasi-sousharmonique toute fonction qui ne diffère d'une fonction sousharmonique que sur un ensemble de capacité nulle.

ne peut être effilé en x : $w = w^*$ sur e_2 entraîne donc la seconde égalité (2, 1).

Enfin rappelons un résultat de [3] qui nous sera utile dans l'étude des enveloppes supérieures de familles F_Δ non dénombrables de fonctions plurisousharmoniques : soit

$$V^{\mu_t}(x) = \int d\mu_t(a) g(a, x), \qquad \mu_t \geqslant 0$$

une famille ordonnée filtrante décroissante de potentiels de Green dans un domaine de l'espace R^m ayant une fonction de Green $g(a, x)$, avec $|\mu_t|$ borné. Il existe une suite extraite $t = t_n$, $\mu_{t_n} = \mu_n$, soit $V^{\mu_n}(x)$, décroissante, telle que μ_n converge vers μ faiblement et qu'on ait

$$V^{\mu}(x) \leqslant \inf_t V^{\mu_t}(x) \leqslant \lim_n V^{\mu_n}(x).$$

Il en résulte, en faisant le changement de sens nécessaire dans les inégalités pour passer aux fonctions sousharmoniques :

Proposition 2, 1. — *Si $v_t(x)$ est une famille F_D de fonctions sousharmoniques avec :*

$$w(x) = \sup_t v_t(x)$$

il existe une suite $v_n \in F_D$, telle que

$$(2, 2) \qquad \begin{cases} \sup_n v_n(x) = w_1(x) \leqslant w(x) \leqslant w^*(x) \\ w_1^*(x) = w^*(x). \end{cases}$$

Démontrons d'abord qu'on peut, étant donnée une boule B_1, dont l'adhérence $\overline{B}_1$ est compacte dans le domaine D de R^m trouver $v_n \in F_D$ vérifiant (2, 2) dans B_1 : on complète F_D par adjonction des enveloppes supérieures des v_t en nombre fini, puis, si C_1 est une borne supérieure des v_t dans une boule concentrique $B_1' \supset B_1$, on considère la famille des fonctions $v_t' = v_t - C_1$ et on les représente dans B_1 sous la forme

$$v_t' = -V^{\mu_t}$$

où V^{μ_t} est le potentiel d'une mesure $\mu_t > 0$ située dans B_1', avec comme noyau la fonction de Green $g(a, x)$ de B_1'. Alors d'après le théorème de convergence rappelé plus haut, il existe une suite extraite $\mu_n = \mu_{t_n}$ qui converge faiblement vers une limite μ, $-V^{\mu_n}$ étant une suite croissante et l'on a :

$$w_1 - C_1 = \sup(-V^{\mu_n}) = \lim_n(-V^{\mu_n}) \leqslant \sup_t(-V^{\mu_t}) \leqslant -V^{\mu}$$

et $\mathcal{E}(w_1 < C_1 - V^\mu)$ est de R^m-capacité nulle. Chaque $(-V^{\mu_n})$ est l'enveloppe supérieure d'un nombre fini de v'_t; on a donc $w_1 = \sup_q v_q$, pour une sous-famille dénombrable $v_q \in F_D$, ce qui établit (2, 2) dans B_1.

On pourra d'autre part recouvrir D par une famille dénombrable de boules analogues à B_1, compactes dans D soient $B_1, \ldots, B_s \ldots$ avec des constantes $C_1, \ldots, C_s \ldots$ et dans chacune d'elles construire une suite $v_{q,s}$, avec $\sup_q v_{q,s} = w_s$, $w_s^* = w^*$. Il suffira alors de prendre comme famille dénombrable $v_n \in F_D$ de l'énoncé la famille $\{v_{q,s}\}$, où q et s varient tous deux.

On énoncera encore :

Proposition 2, 2. — *Soient $v_t(x)$ une famille F_D de fonctions sousharmoniques dans un domaine D de R^m et ν une mesure positive sur D. A chaque sous-famille $(f) \in F_D$, faisons correspondre les fonctions*

$$(2, 3) \qquad \begin{cases} w_f = \sup v_t & v_t \in (f) \\ w_f^* = \limsup w_f(x+\xi) & \xi \to 0. \end{cases}$$

Si $\mathcal{E}(w_f < w_f^*)$ est de ν-mesure nulle pour toutes les suites extraites de F_D, il est de ν-mesure nulle pour toutes les familles $(f) \in F_D$.

La démonstration est immédiate : (2, 2) entraîne que pour $(f) \in F_D$, il existe une suite $v_n \in (f)$ avec $w_1 = \sup_n v_n$, $w = \sup_f v_t$, et $w_1^* = w^*$. On a alors

$$\mathcal{E}(w < w^*) \subset \mathcal{E}(w_1 < w^*)$$

ce qui établit l'énoncé. Ainsi que le précédent, il n'intervient pas dans les applications faites au § 3. Il est toutefois utile dans le cas d'une famille F_Δ non dénombrable de fonctions plurisousharmoniques v_t pour montrer la mesurabilité de $\sup. v_t$ sur certaines sous-variétés.

Étendons enfin un résultat établi dans [6, *c*], concernant l'intégrale d'une fonction sousharmonique ou quasi-sousharmonique dépendant d'un paramètre t :

Proposition 2, 3 : *Soit $v(x, t)$ une fonction réelle*

$$(-\infty \leqslant v < +\infty),$$

définie pour $x \in D$, $t \in D'$; $v(x, t)$ est pour t fixé une fonction quasi-sousharmonique de $x \in D$ ou la constante $-\infty$; pour x fixé $v(x, t)$ est fonction semi-continue supérieurement de

$t \in D'$; $v(x, t)$ *est borné supérieurement sur tout compact de* $D \times D'$. *Alors si* μ *est une mesure positive à support compact dans* D', *l'intégrale*

$$(2, 4) \qquad w(x) = \int d\mu(t) v(x, t)$$

est soit la constante $-\infty$ *dans* D, *soit une fonction quasi-sousharmonique.*

Pour la démonstration, remarquons d'abord que si $\varphi(t)$ est une fonction semi-continue supérieurement, l'intégrale de Lebesgue $\int d\mu(t)\varphi(t)$ vaut l'intégrale supérieure de Riemann. Soit $P_n = \{e_{n,i}\}$ un partage du support $S(\mu)$ de μ en ensembles disjoints et μ-mesurables, $e_{n,i}$, avec $\sum_i e_{n,i} = S(\mu)$.

Formons la somme de Riemann

$$\sigma(P_n) = \Sigma \mu(e_{n,i}) \sup_{t \in e_{n,i}} \varphi(t).$$

On considérera des partages P_n consécutifs, P_{n+1} résultant de P_n par subdivision des $e_{n,i}$ et l'on suppose que le diamètre maximum d_n des $e_{n,i} \in P_n$ tend vers zéro quand $n \to +\infty$. Dans ces conditions on sait que $\sigma(P_n)$ tend en décroissant vers l'intégrale de Lebesgue $\int \varphi(t)\, d\mu(t)$. Pour appliquer à l'étude de $w(x)$ défini par (2, 4), remarquons que si $v_t(x)$ est une famille F_D de fonctions dont chacune est soit quasi-sousharmonique, soit la constante $-\infty$ dans D, l'enveloppe supérieure

$$\sup v_t(x) = u(x)$$

est quasi-sousharmonique, ou la constante $-\infty$. En effet soit

$$\sup v_t^*(x) = g(x).$$

Il existe une suite extraite $v_{t_n}^* = v_n^*$, avec

$$\sup v_n^*(x) = h(x), \qquad h \leqslant g, \qquad h^* = g^*.$$

Alors $h(x)$ est quasi-sousharmonique (ou $\equiv -\infty$), $\mathcal{E}(h < h^*)$ est de capacité nulle. On a alors

$$\sup v_n(x) \leqslant u(x) \leqslant g(x) \leqslant g^*(x)$$

D'où :

$$\mathcal{E}(u < g^*) \subset \sum_n \mathcal{E}(v_n < v_n^*) + \mathcal{E}(h < g^*).$$

Mais on a $h^* = g^*$, donc $\mathcal{E}(u < g^*)$ est de capacité nulle comme réunion dénombrable de tels ensembles, ce qui établit à la fois que u a pour régularisée g^* et que u est quasi-sousharmonique, à l'exception du cas où toutes les fonctions considérées sont la constante $-\infty$.

Il en résulte que, si l'on calcule l'intégrale (2, 4) à partir des $\sigma(P_n)$, chaque $\sigma(P_n)$ est soit la constante $-\infty$, soit une fonction quasi-sousharmonique de $x \in D$. Il en est donc encore de même de la limite de la suite décroissante $\sigma(P_n)$, ce qui établit l'énoncé. Il donnera lieu à un énoncé analogue particulier au cas plurisousharmonique.

Remarque 2, 1. — La démonstration précédente a montré : si $v_t(x)$ *est une famille* F_D *de fonctions dont chacune est, soit quasi-sousharmonique, soit la constante* $-\infty$ *dans* D, $u(x) = \sup v_t(x)$ *est quasi-sousharmonique ou la constante* $-\infty$.

Si la famille est celle des translatées on a un résultat plus précis :

Soit e *un ensemble de points d'adhérence* $\bar{e}$ *compacte dans* D, *domaine de* R^m, *et* $v(x)$ *une fonction sousharmonique ou quasi-sousharmonique dans* D ; *si* e *n'est effilé en aucun point de sa frontière* f, *alors :*

$$w(x) = \sup_{y \in e} v(x+y)$$

est une fonction sousharmonique continue de x.

En effet, d'après l'hypothèse faite sur e, on a :

$$w(x) = \sup_{y \in e} v(x+y) = \sup_{y \in e} v^*(x+y) = \sup_{y \in \bar{e}} v^*(x+y) = \sup_{y \in f} v^*(x+y)$$

de sorte que w est semi-continue supérieurement. De plus il existe $y_0 \in f$ tel qu'on ait

$$w(x_0) = \sup_{y \in f} v^*(x_0 + y) = v^*(x_0 + y_0).$$

Alors s'il existait une suite $x_n \to x_0$ avec $w(x_n) \leqslant w(x_0) - \alpha$, $\alpha > 0$, on aurait, $w'(y) \leqslant w(x_0) - \alpha$, pour $y \in \bar{e}$, en posant

$$w'(y) = \sup_n v^*(x_n + y).$$

La régularisée w'^* est quasi-sousharmonique ; comme e n'est effilé en aucun point de $\bar{e}$, on aurait, d'après une remarque faite plus haut

$$w'^*(y) \leqslant w(x_0) - \alpha \quad \text{pour} \quad y \in \bar{e}$$

qui entraînerait $w^*(y) \leqslant w(x_0) - \frac{\alpha}{2}$ pour y appartenant à un voisinage ouvert du compact $\bar{e}$, et enfin $\varphi(x) \leqslant w(x_0) - \frac{\alpha}{2}$ pour x appartenant à un voisinage ouvert de $x_0 + \bar{e}$, contrairement à la définition de $w(x_0)$; ainsi w est fonction quasi-sousharmonique continue, donc fonction sousharmonique continue.

Rappelons (cf. [6, *d*]) que pour qu'une fonction soit plurisousharmonique dans un domaine Δ de $C^p = R^{2p}$, il faut et il suffit qu'elle soit sousharmonique et le demeure pour les homéomorphismes linéaires sur les variables complexes de C^p; l'enveloppe supérieure d'une famille F_Δ de fonctions plurisousharmoniques, l'intégrale $w(X) = \int d\mu\,(t)\varphi(X, t)$, où $\varphi(X, t) \in F_\Delta$ et où $\mu > 0$, sont des fonctions plurisousharmoniques *lorsqu'elles sont des fonctions* $w(X)$ *semi-continues supérieurement* (cf. [6, *c*]). De ce qui précède, résulte encore que si l'on considère $w(X) = \sup_{y \in e} \varphi(X + y)$, où φ est plurisousharmonique et e un compact, $w(X)$ est encore plurisousharmonique.

2. Enveloppes supérieures de suites localement bornées supérieurement de fonctions plurisousharmoniques.

Dans ce qui suit on désignera par Δ un domaine de l'espace complexe C^p, par F_Δ une famille localement bornée supérieurement de fonctions définies dans Δ. On commencera par étudier le cas d'une suite F_Δ, de fonctions plurisousharmoniques, en démontrant des propriétés locales de l'enveloppe supérieure

(2, 5) $\qquad w(X) = \sup_n \varphi_n(X), \qquad \varphi_n \in F_\Delta.$

Le domaine Δ pourra être pris sous la forme

$$\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2 \times \ldots \times \Delta_p,$$

produit topologique des domaines $\Delta_k \subset C^1(X_k)$.

Remarquons tout d'abord :

Si l'on a $w = \sup \varphi_n$, *ou les* φ_n *sont des fonctions semi-continues supérieurement, dans* D *et si l'on pose*

(2, 6) $\qquad w'(X) = \sup_{y \in e} w\,(X + y)$

où e *est un ensemble compact dans* Δ, *alors* w' *est encore une fonction de Baire.*

La propriété n'utilise que la semi-continuité des v_n; on a

$$w'(X) = \sup_{y\in e} w(X+y) = \sup_{y\in e} \sup_n v_n(X+y) = \sup_n \sup_{y\in e} v_n(X+y).$$

Or $\sup_{y\in e} v_n(X+y) = v'_n(X)$ est semi-continue supérieurement, e étant compact; donc, finalement, $w' = \sup v'_n$ est une limite croissante de fonctions semi-continues supérieurement.

Régularisées partielles. A côté de la régularisée supérieure $w^*(X) = \limsup_{\xi\to 0} w(X+\xi)$, $\xi \in C^p$, nous considérerons des régularisées partielles obtenues en assujettissant le vecteur ξ à appartenir à un sous-espace complexe. Nous poserons ainsi :

$$(2, 7) \quad w_q(X) = \limsup_{\xi\to 0} w(X+\xi), \qquad \xi \in C^q(X_1, \ldots, X_q).$$

D'après la remarque précédente si w est la fonction définie par (2, 5), les régularisées partielles sont des fonctions de Baire; on a en effet, par exemple,

$$w_q(X) = \lim_n \sup_{\xi\in e_n} w(X+\xi)$$

où e_n est la boule $|\xi| \leqslant \frac{1}{n}$ de l'espace $C^q(X_1, \ldots, X_q)$.

Nous démontrerons maintenant

THÉORÈME 1. — *L'enveloppe supérieure* $w(X)$ *définie par* (2, 5) *où* $v_n(X)$ *est dans* Δ *une suite localement bornée supérieurement de fonctions plurisousharmoniques, possède les propriétés suivantes:*

P_1. — *En tout point* $X \in \Delta$, *on a* $-\infty \leqslant w(X) < +\infty$; $w(X)$ *est borné supérieurement sur tout compact de* Δ; $\mathcal{E}(w = -\infty)$ *est de* R^{2p}*-capacité nulle.*

P_2. — *La restriction de* w *à une droite complexe* $X_k = X_k^0 + a_k T$ *est, localement, soit la constante* $-\infty$, *soit une fonction* $\psi(T)$ *quasi-sousharmonique.*

P_3. — *L'ensemble* $\mathcal{E}(w < w^*)$, *où* w^* *est la régularisée de* w *est la réunion de* p *ensembles* $\eta_1, \ldots, \eta_p$, *appartenant aux classes de Baire, et de* R^{2p}*-capacité nulle,* η_k *étant de plus coupé par les droites complexes* $C^1(X_k)$ *selon des ensembles de* R^2*-capacité nulle;* w^* *est une fonction plurisousharmonique.*

P_4. — *Soit* $X \to X'$ *un homéomorphisme analytique complexe quelconque: alors la fonction transformée* $w'(X') = w[X(X')]$ *possède encore les propriétés* P_1, P_2, P_3.

Démonstration. — P_1 : d'après la définition de $\mathscr{V}(X)$ donnée par (2, 5), $\mathscr{V}(X)$ est localement borné supérieurement; d'autre part les fonctions φ_n sont plurisousharmoniques, donc des fonctions sousharmoniques dans Δ considéré comme un domaine de R^{2p} : $\mathscr{V}(X)$ est donc quasi-sousharmonique, $\mathcal{E}(\mathscr{V} < \mathscr{V}^*)$ est de R^{2p} capacité nulle.

P_2 : la restriction $\varphi_n(X_k^0 + a_k T) = \psi_n(T)$ de la fonction plurisousharmonique φ_n à une droite complexe issue de (X_k^0), de paramètres (a_k) complexes est une fonction R^2-sousharmonique, où la constante $-\infty$, localement; $\mathscr{V} = \sup_n \varphi_n$ a alors pour restriction $\sup_n \psi_n(T)$, qui est une fonction de même nature.

P_3 : Pour établir la propriété P_3, on considérera les régularisées partielles successives de $\mathscr{V}$:

$$\mathscr{V} = \mathscr{V}_0 \leqslant \mathscr{V}_1 \leqslant \mathscr{V}_2 \leqslant \cdots \leqslant \mathscr{V}_q \leqslant \cdots \leqslant \mathscr{V}_q = \mathscr{V}^*$$

où les variables sont considérées dans l'ordre $X_1, X_2, \ldots, X_p$; $\mathscr{V}_q$ défini par (2, 7) est, d'après une remarque précédente, une fonction de Baire. Posons

$$\eta_k = \mathcal{E}(\mathscr{V}_{k-1} < \mathscr{V}_k).$$

On a alors

$$(2, 8) \qquad \mathcal{E}(\mathscr{V} < \mathscr{V}^*) = \sum_1^p \eta_k.$$

On a ainsi décomposé $\mathcal{E}(\mathscr{V} < \mathscr{V}^*)$ en une réunion de p ensembles de Baire, de R^{2p}-capacité nulle. Pour établir la propriété indiquée des η_k on va montrer que la régularisation qui fait passer de $\mathscr{V}$ à $\mathscr{V}^*$ peut être faite en régularisant *successivement par rapport à chacune des variables*, d'ailleurs dans un ordre quelconque; conformément à (2, 7) on appelle *régularisée par rapport à la seule variable* X_k d'une fonction $\mathscr{V}$, *la fonction*

$$(2, 9) \qquad R_k\mathscr{V}(X) = \lim . \sup_{\xi \to 0} \mathscr{V}(X + \xi), \qquad \xi \in C^1(X_k).$$

La méthode qui suit est celle de notre mémoire [6, *c*, IX]; elle utilise les moyennes

$$L(\mathscr{V}, X_k, r_k) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^p \int_0^{2\pi} \cdots, \int_0^{2\pi} \mathscr{V}(X_1 + r_1 e^{i\theta_1}, \ldots, X_p + r_p e^{i\theta_p})\, d\theta_1, \ldots, d\theta_p$$

de $\mathcal{w}$ sur l'arête d'un polycercle

$$P(X_k, r_k) = \mathcal{E}(|X'_k - X_k| \leqslant r_k).$$

On établira successivement :

Proposition 2, 4. — *Si $\mathcal{w}$ est l'enveloppe supérieure* (2, 5) *d'une suite v_n localement bornée supérieurement de fonctions plurisousharmoniques dans Δ, on a pour tout $X \in \Delta$:*

$$(2,\ 10) \qquad \mathcal{w}^*(X) = \lim_{r_k \to 0} L(\mathcal{w},\ X_k,\ r_k).$$

En effet pour $P(X_k, r_k) \subset \Delta$, $L(\mathcal{w}, X_k, r_k)$ existe car $\mathcal{w}$, fonction de Baire, a pour restriction à l'arête du polycercle $P(X_k, r_k)$ une fonction bornée supérieurement, mesurable des $\theta_1, \ldots, \theta_p$; l'intégrale $L(\mathcal{w}, X_k, r_k)$ pour $r_k > 0$, a de plus une valeur finie car il en est ainsi des $L(v_n, X_k, r_k)$. Elle vaut l'intégrale itérée calculée à partir de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{w}(X_1 + r_1 e^{i\theta_1},\ X_2,\ \ldots,\ X_p)\, d\theta_1.$$

Celle-ci est fonction croissante convexe de $\log r_1$; $L(\mathcal{w}, X_k, r_k)$ est donc fonction convexe, croissante de chacune des variables $u_k = \log r_k$. Dans ces conditions, elle a ses nombres dérivés bornés, donc elle est continue de l'ensemble des u_k, et elle est croissante des u_k. La limite au second membre de (2, 10) existe donc; elle vaut au plus $\mathcal{w}^*(X)$, puisque $\mathcal{w}^*$ est la plus petite majorante semi-continue supérieurement de $\mathcal{w}$.

Pour établir l'inégalité de sens contraire, on supposera sans inconvénient $X_k = 0$ et $\mathcal{w} \leqslant 0$ sur un polycercle $P(0, r'_k)$, ce qui entraîne $L(\mathcal{w}, 0, r_k) \leqslant 0$ pour $r_k < r'_k$.

Pour une fonction sousharmonique $v(X) < 0$ dans le cercle $|X| < r'$ de $C^1(X)$, on a la majoration de Poisson :

$$(2,\ 11) \qquad v(X) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{R}\left(\frac{re^{i\theta} + X}{re^{i\theta} - X}\right) v(re^{i\theta})\, d\theta,$$

$\mathcal{R}$ désignant la partie réelle. Pour $|X| \leqslant \tau r$, $0 < \tau < 1$, on obtient

$$v(X) \leqslant \frac{1}{2\pi}\frac{1-\tau}{1+\tau}\int_0^{2\pi} v(re^{i\theta})\, d\theta = \frac{1-\tau}{1+\tau} L(v,\ 0,\ r).$$

En appliquant (2, 11) par rapport aux variables $X_1, \ldots, X_p$, on

obtient pour une fonction plurisousharmonique

$$v(X) = v(X_1, \ldots, X_p) \leqslant 0, \quad \text{cf. [6, } c\text{, p. 310]}:$$

$$v(X) \leqslant \left(\frac{1-\tau}{1+\tau}\right)^p L(v, 0, r_k) \qquad \text{pour} \qquad |X_k| \leqslant \tau r_k.$$

On en déduit

$$w(X) = \sup v_n(X) \leqslant \left(\frac{1-\tau}{1+\tau}\right)^p \sup L(v_n, 0, r_k) \leqslant \left(\frac{1-\tau}{1+\tau}\right)^p L(w, 0, r_k)$$

valable pour $|X_k| < \tau r_k$. Choisissons τ tel qu'on ait

$$1 - \varepsilon < \left(\frac{1-\tau}{1+\tau}\right)^p < 1.$$

On aura :

$$w^*(0) = \limsup_{\xi \to 0} w(\xi) \leqslant (1-\varepsilon) L(w, 0, r_k).$$

L'inégalité étant valable quel que soit $\varepsilon > 0$, on obtient

$$w^*(0) \leqslant L(w, 0, r_k), \qquad r_k > 0,$$
$$w^*(0) \leqslant \lim_{r_k \to 0} L(w, 0, r_k)$$

qui achève la démonstration de la Proposition 2, 4.

On l'utilisera pour établir :

Proposition 2, 5_a. — *Si w est l'enveloppe supérieure (2, 5) d'une suite F_Δ de fonctions plurisousharmoniques on a :*

$$(2, 12) \qquad w^* = R_p[R_{1,\ldots,p-1} w]$$

qui exprime qu'on passe de w à w^* par l'opération $w \to R_{1,\ldots,p-1} w = u$, suivie de $u \to R_p u = u' = w^*$, où

$$(2, 13) \qquad u(X) = R_{1,\ldots,p-1} w(X) = \limsup_{\xi \to 0} w(X + \xi),$$
$$\xi \in C^{p-1}(X_1, \ldots, X_{p-1})$$

est la régularisée de w par rapport à l'ensemble des variables $(X_1, \ldots, X_{p-1})$ et où

$$(2, 13) \qquad u'(X) = R_p u(X) = \limsup_{\xi \to 0} u(X + \xi), \quad \xi \in C^1(X_p)$$

est la régularisée de la précédente par rapport à la seule variable X_p

La démonstration se fait en utilisant (2, 10) et le théorème de Lebesgue : la restriction de $w(X)$ à X_p constant est en effet

soit la constante $-\infty$, soit l'enveloppe supérieure d'une famille F_Δ de fonctions plurisousharmoniques; on suppose $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2 \times \cdots \times \Delta_p$. On a donc d'après la proposition 2, 4:

$$u(X) = \lim_{r_1=0,\ r_{p-1}=0} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{p-1} \int_0^{2\pi} \cdots$$

$$\cdots \int_0^{2\pi} w(X_1 + r_1 e^{i\theta_1}, \ldots, X_{p-1} + r_{p-1} e^{i\theta_{p-1}}, X_p)\, d\theta_1 \ldots d\theta_{p-1}.$$

La fonction $u(X) = u(X_1, \ldots, X_p)$ est d'après (2, 13), à $X_1 \ldots X_{p-1}$ constants, une fonction quasi-sousharmonique de X_p, ou la constante $-\infty$ dans Δ_p. On a alors d'après (2, 1):

$$u'(X) = R_p u(X_2, \ldots, X_p)$$

$$(2,\ 14) \qquad = \lim_{r_p \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(X_1, \ldots, X_{p-1}, X_p + r_p e^{i\theta_p})\, d\theta_p,$$

$$u'(X) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^p \lim_{r_p \to 0} \int_0^{2\pi} d\theta_p \lim_{r_1 \to 0, \ldots, r_{p-1} \to 0} \int_0^{2\pi} \cdots$$

$$\cdots \int_0^{2\pi} w(X_1 + r_1 e^{i\theta_1}, \ldots, X_p + r_p e^{i\theta_p})\, d\theta_1 \ldots d\theta_{p-1}.$$

Le second membre s'exprime en appliquant successivement les théorèmes de Lebesgue et de Fubini, par:

$$\lim_{r_p \to 0} \lim_{r_1 \to 0, \ldots, r_{p-1} \to 0} L(w, X, r_k).$$

où L est fonction croissante des r_k; d'après la Proposition précédente, on a donc:

$$u'(X) = R_p u(X) = R_p[R_{1, \ldots, p-1} w](X) = w^*(X)$$

ce qui établit l'énoncé.

Proposition 2, 5_b. — *Si w est l'enveloppe supérieure définie à la Proposition 2, 5_a, on a*

$$w^* = R_{t_1} R_{t_2} \ldots R_{t_p} w$$

où R_k désigne l'opération de régularisation par rapport à la seule variable X_k, définie par (2, 9).

Démontrons par récurrence, l'énoncé étant vrai pour $p = 1$; s'il est vérifié pour $p - 1$, on a, en considérant la restriction $\tilde{w}$ de w à X_p constant:

$$(2,\ 15) \qquad R_{1, \ldots, p-1} \tilde{w} = R_{p-1} R_{p-2} \ldots R_1 \tilde{w}.$$

En effet $\tilde{w}$ est soit la constante $-\infty$ dans $\Delta' = \Delta_1 \times \Delta_2 \cdots \times \Delta_{p-1}$,

soit l'enveloppe supérieure d'une suite $F_{\Delta'}$ de fonctions plurisousharmoniques $\tilde{\varphi}_n$ restrictions des φ_n.

On aura alors d'après (2, 12) :

$$w^* = R_p[R_{1,\dots,p-1}w] = R_pR_{p-1}\dots R_1 w.$$

D'autre part on peut opérer sur les variables X_k une permutation quelconque sans modifier les hypothèses faites sur w, ni sur w^*, ce qui établit l'énoncé.

Pour achever la démonstration de la propriété P_3, reprenons la suite

$$(2, 16) \quad w = w_0 \leqslant w_1 \leqslant w_2 \leqslant \cdots \leqslant w_q \leqslant \cdots \leqslant w_p = w^*$$

où w_q est défini par (2, 7). On a d'après la Proposition 2, 5_b :

$$w_q = R_q w_{q-1} = \lim\sup_{\xi \to 0} w_{q-1}(X_1, \dots X_q + \xi, X_{q+1}, \dots X_p).$$

Mais w_q, pour X_q seul variable, est fonction quasi-sousharmonique (ou $\equiv -\infty$) dans Δ_q; donc $\mathcal{E}(w_{q-1} < w_q)$ est coupé par les espaces $C^1(X_q)$ selon des ensembles de R^2-capacité nulle. Ainsi dans la décomposition (2, 8) on a

$$\mathcal{E}(w < w^*) \subset \Sigma\eta_k$$

où $\eta_k = \mathcal{E}(w_{k-1} < w_k)$ est de R^{2p}-capacité nulle et est coupé par les espaces $C^1(X_k)$ selon des ensembles de R^2-capacité nulle. De plus la régularisée $w^*(X)$ vérifie d'après (2, 10), $L(w, X_k, r_k)$ étant fonction croissante des r_k :

$$(2, 17) \quad w^*(X) \leqslant L(w, X, r_k) \leqslant L(w^*, X, r_k)$$

qui établit $w^*(X) \leqslant L(w^*, X, r_k)$; cette inégalité demeure valable après un changement d'axes quelconque et l'on sait qu'elle entraîne, si w^* est semi-continue supérieurement, que w^* soit plurisousharmonique (cf. [6, c_1]). La propriété P_3 est donc établie.

La propriété P_4 est immédiate, un homéomorphisme analytique complexe $X \to X'$, (c'est-à-dire une transformation analytique complexe biunivoque) conservant le caractère plurisousharmonique des fonctions φ_n (cf. [6, c_1]) et toutes les propriétés utilisées. Le théorème 1 est donc établi.

Remarque. — *a*) La régularisée partielle $w_q(X_1, \dots X_p)$ est plurisousharmonique (ou $\equiv -\infty$) dans $\Delta_1 \times \cdots \times \Delta_q$ à $X_{q+1} \dots X_p$ constants.

b) L'opération R_q de régularisation par rapport à la variable X_q peut être faite, la variable ξ étant prise dans $C^1(X_q)$ sur un ensemble e_q non effilé à l'origine $X_q = 0$:

$$R_q w(X_1 \ldots X_p) = \limsup_{\xi \to 0} w(X_1, \ldots X_q + \xi, \ldots X_p),$$
$$\xi \in e_q \subset C^1(X_q).$$

D'où le résultat utile, mais assez peu précis :

Corollaire. — *L'ensemble* $w(X + Y) < w^*(X) - \alpha$, $\alpha > 0$, *ne peut contenir le produit* $e_1 \times \ldots \times e_q \times \ldots \times e_p$ *d'ensembles non effilés à l'origine dans les espaces* $R^2(X_q)$.

3. Les classes (M_0) et (M). — Avant de tirer des conséquences du théorème 1, on va montrer que les propriétés P_1, P_2, P_3, P_4 sont conservées par deux opérations simples.

Définition. — *On appellera* (M_0) *une classe de fonctions à valeurs réelles comprenant les fonctions plurisousharmoniques et fermée par les opérations suivantes effectuées en infinité dénombrable* :

A_1. *Construction de l'enveloppe supérieure d'une suite* $w_n \in (M_0)$ *localement bornée supérieurement dans un domaine* Δ *de* C^p.

A_2 : *Construction de la limite* w (*autre que la constante* $-\infty$) *d'une suite décroissante* $w_n \in (M_0)$.

Nous démontrerons alors :

Théorème 2. — *Les fonctions de la classe* (M_0) *possèdent les propriétés* P_1, P_2, P_3, P_4.

Démonstration. — Il suffit d'établir que A_1 et A_2 maintiennent les propriétés en question.

Pour P_1 : il suffit de remarquer que ni A_1 ni A_2 ne font sortir de la classe des fonctions R^{2p}-sousharmoniques (dont on exclut la constante $-\infty$).

Pour P_2 : on applique la remarque précédente aux restrictions des fonctions à une droite complexe quelconque.

Pour démontrer P_3, on va établir que si $w_n \in (M_0)$ est une suite F_Δ, et si $w = \sup_n w_n$, $\mathcal{E}(w < w^*)$ a encore une décomposition (2, 8). Il suffit d'établir qu'on a :

$$\mathcal{E}(w < w^*) \subset \sum_1^p \eta_k$$

les η_k ayant les propriétés indiquées. A la suite $w_n \in (M_0)$ faisons correspondre la suite w_n^* des régularisées plurisousharmoniques. On pose :

$$w = \sup w_n \leqslant \sup w_n^* = w' \leqslant w'^*$$

On a alors :

$$(2, 18) \quad \mathcal{E}(w < w'^*) \subset \sum_1^\infty \mathcal{E}(w_n < w_n^*) + \mathcal{E}(w' < w'^*).$$

Mais les w_n^* sont une suite F_Δ de fonctions plurisousharmoniques; chacun des ensembles du second membre a alors les propriétés à établir et l'on a :

$$(2, 19) \qquad \mathcal{E}(w < w'^*) \subset \sum_{k=1}^{k=p} \left[\sum_{n=1}^\infty \eta_{k,n} + \eta'_k \right] = \sum_1^p \eta_k$$

où η_k a bien les propriétés voulues : être de R^{2p}-capacité nulle, appartenir aux classes de Baire et être coupé par les sous-espaces complexes $C^1(X_k)$ selon des ensembles de R^2-capacité nulle, ces propriétés se conservant par l'addition dénombrable. En même temps on voit que $w'^* = w^*$, $\mathcal{E}(w < w'^*)$ étant de R^{2p}-capacité nulle; donc l'opération A_1 conserve P_3.

Pour voir que A_2 conserve également P_3, on procède de même; à la suite w_n décroissante et tendant vers $w (\not\equiv -\infty)$ on associe la suite décroissante des w_n^*. On a

$$\lim w_n = w \leqslant \lim w_n^* = w' \leqslant w'^*;$$

on conclut alors comme plus haut à partir de (2, 18) et de (2, 19). Il est d'autre part immédiat que P_4 est conservé par A_1 et A_2 ce qui achève la démonstration de l'énoncé.

On va étendre les propriétés précédentes aux enveloppes supérieures de familles F_Δ quelconques de fonctions plurisousharmoniques.

Définition. — *On appelle* (M) *une classe de fonctions à valeurs réelles, contenant les fonctions plurisousharmoniques et fermée par les opérations* A'_1 *et* A_2 :

A'_1 : *Construction de l'enveloppe supérieure* w_f *d'une famille* (f) *de fonctions* $v_t \in (M_0)$, *localement bornée supérieurement dans un domaine* Δ *de* C^p.

Nous démontrerons encore :

Théorème 3. — *Toute fonction* w *de la classe* (M) *possède les propriétés* P_1, P_2, P'_3, P_4, *où* P'_3 *s'énonce :*

P'_3 : $\mathcal{E}(w < w^*)$ *est contenu dans un ensemble de Baire possédant les propriétés de décomposition énoncées* P_3 *et il existe une fonction* w' *de classe* (M_0), *telle qu'on ait*

$$w' \leqslant w \leqslant w^*; \quad w'^* = w^*. \tag{2, 20}$$

La démonstration repose sur la Proposition (2, 1); nous montrerons d'abord que A'_1 conserve la propriété P'_3. Soit w_t une famille F_Δ de fonctions de classe (M), w^*_t leurs régularisées; par hypothèse à w_t correspond w'_t de classe (M_0) avec

$$w'_t \leqslant w_t \leqslant w^*_t; \quad w'^*_t = w^*_t.$$

Dans ces conditions montrons que

$$w = \sup_t w_t.$$

possède encore la propriété P'_3 : posons $w_1 = \sup w^*_t$, et $w_2 = \sup w^*_{t_n}$ pour une suite (t_n) extraite de la famille w^*_t et choisie, selon la Proposition (2, 1) de manière qu'on ait $w^*_2 = w^*_1$. On a alors $\sup w_{t_n} \leqslant w \leqslant w_1$; $w^*_1 = w^*_2$ est plurisousharmonique; de plus :

$$\sup w_{t_n} \leqslant \sup w^*_{t_n} = w_2 \leqslant w_1, \quad w^*_1 = w^*_2$$

$$\mathcal{E}(w < w^*_1) \subset \sum_1^\infty \mathcal{E}(w_{t_n} < w^*_{t_n}) + \mathcal{E}(w_2 < w^*_2) = E. \tag{2, 21}$$

Par hypothèse chacun des ensembles écrits au second membre a la propriété P_3 ; donc $\mathcal{E}(w < w^*_1)$ est contenu dans un ensemble de Baire, de R^{2p}-capacité nulle, qui admet la décomposition $E = \sum_1^p \eta_k$, où chaque η_k est de plus coupé par les espaces $C^1(X_k)$ selon des ensembles de R^2-capacité nulle. Comme on a $w < w^*_1$, on voit que $w^*_1 = w^*_2 = w^*$ est la fonction plurisousharmonique régularisée de w^*. Enfin on a aussi :

$$w' = \sup_n w'_{t_n} \leqslant \sup_n w_{t_n} \leqslant \sup_n w^*_{t_n} = w_2 \tag{2, 22}$$

ce qui entraîne $w' \leqslant w \leqslant w^*$, avec :

$$\mathcal{E}(w' \subset w^*) \subset \sum_1^\infty \mathcal{E}(w'_{t_n} > w^*_n + \mathcal{E}(w_2 < w^*_2) \tag{2, 23}$$

Le second membre est encore de R^{2p}-capacité nulle; on a donc

$v'^* = v^*$; v' d'après (2, 22) est de classe (M_0), ce qui établit que A' conserve P'_3, et l'on a [3]

$$v' \leqslant v \leqslant v^* = v'^*, \qquad v' \in (M_0).$$

D'autre part A'_1 conserve P_1 : en effet

$$\mathcal{E}(v = -\infty) \subset \mathcal{E}(v^* = -\infty) + \mathcal{E}(v < v^*)$$

est de R^{2p}-capacité nulle. De même A'_1 conserve P_2 car le raisonnement précédent, appliqué aux restrictions $\tilde{v}_t$ de v_t à une droite complexe, montre que sup $\tilde{v}_t$ est quasi-sousharmonique ou la constante $-\infty$. Enfin l'invariance (propriété P_4) de la classe (M) par les homéomorphismes analytiques complexes est évidente.

On a vu plus haut que l'opération A_2 conserve les propriétés P_1, P_2, P_4. Reste à montrer qu'elle conserve P'_3, c'est-à-dire que si v_n est une suite décroissante de fonctions de (M), $v = \lim v_n$ a encore la propriété P'_3; les v_n^* forment une suite décroissante; on a $\lim v_n^* = v_1$, ($v_1 \not\equiv -\infty$, sinon $v \equiv -\infty$); v_1 est plurisousharmonique; $v < v_1$. D'autre part

$$\mathcal{E}(v < v_1) \subset \sum_1^{\infty} \mathcal{E}(v_n < v_n^*),$$

montre que $\mathcal{E}(v \leqslant v_1)$ est de R^{2p}-capacité nulle, de sorte qu'on a

$$v^* = v_1$$

et que $\mathcal{E}(v < v^*) \subset \sum\limits_1^{\infty} \mathcal{E}(v_n < v_n^*)$ possède la propriété de décomposition $\mathcal{E}(v < v^*) = \sum\limits_1^{p} \eta_k$, où η_k, de R^{2p}-capacité nulle, est coupé par les $C^1(X_k)$ selon des ensembles de R^2-capacité nulle. De plus si à v_n on associe la fonction de Baire v'_n, avec

$$v'_n < v_n, \qquad v'^*_n = v^*_n$$

on a, $v' = \lim v'_n$, $v'^* = v^* = v_1$ comme plus haut et

$$\mathcal{E}(v' < v^*) \subset \Sigma\mathcal{E}(v'_n < v'^*_n)$$

avec $v' \leqslant v \leqslant v^* = v'^*$, ce qui établit P'_3, la fonction v' étant de la classe (M_0). Finalement le théorème 3 est établi.

(3) *Remarque.* — On a établi chemin faisant : si v_t est une famille F_Δ de fonctions de classe (M), $v = \sup v_t$, $v_1 = \sup v_t^*$ sont de classe (M) et ont des régularisées $v^* = v_1^*$ identiques.

4. Restrictions à R^p et aux variétés S. — Considérons, comme dans l'Introduction un domaine Δ de C^p, coupant le sous-espace réel R^p selon un domaine D non vide, et une famille F_Δ (c'est-à-dire localement bornée supérieurement) de fonctions plurisousharmoniques. Les enveloppes supérieures de sous-familles $(f) \in F_\Delta$, les lim sup de suites extraites de F_Δ appartiendront à la classe (M); pour une telle fonction $\mathscr{V} \in$ (M) on cherchera à déduire du comportement de la restriction $\tilde{\mathscr{V}}(x)$ de $\mathscr{V}(X)$ à R^p, des majorations uniformes, sur un *voisinage ouvert de* D *dans* C^p pour les fonctions de la sous-famille (f) ou de la suite considérée. Cette recherche fait intervenir l'ensemble $\mathcal{E}(\mathscr{V} < \mathscr{V}^*)$, $\mathscr{V}^*$ étant la régularisée de $\mathscr{V}(X)$ dans Δ; une majoration de $\mathscr{V}^*(x)$ sur R^p entraîne ensuite une majoration de $\mathscr{V}^*(X)$ dans un voisinage *ouvert de* C^p.

Nous établirons d'abord :

Théorème 4. — *Soit* Δ *un domaine de* C^p *coupant le sous-espace réel* R^p *selon un domaine de* R^p, *soit* $D = \Delta \cap R^p$, *et* $\mathscr{V}(X)$ *une fonction de classe* (M) *dans* Δ. *Alors*

$$\mathcal{E}(\mathscr{V} < \mathscr{V}^*) \cap R^p$$

est localement la somme de p *ensembles* $\eta_1, \ldots, \eta_p$, η_k *étant coupé par les droites réelles de* R^p *parallèles à l'axe des* x_k *selon des ensembles de* R^2*-capacité nulle* ([4]). *De plus un homéomorphisme analytique réel quelconque* $x'_k = \varphi_k(x_j)$ *pour lequel on a* $\dfrac{D(x'_k)}{D(x_j)} \neq 0$ *conserve cette propriété.*

En effet P'_3 entraîne l'existence d'une fonction $\mathscr{V}' \in (M_0)$ avec $\mathscr{V}' \leqslant \mathscr{V} \leqslant \mathscr{V}^* = \mathscr{V}'^*$, $\mathcal{E}(\mathscr{V} < \mathscr{V}^*) \subset \mathcal{E}(\mathscr{V}' < \mathscr{V}'^*) \subset \sum_1^p \eta'_k$ où η'_k, ensemble de Baire de R^{2p}-capacité nulle, est coupé par les espaces $C^1(X_k)$ selon des ensembles de R^2-capacité nulle. Considérons les restrictions $\tilde{\eta}'_k$ à R^p : $\tilde{\eta}'_k$ est coupé par les droites $R^1(x_k)$ selon des ensembles de R^2-capacité nulle; posons

$$\eta_k = \mathcal{E}(\mathscr{V} < \mathscr{V}^*) \cap \eta'_k.$$

([4]) On dira qu'un ensemble de points sur une droite réelle est de R^2-capacité nulle s'il est de capacité nulle dans un plan R^2 passant par cette droite.

On a $\tilde{\eta}_k \subset \tilde{\eta}'_k$ et $\mathcal{E}(w < w^*) \cap \mathrm{R}^p = \sum_1^p \tilde{\eta}_k$, ce qui établit la première partie de l'énoncé.

Pour établir la seconde partie remarquons que l'homéomorphisme $x'_k = \varphi_k(x_j)$ se prolonge en un homéomorphisme complexe, $\mathrm{X}'_k = \varphi_k(\mathrm{X}_j)$, les φ_k étant développables en série de Taylor à coefficients réels au voisinage d'un couple $x'^0 = \varphi(x^0)$ de points correspondants : $\dfrac{\mathrm{D}(\mathrm{X}'_k)}{\mathrm{D}(\mathrm{X}_j)}$ demeure en effet non nul, sous l'hypothèse faite sur un voisinage de x^0 dans C^p; il existe alors deux *voisinages respectivement de x^0 et de x'^0 dans* C^p entre lesquels $\mathrm{X}'_k = \varphi_k(\mathrm{X}_j)$ établit un homéomorphisme analytique complexe conservant R^p et se réduisant sur R^p à l'homéomorphisme analytique réel $x'_k = \varphi_k(x_j)$: la propriété P_4 entraîne alors la propriété énoncée.

Il en résulte, $\tilde{w}^*$ étant la restriction de w^* à R^p :

THÉORÈME 5. — *Si* $w(\mathrm{X})$ *est de classe* (M) *dans* Δ, *avec* $\Delta \cap \mathrm{R}^p = \mathrm{D}$, *sa restriction* $\tilde{w}(x)$ *à* R^p *est* R^p*-mesurable; l'ensemble* $\mathcal{E}(\tilde{w} < \tilde{w}^*)$ *est de mesure nulle; l'intégrale* $\int_{\mathrm{E}} \tilde{w}(x)\, d\tau_x = \int_{\mathrm{E}} \tilde{w}^*(x)\, d\tau_x$ *a une valeur finie pour tout ensemble mesurable* $\mathrm{E} \subset \mathrm{D}$ *de mesure* $\tau_x(\mathrm{E})$ *non nulle.*

En effet si w est de classe (M_0), $\tilde{w}(x)$ est une fonction de Baire, donc mesurable; on a $\mathcal{E}(\tilde{w} < \tilde{w}^*) = \sum_1^p \tilde{\eta}_k$, où $\tilde{\eta}_k$ est un ensemble de Baire; les sections de $\tilde{\eta}_k$ par les droites $\mathrm{R}^1(x_k)$ de R^p sont des ensembles de Baire de R^2-capacité nulle; ils sont donc de R^1-mesure nulle. Si $\psi_k(x_1, \ldots, x_p)$ est la fonction caractéristique de $\tilde{\eta}_k$ mesurable pour la mesure $d\tau_x = dx_1 \ldots dx_p$ de R^p, on a, d'après le théorème de Fubini :

$$\int \psi_k\, d\tau_x = \int dx_1 \ldots dx_{k-1}\, dx_{k+1} \ldots dx_p \int \psi_k(x_1, \ldots, x_p)\, dx_k = 0$$

qui montre $\tau(\tilde{\eta}_k) = 0$; $\mathcal{E}(\tilde{w} < \tilde{w}^*)$ est donc de R^p-mesure nulle, ce qui établit

$$(2,\ 24) \qquad \int_{\mathrm{E}} \tilde{w}(x)\, d\tau_x = \int_{\mathrm{E}} \tilde{w}^*(x)\, d\tau_x,$$

pour tout ensemble E qui est R^p-mesurable. On a vu de plus (cf. [6, *d*]) que la restriction d'une fonction plurisousharmonique $w^*(\mathrm{X})$ à R^p était une fonction $w^*(x)$ localement sommable sur R^p :

l'intégrale qui figure au second membre de (2, 24) a donc une valeur finie pour tout ensemble E de mesure $\tau_x(E)$ non nulle.

Si maintenant ϖ est de classe (M), il existe d'après P'_3 une fonction $\varpi' \in (M_0)$ avec $\varpi' \leqslant \varpi \leqslant \varpi^* = \varpi'^*$, et l'on a d'après (2, 24)

$$\int_E \tilde{\varpi}'(x)\, d\tau_x = \int_E \tilde{\varpi}(x)\, d\tau_x = \int_E \tilde{\varpi}'^*\, d\tau_x,$$

pour tout ensemble E qui est R^p-mesurable, ce qui établit l'énoncé.

Les résultats précédents se transposent à une classe de variétés dans C^p qui sont localement l'image analytique complexe de R^p.

Définition. — *Un sous-ensemble* A *de* C^p, *est dit une variété* S, *s'il existe un recouvrement dénombrable, localement fini de* A *par des cartes* u_i, *où l'on a* $u_i = \Delta_i \cap A$, $\Delta_i = T_i(\Delta_0)$; Δ_0 *est un domaine de* C^p, T_i *un homéomorphisme analytique complexe* $\Delta_0 \rightarrow \Delta_i$, *avec* $T_i(u_0) = u_i$, *et* $u_0 = \Delta_0 \cap R^p$.

L'arête d'un polycercle $|X_j| \leqslant 1$, $1 \leqslant j \leqslant p$, définie par $X_j = e^{it_j}$ est évidemment une variété S. De même l'arête des polyèdres analytiques de la forme $\Pi = \mathcal{E}(|f_j(X_1, \ldots, X_p)| \leqslant 1)$, $1 \leqslant j \leqslant p$, où l'on suppose que les f_j établissent une correspondance biunivoque entre Π et le polycercle précédent.

Une carte u_i sur A, variété S, est munie de coordonnées locales réelles $(x_{k,i})$ obtenues en attribuant au point de u_i les coordonnées du point de u_0 dans $R^p(x)$ qui lui correspond par T_i^{-1}. Si un point appartient à $u_i \cap u_j$ sur A, il existe dans C^p des ouverts Ω_{ij}, Ω_i, Ω_j et deux homéomorphismes complexes T_i, T_j, tels que l'on ait $\Omega_i \subset \Delta_0$, $\Omega_j \subset \Delta_0$, et

$$\Omega_{ij} = T_i(\Omega_i) = T_j(\Omega_j).$$

D'où $\Omega_i = T_i^{-1}T_j(\Omega_j)$, ce qui établit :

Sur une variété S, *le changement de coordonnées locales (réelles) s'interprète comme la restriction à* R^p *d'un homéomorphisme analytique complexe conservant* R^p.

Sur un compact de $u_i \cap u_j$, le déterminant $\dfrac{D[(x)^{(i)}]}{D[(x)^{(j)}]} = \dfrac{d\tau_i}{d\tau_j}$ est compris entre deux nombres strictement positifs. Si l'on munit chaque carte u_i de la mesure $d\tau_i = dx_{1,i} \ldots dx_{p,i}$, le changement de coordonnées locales, ne conserve pas la mesure,

mais conserve cependant la classe des ensembles de mesure nulle. On pourra énoncer :

DÉFINITION. — *Une partie* E *de* A, *variété* S, *est dite de mesure nulle sur* A *si* E *est de mesure nulle sur chaque carte* u_i *de* A *rapportée à ses coordonnées locales.*

Le théorème 5 entraîne alors :

THÉORÈME 6. — *Si* $\varphi(X)$ *est de classe* (M) *dans un domaine de* C^p *contenant* A, *variété* (S), $\mathcal{E}(\varphi < \varphi^*)$ *est de mesure nulle sur* A; φ *a sa restriction* $\tilde{\varphi}$ *à* A *mesurable et* $\int_E \tilde{\varphi} d\tau_x = \int_E \tilde{\varphi}^* d\tau_x$ *a une valeur finie pour tout ensemble* E *de mesure non nulle sur* A.

COROLLAIRE. — $\mathcal{E}(\varphi < \varphi^*)$ *est de mesure nulle sur les arêtes des polyèdres analytiques* Π *définis plus haut. Pour un polycercle* $\mathcal{E}(|X'_k - X_k| \leqslant r_k)$, *on a en particulier* $L(\varphi, X_k, r_k) = L(\varphi^*, X_k, r_k)$.

Pour les applications, il est utile de remarquer que les Propositions $(2, 5_a)$ et $(2, 5_b)$ s'étendent aux fonctions de classe (M); on remarquera aussi que la trace de $\varphi \in (M)$ sur un sous-espace C^q, $q < p$, est, localement, soit la constante $-\infty$, soit de classe (M) dans C^q.

THÉORÈME 7. — *Si* φ *est de classe* (M) *dans* Δ, *et si l'on applique à* φ *les régularisations successives;* $R_{i_1}, \ldots, R_{i_p}$ *définies par :*

$$R_k\varphi = \limsup \varphi(X_1, \ldots, X_k + \xi_k, \ldots, X_p), \qquad \xi \in C^1(X_k)$$

on a $\varphi^* = R_{i_1} \ldots R_{i_p}\varphi$.

En effet la Proposition 2, 4 s'applique à $\varphi \in (M)$, car on a (cf. la corollaire précédent) : $L(\varphi^*, X_k, r_k) = L(\varphi, X_k, r_k)$, d'où

$$\varphi^*(X) = \lim_{r_k=0} L(\varphi^*, X_k, r_k) = \lim_{r_k=0} L(\varphi, X_k, r_k).$$

D'autre part pour $\varphi \in (M_0)$ la démonstration de la Proposition 2, 5_a s'applique sans modification, l'intégrale au second membre de (2, 14) portant sur une fonction de Baire, donc mesurable. Si $\varphi \in (M)$, on utilise la Propriété P'_3 : il existe $\varphi' \in (M_0)$ avec $\varphi' \leqslant \varphi$, $\varphi'^* = \varphi^*$. Alors le théorème 7 étant vrai pour φ', on a

$$\varphi'^* = R_{i_1} \ldots R_{i_p}\varphi' \leqslant R_{i_1} \ldots R_{i_p}\varphi \leqslant \varphi^*$$

et l'égalité des extrêmes établit l'énoncé.

Corollaire 1. — *On peut passer de w à w^*, par la suite* (2, 16) *obtenue en régularisant successivement w sur des ensembles $e_1 \in C^1(X_1) \ldots, e_p \in C_1(X_p)$ non effilés à l'origine.*

On aura ainsi :

$$(2, 16) \qquad w = w_0 \leqslant w_1 \ldots \leqslant w_{p-1} \leqslant w_p = w^*,$$
$$w_q = R_q w_{q-1} = \limsup_{\xi \to 0} w_{q-1}(X_1, \ldots, X_q + \xi, \ldots X_p),$$
$$\xi \to 0, \qquad \xi \in e_q$$

ou encore

$$w^*(X) = \limsup_{\xi_p \to 0} \limsup_{\xi_{p-1} \to 0} \ldots \limsup_{\xi_p \to 0} w(X_1 + \xi_1, \ldots X_p + \xi_p)$$

avec $\xi_1 \in e_1, \ldots, \xi_p \in e_p$, e_q étant non effilé à l'origine dans $C^1(X_q)$.

Corollaire 2. — *Si w est de classe* (M) *l'ensemble des* X *tels que :*

$$w(X_0 + X) \leqslant w^*(X_0) - \alpha, \qquad \alpha > 0.$$

ne peut contenir le produit $e_1 \times \cdots \times e_p$ si chaque e_k est non effilé à l'origine dans $C^1(X_k)$.

Corollaire 3. — *Si x^0 est un point de $R^p \subset C^p$, et $w \in$ (M), $\mathcal{E}[w(x^0 + y) < w^*(x^0) - \alpha]$, $\alpha > 0$, $y \in R^p$, ne peut contenir un ouvert de R^p contenant x^0.*

Corollaire 4. — *Pour passer de w à w^* en un point $x^0 \in R^p$, on peut « régulariser » sur l'espace réel R^p, c'est-à-dire qu'on a*

$$w^*(x^0) = \limsup_{y \to 0} w(x^0 + y), \qquad y \in R^p.$$

En effet $\mathcal{E}[w(x) < w^*(x^0) - \alpha]$, pour $\alpha > 0$, ne peut contenir le produit d'intervalles $I_k \in R^1(x_k)$ ouverts, I_k ayant x_k^0 comme point intérieur.

Ces résultats s'appliquent en particulier si w est plurisousharmonique. Rappelons qu'un ensemble e est dit [cf. (6, *d*)] C^n-effilé à l'origine s'il existe une fonction V(X), plurisousharmonique dans un voisinage de l'origine, vérifiant :

$$V(0) > \limsup V(X), \qquad X \to 0, \quad X \in e.$$

On obtient alors

COROLLAIRE 5. — *Un ensemble C^n-effilé à l'origine ne peut contenir le produit $e_1 \times \cdots \times e_p$ d'ensembles e_k, e_k étant non effilé à l'origine dans $C^1(X_k)$; en particulier il ne peut contenir un ouvert de R^p contenant l'origine.*

5. — Intégrale d'une fonction de classe (M).

La proposition 2, 3 a un équivalent sous la forme suivante :

THÉORÈME 8. — *Soit $\varpi(X, t)$ une fonction réelle*

$$(-\infty \leqslant \varpi < +\infty),$$

définie pour $X \in \Delta$, $t \in D'$; $\varpi(X, t)$ est pour t fixé une fonction de classe (M) dans Δ ou la constante $-\infty$; pour X fixé, $\varpi(X, t)$ est fonction semi-continue supérieurement de $t \in D'$; on suppose $\varpi(X, t)$ borné supérieurement sur tout compact de $\Delta \times D'$. Alors si μ est une mesure positive à support compact dans D', l'intégrale

$$\varpi_0(X) = \int d\mu(t)\, \varpi(X, t)$$

est soit la constante $-\infty$ dans Δ, soit une fonction de classe (M).

La démonstration se fait comme celle de la Proposition 2, 3, la seule modification étant que les sommes $\sigma(P_n)$ sont des fonctions (M) — ou la constante $-\infty$.

6. — Application à des problèmes de majoration.

Comme première application du théorème 5 démontrons :

THÉORÈME 9. — *Soit $\varpi(X)$ une fonction de classe (M) dans un domaine Δ de C^p, $\Delta \cap R^p = D$ étant un domaine de R^p; soit $g(X)$ une fonction continue dans Δ. Si $\mathcal{E}[\varpi(x) < g(x)]$ est de R^p-mesure positive sur R^p, il existe dans Δ un ouvert (pour la topologie C^p) qui intersecte R^p et sur lequel on a $\varpi(X) < g(X)$.*

En effet on a $\varpi(X) \leqslant \varpi^*(X) \leqslant g(X)$; d'autre part $\mathcal{E}[\varpi(x) < \varpi^*(x)]$ étant de R^p-mesure nulle, il existe au moins un point x^0 sur $D = R^p \cap \Delta$, en lequel on a $\varpi^*(x_0) < g(x^0)$; $\varpi^*(X)$ étant semi-continue supérieurement et $g(X)$ continue, il existe alors un voisinage de x^0 dans C^p sur lequel on a encore $\varpi^*(X) < g(X)$.

Le problème posé dans l'Introduction est résolu par l'énoncé suivant :

Théorème 10. — *Soit* $v_t(X)$, $a < t < b$, *une famille localement bornée supérieurement de fonctions plurisousharmoniques (ou plus généralement de fonctions de classe* (M)) *dans un domaine* Δ *de* C^p, $\Delta \cap R^p = D$ *étant un domaine non vide de* R^p. *Soit* $g(X)$ *une fonction continue dans* Δ; *si l'on a sur* D

$$(2, 25) \qquad w(x) = \limsup_{t \to b} v_t(x) \leqslant g(x)$$

alors :

i) *A* $\varepsilon > 0$ *donné correspond un ouvert* Ω *de la topologie* C^p, *avec* $D \subset \Omega \subset \Delta$ *tel qu'on ait* $w^*(X) < g(X) + \varepsilon$ *pour* $X \in \Omega$.

ii) *A un compact* K *donné dans* D (*pour la topologie* R^p), *et à* $\varepsilon > 0$, *correspond* $t_0(K, \varepsilon)$ *tel qu'on ait*

$$(2, 26) \quad v_t(x) \leqslant g(x) + \varepsilon \qquad \text{pour} \qquad x \in K, \quad t > t_0(K, \varepsilon).$$

iii) *A un compact* K *donné dans* D *et à* $\varepsilon > 0$ *correspondent* t_0 *et un domaine de* C^p, *soit* $\Delta_1 \subset \Delta$, *tel qu'on ait* $K \subset \Delta_1$ *et*

$$(2, 27) \quad v_t(X) \leqslant g(X) + \varepsilon \qquad \text{pour} \qquad X \in \Delta_1, \quad t > t_0.$$

Démonstration. — On peut se ramener au cas où $v_t(X)$ est plurisousharmonique car $\limsup_{t \to b} v_t(x) \leqslant g(x)$, entraîne

$$w'(x) = \limsup_{t \to b} v_t^*(x) \leqslant g(x).$$

En effet si b_n, $a < b_n < b$, est une suite de nombres tendant vers b en croissant, et si l'on pose

$$w_n(X) = \sup_t v_t(X) \qquad \text{et} \qquad w'_n(X) = \sup_t v_t^*(X), \quad b_n < t < b$$

on a (cf. remarque p. 535) :

$$w_n^*(X) = w_n'^*(X).$$

Il en résulte : $\lim w_n^*(X) = \lim w_n'^*(X)$, c'est-à-dire $w^*(X) = w'^*(X)$.

Ainsi $w = \limsup v_t$ et $w' = \limsup v_t^*$ ont même régularisée. D'autre part, d'après le Corollaire 4 du théorème 7, on peut calculer cette régularisée par régularisation sur le sous-espace R^p. Donc en un point $x \in D$, on a

$$w^*(x) = \limsup_{y \to 0} w(x + y), \qquad y \in R^p.$$

Alors $w(x) \leqslant g(x)$, $g(x)$ étant continue, entraîne

$$w^*(x) \leqslant g(x),$$

et par suite

$$w'(x) \leqslant w^*(x) \leqslant g(x),$$

de sorte que (2, 25) est encore vérifié si on remplace v_t par v_t^*; les majorations à obtenir résulteront d'autre part des majorations correspondantes sur les v_t^*. On est donc ramené au cas où les $v_t(X)$ sont plurisousharmoniques.

La partie i) est une conséquence du théorème 9 : on a $w^*(x) \leqslant g(x)$ pour $x \in D$; tout $x \in D$ a donc un voisinage ouvert dans C^p sur lequel on a encore $w^*(X) < g(X) + \varepsilon$; il existe dans Δ un ouvert de C^p, soit Ω, avec $D \subset \Omega \subset \Delta$, sur lequel l'inégalité est vérifiée.

Démontrons iii) : D'après i), tout $x \in D$ a un voisinage dans C^p sur lequel on a :

$$(2, 28) \qquad w(X) < g(X) + \frac{\varepsilon}{2} = g'(X)$$

donc il existe un domaine Δ' de C^p, avec $K \subset \Delta' \subset \Delta$ dans lequel on a (2, 28). On choisit alors un domaine Δ_1 de C^p d'adhérence compacte dans Δ' soit :

$$K \subset \Delta_1 \subset \overline{\Delta}_1 \subset \Delta'$$

et on utilise maintenant le fait que les $v_t(X)$ sont des fonctions sousharmoniques dans Δ' considéré comme un domaine de R^{2p} : d'après la propriété que nous avons appelée « propriété de Hartogs », (cf. [6, *a*] et [5]) des familles localement bornées supérieurement de telles fonctions, la majoration dans Δ'

$$\limsup v_t(X) \leqslant g'(X)$$

où g' est continue, entraîne qu'à ε et au compact $\overline{\Delta}_1$ corresponde un t_0, tel qu'on ait

$$(2, 29) \qquad v_t(X) \leqslant g'(X) + \frac{\varepsilon}{2} = g(X) + \varepsilon$$

pour $X \in \Delta_1$, $t > t_0(\Delta_1, \varepsilon)$, ce qui établit iii), Δ_1 étant un ouvert de C^p contenant le compact K donné dans R^p.

Si maintenant au lieu du compact $\overline{\Delta}_1$. on considère $K \subset \Delta'$, la « propriété de Hartogs » montre encore qu'il existe $t_0(K, \varepsilon)$ tel qu'on ait

$$w(x) < g'(x) + \frac{\varepsilon}{2} = g(x) + \varepsilon$$

pour $x \in K$, $t > t_0(K, \varepsilon)$, ce qui établit ii).

Remarque. — Le théorème 10 s'applique aux suites $v_n(X)$ localement bornées supérieurement de fonctions plurisousharmoniques et de fonctions (M) : $w(x) = \limsup_n v_n(x) \leqslant g(x)$, $g(X)$ continue, entraîne l'existence d'un indice N à partir duquel (2, 26) respectivement (2, 27), sont vérifiés.

7. Il est possible de préciser les majorations données en utilisant des configurations particulières. Considérons dans le plan de la variable complexe $X = x + iy$, le demi-cercle

$$\Gamma_a = \mathcal{E}[|X|^2 \leqslant a^2,\ y \leqslant 0]$$

et posons $\psi = \arg^t \dfrac{X - a}{X + a}$, $X \in \mathring{\Gamma}_a$; $\dfrac{\pi}{2} < \psi < \pi$.

Si on calcule au point $X \in \mathring{\Gamma}_a$ la valeur dh de la fonction harmonique dans $\mathring{\Gamma}_a$ qui vaut 1 sur le segment $[x', x' + dx')$ du diamètre de $\mathring{\Gamma}_a$, et zéro sur le reste de la frontière de Γ_a, on obtient

$$dh(x', X) = \frac{1}{\pi}\, d \arg^t \left[\left(\frac{x' - a}{x' + a}\right)^2 - \left(\frac{X - a}{X + a}\right)^2\right],$$

$$dh(x', X) = \frac{y}{\pi} \frac{(a^2 - x^2)(a^2 - r^2)\, dx'}{[(x - x')^2 + y^2][(a^2 - xx')^2 + y^2 x'^2]} = \gamma(x', X)\, dx'.$$

On notera $\chi(\theta, X) d\theta$, la mesure harmonique en $X \in \mathring{\Gamma}_a$ de l'arc θ', $\theta' + d\theta'$ du demi-cercle frontière de Γ_a. Alors pour une fonction $v(X)$ sousharmonique ou quasi-sousharmonique sur Γ_a, on a

$$(2, 30) \quad v(X) \leqslant \int_{-a}^{+a} v(x')\, \gamma(x', X)\, dx' + \int_0^{\pi} v(ae^{i\theta'})\, \chi(\theta', X)\, d\theta' = I(v) + J(v)$$

avec

$$I(1) = \frac{2\psi}{\pi} - 1, \qquad J(1) = 2 - \frac{2\psi}{\pi}.$$

Si maintenant on considère le produit

$$\Gamma = \Gamma_{a_1} \times \cdots \times \Gamma_{a_p} = \mathcal{E}[|X_k] \leqslant a_k,\ y_k \geqslant 0, \qquad 1 \leqslant k \leqslant p]$$

et si l'on pose

$$(I_1 + J_1) \ldots (I_p + J_p)(w) = \sigma_w$$

on a, en itérant (2, 30), pour une fonction φ plurisousharmonique :

$$\varphi(X) \leqslant \sigma_v(X) \tag{2, 31}$$

pour $X \in \mathring{\Gamma}$. Mais (2, 31) est valable aussi pour une fonction w de classe (M); l'arête de Γ est une réunion de 2^p variétés de classe S; on a donc

$$\sigma_w(X) = \sigma_{w^*}(X),$$
$$w(X) \leqslant w^*(X) \leqslant \sigma_{w^*}(X) = \sigma_w(X).$$

D'où

$$w(X) \leqslant \sigma_w(X) = \sigma_{w^*}(X). \tag{2, 32}$$

A partir de (2, 32) et en opérant comme dans (6, d) on retrouve aisément le résultat que $w(x)$, pour w de classe (M), est localement sommable sur R^p. On pourra au lieu de (2, 30), utiliser la forme simplifiée de la majoration :

$$w(X) \leqslant m\left(\frac{2\psi}{\pi} - 1\right) + M\left(2 - \frac{2\psi}{\pi}\right)$$

valable pour $X \in \mathring{\Gamma}_a$, $\varphi(x) \leqslant m$ sur le diamètre, $\varphi(X) < M$, $(M > m)$, sur $\mathring{\Gamma}_a$. On obtient pour $X \in \Gamma$, p quelconque :

$$w(X) \leqslant m\left(\frac{2\psi_1}{\pi} - 1\right) \cdots \left(\frac{2\psi_p}{\pi} - 1\right)$$
$$+ M\left[1 - \left(\frac{2\psi_1}{\pi} - 1\right) \cdots \left(\frac{2\psi_1}{\pi} - 1\right)\right]$$

où $\psi_k = \operatorname{Arg}^t \dfrac{X_k - a_k}{X_k + a_k}\cdot$ Considérons le domaine

$$\Gamma' = \mathcal{E}[|X_k| \leqslant b_k < a_k,\ 1 \leqslant k \leqslant p]$$

avec $b_k = a_k \operatorname{tg} u_k$, $0 \leqslant u_k \leqslant \dfrac{\pi}{4}\cdot$ On aura alors, en posant

$$\lambda = \left(1 - \frac{4u_1}{\pi}\right) \cdots \left(1 - \frac{4u_p}{\pi}\right)$$

$$w(X) \leqslant m\lambda + M(1 - \lambda). \tag{2, 33}$$

D'où l'énoncé suivant, pour deux polycercles centrés à l'origine ou en un même point de l'espace réel R^p :

Proposition 2, 6. — *Si* $\mathcal{V}(X)$ *est une fonction de classe* (M) *sur le polycercle* $\Pi = \mathcal{E}[|X_k| \leqslant a_k]$ *et y vérifie* $\mathcal{V}(X) \leqslant M$; *si d'autre part on a:*

$$\mathcal{V}(x) \leqslant m,$$

sur $\Pi \cap R^p$, *alors elle vérifie*

$$\mathcal{V}(X) \leqslant \mathcal{V}^*(X) \leqslant m + \varepsilon < M,$$

dans le polycercle concentrique $|X_k| \leqslant b_k < a_k$ *avec* $b_k = a_k \operatorname{tg} u$, *où l'on a*

$$(2, 34) \qquad 0 \leqslant u \leqslant \frac{\pi\varepsilon}{4p\,(M - m)}, \qquad \varepsilon < M - m.$$

Il suffit en effet de vérifier que la condition (2, 34) assure

$$1 \geqslant \lambda \geqslant 1 - \frac{\pi\varepsilon}{M - m},$$

ce qui entraîne (2, 33) : on a ainsi un moyen de préciser les ouverts de C^p dont l'existence a été établie précédemment.

3. — Application aux fonctions analytiques de variables réelles.

7. Définition 3, 1. — *Soit* $f(x, u) = f(x_1, \ldots, x_p, u_1, \ldots u_q)$ *une fonction de* 2 *groupes de variables* $x = (x_k)$, $u = (u_j)$, *réelles; f sera dite analytique de x et de u séparément dans un ouvert* D *du produit* $R^{p+q}_{x,u} = R^p_x \times R^q_u$ *si :*

a) *pour chaque u fixé quelconque, les fonctions* $f_u(x)$ *sont analytiques des* x_k *sur les ouverts sections de* D *obtenus en donnant aux* u_j *des valeurs constantes.*

b) *pour chaque x fixé quelconque, les fonctions* $f_x(u)$ *sont analytiques des* u_j *sur les ouverts sections de* D *obtenus en donnant aux* x_k *des valeurs constantes.*

On établira que l'appartenance des fonctions $f_x(u)$ et $f_u(x)$ à certaines classes de fonctions analytiques de variables réelles entraine l'analyticité de f par rapport à *l'ensemble* des $p + q$ variables x, u. Il s'agit là de propriétés locales et on les étudiera dans un domaine $D = D_x \times D_u$, produit de deux domaines D_x, D_u pris respectivement dans R^p_x et R^q_u et homéomorphes à des boules.

Tirons d'abord les conséquences du fait que $f_u(x)$ et $f_x(u)$ sont supposés analytiques. Pour u fixé, $u \in D_u$, et pour $x^0 \in D_x$, il existe un polycercle maximal, de rayons égaux, soit

$$|X_k - x_k^0| < \rho_u(x^0)$$

dans lequel la série de Taylor de $f_u(x)$ est convergente; elle s'écrit

$$(3, 1) \qquad \sum_{(\alpha)} A^{(\alpha)}(u_1, \ldots, u_q)(X_1 - x_1^0)^{\alpha_1}, \ldots, (X_p - x_p^0)^{\alpha_p}.$$

Le nombre $\rho_u(x^0)$ est l'écart (5) de $x^0 \in D_x$ à la frontière du domaine d'holomorphie de $f_u(x)$. Si K_x est un compact dans D_x, on posera

$$(3, 2) \qquad \inf_{x \in K_x} \rho_u(x) = \rho_u(K_x).$$

Le nombre $\rho_u(K_x)$ ainsi défini est positif et non nul; c'est l'écart de $K_x \subset D_x$ à la frontière du domaine d'holomorphie de $f_u(X)$. Pour K_x fixé dans D_x, faisons varier u sur un compact K_u dans D_u. Lorsque $f(x, u)$ est analytique dans $D_x \times D_u$ de *l'ensemble* des variables, x, u, le nombre $\rho_u(K_x)$ a, pour $u \in K_u$ une borne inférieure non nulle; en effet le compact $K_x \times K_u$ dans $D_x \times D_u$ est à une distance positive de la frontière du domaine d'holomorphie de f dans l'espace C^{p+q}; plus précisément si l'on considère le développement de Taylor de f selon les puissances de $(X_i - x_i^0)$, $(U_j - u_j^0)$, pour $x^0 \in K_x$, $u^0 \in K_u$, et si $r(x^0, u^0)$ est le rayon du polycercle maximum

$$|X_i - x_i^0| < r, \qquad |u_j - u_j^0| < r$$

dans lequel f est holomorphe, $r(x, u)$ a pour $(x, u) \in K_x \times K_u$, un minimum non nul $r(K_x \times K_u)$ et l'on a

$$(3, 3) \qquad \inf_{u \in K_u} \rho_u(K_x) \geqslant r(K_x \times K_u) > 0,$$

ce qui établit l'assertion.

De même une fonction $f_x(U)$ est holomorphe dans un polycercle maximal $|U_j - u_j^0)| < \rho_x(u^0)$ et pour $u^0 \in K_u$, $\rho_x(u^0)$

(5) Par écart de $X = (X_k)$ à un ensemble η, ou à un point, dans C^p on entend ici le sup. des $r \geqslant 0$ tels que le polycercle $|X'_k - X_k| < r$ ne rencontre pas η. On ne suppose pas les domaines d'holomorphie des fonctions $f_u(x)$ ou $f_x(u)$ univalents.

a un minimum non nul, $\rho_x(K_u)$; on a encore si f est analytique de l'ensemble (x, u) :

$$(3, 4) \qquad \inf_{x \in K_x} \rho_x(K_u) \geqslant r(K_x \times K_u) > 0.$$

Ainsi :

Proposition 3, 1. — *Une condition nécessaire pour que $f(x, u)$, supposée analytique des variables x et u séparément, soit analytique de l'ensemble des variables x, u dans $D_x \times D_u$ est que les rayons d'holomorphie $\rho_u(x)$ et $\rho_x(u)$ aient une borne inférieure non nulle quand x et u parcourent deux compacts quelconques K_x, K_u, pris respectivement dans D_x et D_u.*

Il est bien connu qu'une fonction f, analytique de x et de u séparément, même si $|f|$ est borné, n'est pas nécessairement analytique de l'ensemble des variables, x, u. Ainsi la fonction définie par :

$$f(x, u) = \left(\frac{x^2 - u^2}{x^2 + u^2}\right)^2 \qquad \text{pour} \qquad x^2 + u^2 \neq 0,$$
$$f(0, 0) = 1,$$

vérifie $|f| \leqslant 1$ et est analytique de x, u séparément pour $-1 < x < +1$, $-1 < u < 1$. Toutefois si K_x et K_u sont des segments contenant l'origine, (3, 3) n'est pas satisfait car $f_u(x)$ est une fraction de pôles $x = \pm ui$, et $\rho_u(K_x) \to 0$ quand $u \to 0$; $f(x, u)$, défini ainsi, n'est donc pas analytique de l'ensemble (x, u) dans un domaine de R^2 contenant $x = 0$, $u = 0$. L'exemple s'étend à un nombre quelconque de variables en remplaçant x^2 par $\sum_1^p x_i^2$, u^2 par $\sum_1^q u_j^2$.

On mettra en évidence des classes $\mathfrak{L}$ de fonctions analytiques de variables réelles, telles que les conditions $f_x(u) \in \mathfrak{L}$, $f_u(x) \in \mathfrak{L}$, entraînent que $f(x, u)$ soit analytique de l'ensemble des variables x, u, où $x = (x_1, \ldots, x_p)$ et $u = (u_1, \ldots, u_q)$.

8. Les classes $\mathfrak{L}$, sont caractérisées par trois conditions, dont la première découle de la condition nécessaire énoncée plus haut.

Définition 3, 2. — *Un ensemble $\mathcal{E}$ de fonctions analytiques $\varphi(x) = \varphi(x_1, \ldots, x_p)$ définies dans un domaine D de R^p est dit une classe $\mathfrak{L}$ dans D ou une classe $(\mathfrak{L}, D)$ si :*

i) *Au domaine* D *de* R^p *est associée une famille* Φ *de polycercles ouverts* $|X_k - x_k^0| < \rho(x^0)$, *centrés sur* D; *tout point* $x^0 \in D$ *est centre d'un tel polycercle de rayons non nuls; la famille* Φ *ne dépend que de* $\mathfrak{L}$ *et de* D *et toute fonction* $\varphi \in \mathfrak{L}$ *est holomorphe dans les polycercles de* Φ. *On désignera par* $\Omega(D)$ *la réunion des polycercles de* Φ; $\Omega(D)$ *est un domaine dans* C^p *et toute* $\varphi \in \mathfrak{L}$ *s'y prolonge en une fonction holomorphe.*

ii) *Si* φ_1 *et* φ_2 *et appartiennent à* $\mathfrak{L}$, $a(\varphi_2 - \varphi_1)$ *appartient* à $\mathfrak{L}$ *pour toute constante a complexe.*

iii) *A tout compact* Γ *dans* $\Omega(D)$ *correspond un compact* $G \subset D$ *et un coefficient numérique* C_Γ *tel qu'on ait, pour toute* $\varphi \in \mathfrak{L}$, *et tout* $X \in \Gamma$:

$$|\varphi(X)| \leqslant C_\Gamma \sup_{x' \in G} |\varphi(x')|. \tag{3, 5}$$

Le coefficient C_Γ ne dépend, pour $\mathfrak{L}$, D, donnés que de la configuration de Γ dans $\Omega(D)$. D'autre part la correspondance $\Gamma \to G$ ou $G = \psi(\Gamma)$ entre le compact Γ de $\Omega(D)$ dans C^p et le compact $G \subset D$ de l'espace réel a la propriété suivante. *Pour tout compact* $K \subset D$, *on a* $\psi(K) = K$ *et la correspondance* ψ *est continue au voisinage du couple* $K \to K$: *à tout voisinage* V (*de la topologie* R^p) *du compact* $K \subset D$, *correspond un voisinage* Λ *de* K (*dans la topologie* C^p) *tel qu'on ait* $\psi(\Gamma) \subset V$ *pour* $\Gamma \subset \Lambda$.

Les applications $D \to \Omega(D)$, $\Gamma \to G(\Gamma)$, et les constantes C_Γ seront appelés les éléments de la classe $(\mathfrak{L}, D)$.

Remarques. — 1° On pourra se contenter de considérer les polycercles maximaux de la famille Φ.

2° Soit $f_0 \in \mathfrak{L}$: ii) exprime que, quand f décrit $\mathfrak{L}$, f-f_0 décrit un espace vectoriel sur le corps des complexes.

3° Les fonctions harmoniques dans D forment une classe $(\mathfrak{L}, D)$. La famille Φ est alors constituée par les polycercles centrés sur D, de rayons égaux, intérieurs à la cellule d'harmonicité de D (cf. [6, *h*]) et la condition (3, 5) est vérifiée, plus généralement, sur tout compact Γ intérieur à la cellule d'harmonicité de D; la majoration (3, 5) s'obtient par la représentation intégrale de $f(X)$ en fonction des valeurs $f(x)$ sur la frontière de G, supposée régulière.

Il en est de même pour les fonctions polyharmoniques

d'ordre m quelconque; elles sont holomorphes dans la cellule d'harmonicité de D; une majoration du type (3, 5), existe encore (cf. [6, f,]).

Il existe des classes ($\mathfrak{L}$, D) composées de solutions d'équations aux dérivées partielles linéaires : les éléments de la classe, au sens précisé plus haut, sont donnés à partir de l'équation pour les G, Γ, compacts, à frontière suffisamment régulière.

9. Propriétés des classes $\mathfrak{L}$. — Donnons brièvement quelques conséquences de la définition précédente.

Proposition 3, 2. — *Si l'on complète une classe* ($\mathfrak{L}$, D) *par adjonction des limites des suites* $\varphi_n \in (\mathfrak{L}, \mathrm{D})$, *uniformément convergentes sur tout compact de* D, *l'ensemble obtenu forme une classe* ($\overline{\mathfrak{L}}$, D) *qui a les mêmes éléments que la classe* ($\mathfrak{L}$, D).

En effet, soit Γ un compact de $\Omega(\mathrm{D})$; il lui correspond un compact G dans D, par la correspondance $\Gamma \to \mathrm{G}$, de ($\mathfrak{L}$, D), et l'on a

$$(3,\ 6) \qquad |\varphi_{n+s}(\mathrm{X}) - \varphi_n(\mathrm{X})| \leqslant \mathrm{C}_\Gamma \sup_{x' \in \mathrm{G}} |\varphi_{n+s}(x') - \varphi_n(x')|.$$

La suite φ_n est donc une suite de Cauchy sur tout compact de $\Omega(\mathrm{D})$ et converge vers une fonction $\varphi(\mathrm{X})$ holomorphe dans $\Omega(\mathrm{D})$. D'autre part si $\overline{\varphi}$ et $\overline{\varphi}'$ sont deux fonctions de ($\overline{\mathfrak{L}}$, D), on a

$$\overline{\varphi} = \lim \varphi_n; \qquad \overline{\varphi}' = \lim \varphi'_n,$$

avec $\varphi_n \in (\mathfrak{L}, \mathrm{D})$, $\varphi'_n \in (\mathfrak{L}, \mathrm{D})$ et pour toute constante a, $a(\varphi - \varphi') = \lim a(\varphi_n - \varphi'_n)$ appartient à ($\overline{\mathfrak{L}}$, D). Enfin la condition iii) et (3, 5) se conservent par passage à la limite uniforme sur les compacts, ce qui achève la démonstration. On pourra donc ne considérer que des classes ($\mathfrak{L}$, D) complétées au sens de la proposition (3, 2).

Proposition 3, 3. — *Si un ensemble* $\mathcal{E}$ *de fonctions est défini dans la réunion* $\mathrm{D}_1 + \mathrm{D}_2$ *de deux domaines* D_1, D_2 *de* R^p, *d'intersection non vide, et si les restrictions des fonctions de* $\mathcal{E}$ *à* D_1 *et* D_2 *constituent des classes* ($\mathfrak{L}_1$, D_1) *et* ($\mathfrak{L}_2$, D_2) *au sens de la définition* 3, 2, *alors* $\mathcal{E}$ *est une classe* ($\mathfrak{L}$, D) *dans la réunion* $\mathrm{D} = \mathrm{D}_1 \cup \mathrm{D}_2$.

En effet on satisfera à la condition i) de la définition 3, 2

en prenant $\Omega(D) = \Omega(D_1) \cup \Omega(D_2)$ par réunion des deux familles Φ_1 et Φ_2 de polycercles. D'autre part si Γ est un compact dans $\Omega(D)$ ainsi défini, il est la réunion d'un nombre fini de compacts Γ_s situés dans $\Omega(D_1)$ ou $\Omega(D_2)$, et à Γ_s correspond alors, selon le cas dans D_1 ou dans D_2, un compact G_s, de toute manière contenu dans $D = D_1 \cup D_2$, avec un coefficient $C_{\Gamma_s} = C_s$, de manière qu'on ait :

$$(3, 7) \qquad |\varphi(X)| \leqslant C_s \sup_{x' \in G_s} |\varphi(x')|; \qquad X \in \Gamma_s,$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{E}$. On associera alors à Γ le compact $G = \cup G_s$ dans $D = D_1 + D_2$ et le coefficient $C_\Gamma = \max_s . C_s$. On a ainsi prouvé l'existence de la propriété iii); on peut d'ailleurs préciser complètement la correspondance $\Gamma \to G$ de $(\mathfrak{L}, D)$, en procédant à partir d'une décomposition simpliciale donnée (S) de C^p, assez fine, pour qu'un simplexe de (S) soit contenu dans $\Omega(D_1)$ ou dans $\Omega(D_2)$, et prenant pour compacts Γ_s des éléments de (S) : la correspondance $\Gamma_s \to G_s$ et les C_s sont alors déterminés par $(\mathfrak{L}, D_1)$ ou $(\mathfrak{L}, D_2)$ et le procédé détermine l'application $\Gamma \to G$, et les coefficients C_Γ de $(\mathfrak{L}, D)$.

Proposition 3, 4. — *Si un ensemble $\mathcal{E}$ de fonctions définies dans* D *constitue une classe* $(\mathfrak{L}, D)$ *les restrictions des $f \in \mathcal{E}$ à un sous-domaine* $D' \subset D$ *constituent une classe* $(\mathfrak{L}', D')$.

La classe $(\mathfrak{L}, D)$ détermine une famille Φ de polycercles dans lesquels les $f \in (\mathfrak{L}, D)$ sont holomorphes; soit Ω' le domaine de C^p recouvert par ceux qui sont centrés sur D'. En général, à un compact $\Gamma \subset \Omega'$, $(\mathfrak{L}, D)$ associera un compact G de D qui ne sera plus un compact dans D'. On considérera alors une suite D'_n, d'ouverts relativement compacts dans D' tendant en croissant vers D' : cette suite peut être déterminée à partir d'une suite (S_n) de divisions simpliciales successives de R^p, en prenant pour D'_n la réunion des simplexes de (S_n) d'adhérence compacte dans D'. A D_n correspond un nombre $\alpha_n > 0$, tel qu'au compact Γ_n: $[x \in \overline{D}_n,\ |y| \leqslant \alpha_n]$ soit associé, d'après la propriété iii), et par la correspondance $\Gamma \to G$ de la classe $(\mathfrak{L}, D)$, un compact $G_n \subset D'$. La réunion des Γ_n est d'intérieur non vide dans C^p et contient D'. On définit alors $\Omega(D')$, relatif à la classe $(\mathfrak{L}', D')$ comme la réunion

des polycercles $|X_k - x_k^0| < r$, pour $x^0 \in D'$, qui sont contenus dans $\sum_n \Gamma_n$. Un compact Γ dans $\Omega(D')$ est recouvert alors par un nombre fini de Γ_s; si $C_s = C_{\Gamma_s}$ est le coefficient attribué dans $(\mathfrak{L}, D)$, on a la majoration (3, 7) pour la restriction à Γ_s de $\varphi \in (\mathfrak{L}, D)$. Finalement pour définir les éléments de $(\mathfrak{L}', D')$, on associera à un compact $\Gamma \subset \Omega(D')$ décomposé sous la forme $\Sigma\Gamma_s$, le compact ΣG_s dans D' et le coefficient $C_\Gamma = \max_s C_s$; on obtiendra un procédé régulier déterminant complètement les éléments de $(\mathfrak{L}', D')$ en considérant successivement les Γ_n, et retenant, dans l'ordre, ceux qui ont en commun avec Γ un point intérieur non encore recouvert par les Γ_n précédents.

Des propositions 3, 3 et 3, 4, il résulte que, pour un ensemble de fonctions définies dans un domaine de R^p, « former une classe $\mathfrak{L}$ » est une propriété locale. Toutefois on a vu que les éléments de la classe sont modifiés par le passage à la restriction à un sous-domaine.

On énoncera encore.

Proposition 3, 5. — *Pour qu'un ensemble $\mathcal{E}$ de fonctions définies dans un domaine* D *de* R^p *forme une classe* $(\mathfrak{L}, D)$, *il faut et il suffit qu'il existe un recouvrement de* D *par des domaines localement compacts d_s, les restrictions des fonctions de $\mathcal{E}$ aux d_s formant des classes* $(\mathfrak{L}_s, d_s)$.

La condition est nécessaire d'après la proposition 3, 4. Elle est suffisante; en effet soit $\Omega(D)$ la réunion des polycercles ouverts formant les $\Omega(d_s)$: toute fonction $\varphi \in \mathcal{E}$ est holomorphe dans $\Omega(D)$. De plus un compact Γ dans $\Omega(D)$ est la réunion d'un nombre fini de Γ_s, où Γ_s est compact dans $\Omega(d_s)$. A Γ_s correspond G_s dans la classe $(\mathfrak{L}_s, d_s)$, et un coefficient $C_s = C_{\Gamma_s}$. On associera alors comme plus haut à Γ la réunion des G_s, compacte dans D, et le coefficient $C_\Gamma = \max_s C_s$, ce qui établit que $\mathcal{E}$ est une classe $(\mathfrak{L}, D)$.

Remarque. — L'exemple des fonctions harmoniques montre que $\Omega(D)$ peut être un domaine de C^p strictement plus grand que la réunion des $\Omega(d_s)$ et l'application $\Gamma \to G$, G compact dans D, peut s'étendre à des compacts Γ de $\Omega(D)$ qui ne sont pas contenus dans la réunion des $\Omega(d_s)$.

PROPOSITION 3, 6. — *Pour toute fonction f appartenant à une classe* ($\mathcal{L}$, D) *d'éléments* $\Omega(D)$, $G(\Gamma)$, C_Γ, *et sur tout compact* Γ *dans* $\Omega(D)$, *il existe une majoration des dérivées partielles*

$$D^{(\alpha)}f = \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_p}f}{\partial X_1^{\alpha_1}\ldots\partial X_p^{\alpha_p}}; \quad (\alpha) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p).$$

Elle est de la forme :

$$(3, 8) \quad |D^{(\alpha)}f(X)| \leqslant C_{\Gamma'}[\sup_{x'\in G'}|f(x')|]\,\delta^{-|\alpha|}\alpha_1!, \ldots, \alpha_p!.$$

On pose : $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p$; Γ' *est un compact de* $\Omega(D)$, *dont l'intérieur* $\mathring{\Gamma}'$ *contient* Γ *ainsi que tout polycercle de rayons* δ *centré sur* Γ; G' *est le compact de* D *associé à* Γ' *par la correspondance* $G(\Gamma)$ *de* ($\mathcal{L}$, D).

En effet la formule de Cauchy appliquée à l'arête d'un polycercle $|X'_k - X_k| \leqslant \delta$, de centre $X = (X_k) \in \Gamma$ donne :

$$|D^{(\alpha)}f(X)| \leqslant \delta^{-|\alpha|}\sup_{X\in\Gamma'}|f(X)|\,\alpha_1!, \ldots, \alpha_p!$$

et, en tenant compte de (3, 5), on obtient (3, 8).

PROPOSITION 3, 7. — *Si l'on considère un ensemble* f_ι *de fonctions d'une classe* ($\mathcal{L}$, D), *pour lequel* $|f_\iota(x)|$ *est borné sur tout compact* G *de* D *par un nombre* M_G *ne dépendant que de* G, *alors si l'on pose*

$$A_\iota^{(\alpha)}(X) = \frac{D^{(\alpha)}f_\iota(X)}{\alpha_\iota!, \ldots, \alpha_p!}$$

les fonctions $\frac{1}{|\alpha|}\log|A_\iota^{(\alpha)}(X)|$ *sont des fonctions plurisousharmoniques dans* $\Omega(D)$, *bornées supérieurement dans leur ensemble sur tout compact de* $\Omega(D)$ — *donc une famille* F_Δ *de fonctions plurisousharmoniques dans* $\Omega(D) = \Delta$.

En effet de (3, 8), on déduit pour $X \in \Gamma$, Γ compact dans $\Omega(D)$:

$$(3, 9) \quad \frac{1}{|\alpha|}\log|A^{(\alpha)}(X)| \leqslant -\log\delta + \varepsilon(|\alpha|)$$

où $\varepsilon(|\alpha|) = |\alpha|^{-1}[\log C_{\Gamma'} + \log M_{G'}]$ ne dépend pas de f_ι et est borné par un nombre indépendant de (α) et de f_ι.

4. Nous démontrerons alors le théorème suivant :

THÉORÈME 11. — *Soit* $f(x, u) = f(x_1, \ldots, x_p, u_1, \ldots, u_p)$ *une fonction des* $p + q$ *variables réelles,* x, u, *définie dans le domaine produit* $D_x \times D_u$.

Si à u *constant les fonctions* $f_u(x)$ *forment une classe* $(\mathcal{L}, D_x)$ *et si, à* x *constant les fonctions* $f_x(u)$ *forment une classe* $(\mathcal{L}', D_u)$, $f(x, u)$ *est analytique de l'ensemble des* $p + q$ *variables* x, u.

On supposera, puisqu'il s'agit d'établir une propriété locale, que D_x et D_u sont, respectivement dans R^p_x et R^q_u, homéomorphes à des boules. On établira plusieurs lemmes.

LEMME 3, 1. — *Sous les hypothèses du théorème* 11, *à tout domaine* D'_x, *d'adhérence* $\overline{D}'_x$ *compacte dans* D_x, *et à tout ouvert* $O_u \subset D_u$, *on peut faire correspondre un domaine* $G_u \subset O_u \subset D_u$, *et un entier* N *tels qu'on ait*

$$(3, 10) \qquad |f(x, u)| \leqslant N$$

pour $x \in \overline{D}'_x$, $u \in \overline{G}_u$.

En effet posons :

$$\psi(u) = \sup_{x \in \overline{D}'_x} |f(x, u)|.$$

Alors $\psi(u)$ est fonction semi-continue inférieurement de $u \in D_u$, les $f_x(u)$ étant des fonctions continues de u dans D_u. Les ensembles e_n : $[\psi(u) \leqslant n]$ sont fermés dans D_u et dans O_u. On a d'autre part $O_u = \Sigma_n e_n$; il existe donc, d'après la propriété de Baire un $n = N$ pour lequel e_N est dense sur un ouvert de O_u; puisque e_N est fermé, il contient la fermeture $\overline{G}_u$ d'un domaine de O_u; le lemme est ainsi établi.

LEMME 3, 2. — *Les hypothèses du théorème* 2 *et les conclusions du Lemme* (3, 1) *étant admises, pour* $x \in D'_x$ *et* u *appartenant à un compact* K_u *du domaine* G_u, *chaque dérivée partielle* $D^{(\alpha)}_u f$, *par rapport aux* u, *est majorée uniformément par :*

$$(3, 11) \qquad |D^{(\alpha)}_u f(x, u^0)| \leqslant C_K N \delta_K^{-|\alpha|} \alpha_1 ! \ldots \alpha_q !$$

où $\delta_K > 0$ *et* C_K *ne dépendent que du compact* K_u *pris dans le domaine* G_u.

En effet la classe $(\mathcal{L}', D_u)$ induit (d'après la proposition 3, 4) une classe $(\mathcal{L}', G_u)$ sur le domaine $G_u \subset D_u$; soit alors $\delta_K > 0$,

pris assez petit pour que la réunion des polycercles centrés sur K_u, de rayons égaux à δ_K, soit un compact Γ dans $\Omega(G_u)$; à Γ est associé par la classe $(\mathcal{L}', G_u)$ un compact $K' \subset G_u$ tel qu'on ait, d'après (3, 8) et la proposition (3, 6) :

$$(3,\ 12)\qquad |D_u^{(\alpha)}f(x,\ u^0)| \leqslant C_\Gamma \sup_{u\in K'} |f(x,\ u)|\ \delta_k^{-|\alpha|}\alpha_1 ! \ldots \alpha_q !$$

quels que soient $x \in D_x$, et $u^0 \in K_u$. Si on prend $x \in \overline{D}'_x$, $u^0 \in K_u$ et tient compte de (3, 10), on obtient (3, 11), les coefficients étant déterminés par la configuration du compact K_u dans G_u.

Lemme 3, 3. — *Les hypothèses du théorème* 11, *et* (3, 10) *étant vérifiés pour* $x \in \overline{D}'_x$, $u \in \overline{G}_u$, *alors pour* u *parcourant un compact* $K_u \subset G_u$ *et* x *parcourant le domaine* D'_x, *les dérivées partielles* $D_u^{(\alpha)}f(x,\ u)$ *par rapport aux* u_j *et les fonctions* $f_u(x)$ *appartiennent à une même classe.* $(\mathcal{L},\ D'_x)$.

On le démontrera par récurrence sur $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_p$. Soit $(\beta) = (\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_k + 1,\ \ldots,\ \alpha_p)$. Montrons que si la propriété est vraie pour toutes les dérivées en u d'ordre total $|\alpha|$, elle est vraie de $D_u^{(\beta)}f$; on posera $D_u^{(\gamma)} = \dfrac{\partial}{\partial u_k} D^{(\beta)} = \dfrac{\partial^2}{\partial u_k^2} D^{(\alpha)}$.
Donnons à u une valeur fixe $u^0 = (u_1^0,\ \ldots,\ u_q^0) \in K_u$; on posera $u^0 + t_k = (u_1^0,\ \ldots,\ u_k^0 + t_k,\ \ldots,\ u_q^0)$, t_k étant pris assez petit pour que $u^0 + t_k$ appartienne à un compact K''_u dans G_u. On aura alors :

$$(3,\ 13)\qquad D_u^{(\beta)}f(x,\ u^0) = \lim_{t_k=0} t_k^{-1}\,[D_u^{(\alpha)}f(x,\ u^0 + t_k) - D_u^{(\alpha)}f(x,\ u^0)] = \lim_{t_k=0} g(x,\ t_k).$$

L'hypothèse ii) de la définition 3, 2 entraîne alors que $g(x,\ t_k)$ appartienne à $(\mathcal{L},\ D'_x)$. D'autre part, en utilisant la dérivabilité de $D_u^{(\alpha)}f$ par rapport à u_k, on a :

$$(3,\ 14)\qquad |g(x,\ t_k) - D_u^{(\beta)}f(x,\ u^0)| \leqslant \frac{|t_k|}{2} \sup\nolimits_j |D_u^{(\gamma)}f(x,\ u^0 + \theta t_k)|$$

le sup. étant pris pour $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. On applique alors le lemme (3, 2) et la majoration (3, 11) à la dérivée $D_u^{(\gamma)}$ qui figure au second membre de (3, 14). Pour $x \in \overline{D}'_x$, $u^0 \in K_u$, on a :

$$(3,\ 15)\qquad |g(x,\ t_k) - D_u^{(\beta)}f(x,\ u^0)| \leqslant \frac{|t_k|}{2} C_{K''} N \delta_{K''}^{-|\beta|-1},$$

où K'' est un compact dans G_u, et contient K_u. Ainsi les $g(x, t_k) \in (\mathfrak{L}, D'_x)$ convergent uniformément sur $\bar{D}'_x$ vers $D_u^{(\beta)} f(x, u^0)$ pour $u^0 \in K_u$; d'après la proposition (3, 2), $D_u^{(\beta)} f(x, u^0)$ appartient encore à la fermeture de la classe $(\mathfrak{L}_{|\alpha|}, D'_x)$ constituée à partir des $f_u(x)$ et des $D_u^\lambda f(x, u^0)$ pour $0 \leqslant |\lambda| \leqslant |\alpha|$.

D'autre part pour $|\alpha| = 0$ l'énoncé est vérifié pour la classe $(\mathfrak{L}, D'_x) = (\mathfrak{L}_0, D'_x)$ par hypothèse.

Finalement on a établi que la fermeture $(\bar{\mathfrak{L}}, D'_x)$ contient toutes les dérivées partielles $D_u^{(\alpha)} f(x, u^0)$, pour $u^0 \in K_u$ et (α) quelconque.

Au lieu de considérer les dérivées $D_u^{(\alpha)} f(x, u^0)$ on considérera encore les coefficients du développement de Taylor, de centre u^0, pour $x \in D'_x$, x fixé :

$$(3, 16) \quad f(x, u) = \sum_{(\alpha)} A^{(\alpha)}(x) (u_1 - u_1^0)^{\alpha_1}, \ldots, (u_q - u_q^0)^{\alpha_q}.$$

Les $A^{(\alpha)}(x)$ s'obtiennent à partir des $D_u^{(\alpha)} f(x, u^0)$ par division par $\alpha_1 !, \ldots, \alpha_q !$; en divisant les deux membres de (3, 13) par $\alpha_k + 1$, on voit que les $A^{(\alpha)}(x)$ appartiennent eux aussi à $(\bar{\mathfrak{L}}, D'_x)$ quels que soient (α) et le point u^0 pris sur le compact K_u.

Il en résulte que les $A^{(\alpha)}(X)$, pour X appartenant à un compact $\Gamma \subset \Omega(D'_x)$ vérifient tous une majoration

$$(3, 17) \qquad |A^{(\alpha)}(X)| \leqslant C_\Gamma \sup_{x' \in \bar{D}'_x} |A^{(\alpha)}(x')|$$

et cela quel que soit u^0 pris sur K_u.

On obtient alors :

Lemme 3, 4. — *Sous les hypothèses du théorème* 11, *à tout domaine* D'_x *d'adhérence compacte dans* D_x, *et à tout ouvert* $O_u \subset D_u$, *correspond un compact* $K_u \subset O_u$, *tel que pour* $u^0 \in K_u$ *et* $X \in \Omega(D'_x)$ *le développement*

$$(3, 18) \quad f(X, u) = \sum_{(\alpha)} A^{(\alpha)}(X) (u_1 - u_1^0)^{\alpha_1}, \ldots, (u_q - u_q^0)^{\alpha_q},$$

— *dont la restriction pour* $x \in D'_x$, *réel, est* (3, 16) — *possède la propriété suivante : les fonctions* $\frac{1}{|\alpha|} \log |A^{(\alpha)}(X)|$ *appartiennent dans* $\Omega(D'_x)$ *à une famille localement bornée supérieurement de fonctions plurisousharmoniques.*

En effet les $A^{(\alpha)}(X)$, étant les prolongements à $\Omega(D'_x)$ des

$A^{(\alpha)}(x)$ qui figurent dans (3, 16), vérifient (3, 17). D'autre part pour $x \in \overline{D}'_x$ et $u^0 \in K_u$, on a, d'après le Lemme (3, 2) et (3, 11) :

$$|A^{(\alpha)}(x)| \leqslant C_K N \delta_K^{-|\alpha|}.$$

Finalement on aura, pour X pris sur un compact Γ de $\Omega(D'_x)$ et $u_0 \in K_u$:

$$|A^{(\alpha)}(X)| \leqslant C_\Gamma . C_K N . \delta_K^{-|\alpha|}. \tag{3, 19}$$

où C_Γ ne dépend que de la position du compact Γ dans $\Omega(D'_x)$; (3, 19) vaut quel que soit u_0 appartenant à un compact K_u du domaine G_u(cf. lemme 3, 2) ; pour tout ouvert O_u dans D_u, on peut déterminer un domaine $G_u \subset O_u$, ainsi que N, de manière que l'on ait $|f(x, u)| \leqslant N$ pour $x \in \overline{D}'_x$, $u \in \overline{G}_u$. Finalement pour D'_x donné, avec $\overline{D}'_x \subset D_x$, il existe dans tout ouvert $O_u \subset D_u$, un domaine d'adhérence K_u compacte dans O_u, tel que (3, 19) soit vérifié pour $u^0 \in K_u$, avec des constantes C_K, N, δ_K qui ne dépendent ni de (α) ni de $u^0 \in K_u$, ni du compact Γ sur lequel varie X. Sur un compact Γ de $\Omega(D'_x)$ on a alors

$$\frac{1}{|\alpha|} \log |A^{(\alpha)}(X)| \leqslant -\log \delta_K + \varepsilon(|\alpha|) \tag{3, 20}$$

où $\varepsilon(|\alpha|)$ tend vers zéro avec $|\alpha|^{-1}$. Le lemme est ainsi établi.

Démonstration du théorème 11. — Étant donné un point u^0 intérieur à D_u, on désignera par $e(u^0)$ l'écart de u^0 à la frontière de $\Omega(D_u)$, c'est-à-dire le rayon du polycercle maximal (de rayons égaux), de centre u^0, contenu dans $\Omega(D_u)$. Considérons pour $X \in \Omega(D'_x)$ la série :

$$\sum_{(\alpha)} A^{(\alpha)}(X)(U_1 - u_1^0)^{\alpha_1} \dots (U_q - u_q^0)^{\alpha_q}, \tag{3, 21}$$

qui n'est autre que (3, 18) où les u_k peuvent prendre des valeurs complexes U_k. Pour $X = x$ réel, $x \in D'_x$, $\overline{D}'_x \subset D_x$, et u^0 quelconque dans D_u, (3, 21) représente $f_x(u)$ et est convergente dans le polycercle :

$$|U_j - u_j^0| < e(u^0), \qquad 1 \leqslant j \leqslant q.$$

On a donc quel que soit $u^0 \in D_u$:

$$\limsup \frac{1}{|\alpha|} \log |A^{(\alpha)}(x)| \leqslant -\log e(u^0). \tag{3, 22}$$

D'après les lemmes 3,3 et 3,4 il existe un ensemble E_u partout dense dans D_u, et tel que, pour $u^0 \in E_u$, les coefficients $A^{(\alpha)}(x)$ de la série Taylor de centre u^0 représentant $f_x(u)$, possèdent les propriétés :

a) les $A^{(\alpha)}(x)$ forment une classe $(\mathcal{L}, D'_x)$,

b) leurs prolongements analytiques $A^{(\alpha)}(X)$ dans $\Omega(D'_x)$, sont tels que les fonctions plurisousharmoniques

$$(3,\ 23) \qquad \frac{1}{|\alpha|} \log |A^{(\alpha)}(X)|$$

forment dans $\Omega(D'_x)$ une famille de fonctions plurisousharmoniques localement bornée supérieurement.

Fixons u^0 appartenant à E_u et appliquons le théorème 10 à la suite (3, 23) où (α) parcourt les indices multiples $(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$ rangés de manière que $|\alpha|$ soit fonction décroissante du rang.

A tout domaine D''_x d'adhérence $\overline{D}''_x$ compacte dans D'_x et à $\varepsilon > 0$ correspondent un domaine Δ_0 dans C^p, $D''_x \subset \overline{\Delta}_0 \subset \Omega(D'_x)$, et un entier N de manière que l'on ait, d'après (3, 22) :

$$(3,\ 24) \qquad \frac{1}{|\alpha|} \log |A^{(\alpha)}(X)| \leqslant -\log e(u^0) + \varepsilon,$$

pour $X \in \overline{\Delta}_0$, $|\alpha| \geqslant N$.

Il en résulte que (3, 21) converge dans le polycercle

$$|U_j - u_j^0| \leqslant e^{-\varepsilon} . e(u_0),$$

et que la convergence est uniforme, dans

$$(3,\ 25) \qquad X \in \overline{\Delta}_0 \qquad |U_j - u_j^0| \leqslant e^{-\varepsilon} e(u_0).$$

Puisque ε est quelconque positif et que les coefficients $A^{(\alpha)}(X)$ sont holomorphes dans $\Omega(D'_x) \supset \overline{\Delta}_0$, (3, 21) représente dans le domaine de $C^p \times C^q = C^{p+q}$ défini par :

$$(3,\ 26) \qquad X \in \Delta_0, \qquad |U_j - u_j^0| < e(u_0),$$

une fonction holomorphe $f(X, U)$, dont la restriction à x réel, u réel, est $f(x, u)$. Soit D'_u un domaine d'adhérence $\overline{D}'_u$ compacte dans D_u et soit $\inf e(u) = a > 0$ pour $u \in \overline{D}'_u$. On pourra recouvrir $\overline{D}'_u$ avec un nombre fini de polyèdres construits dans C^q,

$$|U_j - u_j^{(s)}| < a, \qquad s = 1, \ldots \nu.$$

où $u^{(s)}$ est pris appartenant à l'ensemble E_u; à chaque $u^{(s)}$ correspond un domaine de C^{p+q}.

$$X \in \Delta_s; \quad P_s : |U_j - u_j^{(s)}| < a,$$

avec $\overline{D''_x} \subset \Delta_s \subset \Omega(D'_x)$. Soit

$$\Delta = \bigcap_s \Delta_s$$

et soit Δ' la réunion des polycercles P_s: les séries de Taylor

$$(3,\ 27) \qquad \sum_{(\alpha)} A^{(\alpha)}(X)\,(U_1 - u_j^{(s)})^{\alpha_1} \dots (U_q - u_q^{(s)})^{\alpha_q}$$

définissent dans chaque domaine $(\Delta \times P_s)$ de C^{p+q} une fonction $f_s(X, U)$ holomorphe de l'ensemble des variables (X, U) dont la restriction à $\{D''_x \times [|u - u_j^{(s)}| < a]\}$ est la fonction $f(x, u)$; la réunion des P_s dans C^q est un domaine connexe Δ' dont les P_s constituent un recouvrement par des ouverts. Les $f_s(X, U)$ sont ainsi des éléments d'une même fonction $f(X, U)$ holomorphe dans $\Delta \times \Delta'$, domaine de C^{p+q} qui contient le compact $\overline{D''_x} \times \overline{D'_u}$. Comme D''_x et D'_u sont quelconques dans D_x — respectivement D_u — sous la condition d'être relativement compacts, on a établi que $f(x, u)$ est dans $D_x \times D_u$ la restriction d'une fonction $f(X, U)$ holomorphe des variables complexes (X, U) ce qui achève la démonstration du théorème 11.

Corollaire. — *Le domaine d'holomorphie de f comprend le produit $\Omega(D_x) \times \Omega'(D_u)$, $\Omega(D_x)$ et $\Omega'(D_u)$ étant relatifs aux classes $(\mathfrak{L}, D_x)$, $(\mathfrak{L}', D_u)$.*

Il est facile de voir en effet que (3, 21) converge uniformément sur tout compact de $\Omega(D_x) \times \Omega'(D_u)$. Si $\mathcal{E}[|u_j - u_j^0| < r] = \Pi$ est un polycercle maximal, de centre $u^0 \in D_u$, pour la classe $(\mathfrak{L}', D_u)$, on a $r = e(u^0)$; si Γ est un compact dans $\Omega(D_x)$, il existe un compact $G \subset D_x$, et, dans (3, 21), on a pour $X \in \Gamma$:

$$|A^{(\alpha)}(X)| \leqslant C_\Gamma \sup_{x' \in G} |A^{(\alpha)}(x')|.$$

Alors d'après (3, 24) et le théorème 11, il existe un indice N, tel qu'on ait

$$\frac{1}{|\alpha|} \log |A^{(\alpha)}(x')| \leqslant -\log e(u^0) + \varepsilon$$

pour $|\alpha| > N$, $x' \in G$; on a alors pour $|\alpha| > N$, $X \in \Gamma$

$$|A^{\alpha}(X)| \leqslant e^{\alpha\varepsilon}[e(u^0)]^{-|\alpha|}$$

et (3, 21) converge uniformément pour $[X \in \Gamma, |u_j - u_j^0| \leqslant e(u^0)e^{-\varepsilon}]$, donc sur tout compact de $\Omega(D_x) \times \Pi$. Or un compact quelconque de $\Omega(D_x) \times \Omega(D_u)$ est réunion d'un nombre fini de Δ_i compacts dans des domaines du type $\Omega(D_x) \times \Pi$, Π étant un polycercle maximal de la famille Φ_u relative à $(\mathfrak{L}', D_u)$. Finalement (3, 21) converge uniformément dans $\Omega(D_x) \times \Omega(D_u)$ et $f(X, U)$ y est le prolongement holomorphe de $f(x, u)$.

Exemples: Donnons pour terminer quelques exemples de classes $(\mathfrak{L}, D)$.

Proposition 3, 8. — *Si un ensemble $\{f\}$ constitue une classe $(\mathfrak{L}, D)$, l'ensemble obtenu en adjoignant aux fonctions f leurs dérivées partielles $D^{(\alpha)}f$ pour $|\alpha| \leqslant m$ est une classe $(\mathfrak{L}_m, D)$.*

En effet, avec les notations de la proposition 3, 6, si $\Omega(D)$, $G(\Gamma)$, C_Γ sont les éléments de $(\mathfrak{L}, D)$, toute dérivée $D^{(\alpha)}f$ est holomorphe dans $\Omega(D)$; de plus si $\Gamma' \supset \Gamma$ appartient encore à $\Omega(D)$ et contient les polycercles de rayons $\delta > 0$ centrés sur Γ, (3, 8) sera encore vérifié à condition d'associer à Γ le compact $G' \subset D$ associé à Γ' par $(\mathfrak{L}, D)$ et de prendre $C'_\Gamma = C_{\Gamma'} \delta^{-|\alpha|} \alpha_1! \ldots \alpha_p!$. Les coefficients C'_Γ dépendent ainsi de $|\alpha|$ tandis que les éléments $\Omega(D)$, $\Gamma \to G'$ sont indépendants de α, $|\alpha| \geqslant 1$. Mais pour $|\alpha| \leqslant m$, C'_Γ est majoré par un nombre fini ne dépendant que de la configuration de Γ dans $\Omega(D)$, ce qui établit l'énoncé.

Les représentations intégrales fournissent des classes $(\mathfrak{L}, D)$:

Proposition 3, 9. — *Les fonctions $f(x)$ qui admettent une représentation intégrale*

$$(3, 28) \quad f(x) = \sum_j T_j(x, x')\,[f(x')], \qquad j = 1, \ldots, \nu$$

constituent une classe $(\mathfrak{L}, D)$ dans les conditions suivantes :

1° *Les T_j sont des fonctions analytiques de x, à valeur dans l'espace des courants sur l'espace $R^p(x')$, pour $x \in D \in R^p(x)$. Elles sont holomorphes de X complexe hors des cônes $\Sigma(X_k - x'_k)^2 = 0$,*

$x' = (x'_k)$ parcourant le support S_j de T_j qu'on supposera indépendant de x.

2° *En x', les T_j sont des chaînes (courants ayant la continuité d'ordre zéro) dont le support S_j compact dans* D *peut être pris arbitrairement voisin de la frontière de* D. *Enfin pour tout compact Γ sur lequel T_j est holomorphe de* X, *on a*

$$||T_j|| \leqslant L_j(\Gamma) \quad \text{quel que soit } X \in \Gamma.$$

Les $f(x)$ qui satisfont à (3, 28) forment bien une classe $(\mathcal{L}, D)$ dans ces conditions : les T_j sont en effet des fonctions holomorphes de X dans la cellule d'harmonicité (cf. [6, *h*]) $\mathcal{H}(D)$ définie dans C^p comme le complémentaire de la réunion des cônes $\Sigma(X_k - x'_k)^2 = 0$, $x = (x'_k)$ parcourant la frontière de D (cf. [6, *h*]). Sur un compact Γ de $\mathcal{H}(D)$, les T_j sont holomorphes et l'on a pour $X \in \Gamma$:

$$f(X) = \sum_j T_j(X, x')\,[f(x')],$$

$$|f(X)| \leqslant \sum_j \sup_{x' \in S_j} |f(x')| \times L_j(\Gamma) \leqslant [\sup_j L_j(\Gamma)] \cdot \sup_{x' \in G} |f(x')|,$$

en appelant G le compact de D qui est la réunion des S_j. On obtient une majoration du type (3, 5), et une classe $(\mathcal{L}, D)$ qui est un espace vectoriel.

La représentation intégrale des fonctions harmoniques et des fonctions polyharmoniques d'ordre fini est du type précédent si l'on prend comme noyau la fonction de Green (respectivement les fonctions de Green itérées successives dans le cas polyharmonique) dans un domaine $D' \subset D$, D' ayant une frontière régulière et étant arbitrairement voisin de D; la frontière de D' est alors le support de T, ou des T_j. Ce cas particulier donne une généralisation directe du théorème de Hartogs cité dans l'Introduction : si $f_x(u)$ et $f_u(x)$ sont des fonctions harmoniques (ou polyharmoniques d'ordre fini borné) $f(x, u)$ est analytique de (x, u). *Exemple :* $f(x, u)$, harmonique séparément [6], dans $D_x \times D_u$, de $x = (x_1, \ldots, x_p)$ et de $u = (u_1, \ldots, u_q)$, sans autre hypothèse, est analytique de (x, u), donc harmonique de l'ensemble des $p + q$ variables et holomorphe dans $\mathcal{H}(D_x) \times \mathcal{H}(D_u)$.

(6) Les singularités et notamment les singularités impropres au sens de [6, *d*] des fonctions doublement harmoniques ont été étudiées par M. V. Avanissian dans [1].

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. Avanissian. Fonctions plurisousharmoniques et fonctions doublement sousharmoniques. Thèse, *Annales E.N.S.*, 1961.

[2] M. Brelot *a*) Sur le potentiel et les suites de fonctions sousharmoniques, *C. R. Ac. Sci.*, t. 207, 1938, p. 836.

b) Nouvelle démonstration du théorème fondamental sur la convergence des potentiels, *Annales de l'Inst. Fourier*, t. 5, 1957, pp. 361-368.

c) Points irréguliers et transformations continues en théorie du potentiel, *Journal de Math.*, t. 19, 1940, pp. 319-337.

[3] M. Brelot et G. Choquet. Le théorème de convergence en théorie du potentiel, *Journal Madras Univ.*, t. 27, n° 1, 1957, pp. 277-286.

[4] H. Cartan. Théorie du potentiel newtonien, énergie, capacité, suite de potentiels, *Bull. Soc. Math.*, t. 73, 1945, pp. 74-106.

[5] J. Deny et P. Lelong. Étude des fonctions sousharmoniques dans un cylindre ou dans un cône, *Bull. Soc. Math. de France*, t. 75, 1947, pp. 89-112.

[6] P. Lelong *a*) Sur quelques problèmes de la théorie des fonctions de deux variables complexes, *Ann. École Norm. Sup.*, t. 58, 1941, pp. 85-177.

b) Définition des fonctions plurisousharmoniques *C.R. Ac. Sci. Paris*, t. 215, 1942, p. 398.

c) Les fonctions plurisousharmoniques, *Ann. École Norm. Sup.*, 1945, t. 62, pp. 301-338.

d) Ensembles singuliers impropres des fonctions plurisousharmoniques, *Journal de Math.*, t. 36, 1957, pp. 263-303.

e) Sur une classe de singularités impropres, *Archiv. der Math.*, t. 9, 1958, pp. 161-166.

f) Sur l'approximation des fonctions de plusieurs variables au moyen des fonctions polyharmoniques, *C. R. Ac. Sci.*, t. 227, 1948, p. 26.

g) Sur les singularités complexes d'une fonction harmonique *C. R. Ac. Sci.*, t. 232, 1951, p. 1895.

h) Prolongement analytique et singularités complexes des fonctions harmoniques, *Bull. Soc. Math. de Belgique*, 1954, pp. 20-23

ACHEVÉ D'IMPRIMER
SUR LES PRESSES DE
L'IMPRIMERIE DURAND
A CHARTRES
EN MAI 1961

PAPIER OFFSET BLANC VII/I
DES PAPETERIES DE FRANCE

DÉPÔT LÉGAL : 2e TRIMESTRE 1961
N° 3618.
Printed in France

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. Avanissian, Fonctions plurisousharmoniques et fonctions doublement sousharmoniques. Thèse, Annales E.N.S., 1961.

[2] M. Brelot a) Sur le potentiel et les suites de fonctions sousharmoniques, C. R. Ac. Sc., t. 207, 1938, p. 836.

b) Nouvelle démonstration du théorème fondamental sur la convergence des potentiels, Annales de l'Inst. Fourier, t. 6, 1957, pp. 361-368.

c) Points irréguliers et transformations continues en théorie du potentiel, Journal de Math., t. 19, 1940, pp. 319-337.

[3] M. Brelot et G. Choquet, [illegible] en théorie du potentiel, Journal Math. [illegible], t. [illegible], 1952, pp. 277-[illegible].

[4] H. Cartan, Théorie du potentiel newtonien: énergie, capacité, suite de potentiels, Bull. Soc. Math. [illegible], t. 73, 1945, pp. 74-106.

[5] J. Deny et P. Lelong, Étude des fonctions sousharmoniques dans un cylindre ou dans un cône, Bull. Soc. Math. de France, t. 75, 1947, pp. 89-112.

[6] P. Lelong a) Sur quelques problèmes de la théorie des fonctions de deux variables complexes, Ann. École Norm. Sup., t. 58, 1941, pp. 83-177.

b) Définition des fonctions plurisousharmoniques C.R. Ac. Sc. Paris, t. 215, 1942, p. 398.

c) Les fonctions plurisousharmoniques, Ann. École Norm. Sup., 1945, t. 62, pp. 301-338.

d) Ensembles singuliers impropres des fonctions plurisousharmoniques, Journal de Math., t. 36, 1957, pp. 263-303.

e) Sur une classe de singularités impropres, Arkiv för Math., t. 3, 1958, pp. 101-108.

f) Sur l'approximation des fonctions de plusieurs variables au moyen des fonctions polyharmoniques, C. R. Ac. Sc., t. 227, 1948, p. 26.

g) Sur les singularités complexes d'une fonction harmonique C. R. Ac. Sc., t. 232, 1951, p. 1895.

h) Prolongement analytique et singularités complexes des fonctions harmoniques, Bull. Soc. Math. de Belgique, 1954, pp. 10-23.